

## تحلیل المان محدود تغییر شکلهای بزرگ تیر با استفاده از تئوری های کلاسیک و مکانیک محیط

### پیوسته

در این مطالعه رفتار غیرخطی هندسی تیر با فرض ثابت بودن خواص مادی جسم، به کمک روش المان محدود مورد بررسی قرار می‌گیرد. به منظور مطالعه رفتار تیر دو رهیافت ارائه می‌گردد؛ در هر دو رهیافت، تیر با المانهای یک بعدی مرتبه ۲ مدلسازی می‌شود. در رهیافت اول که بر پایه روابط مکانیک محیط پیوسته استوار است؛ با استفاده از گرادیان تغییر شکل و تعیین کرنش گرین یک استراتژی لاگرانژی (اولیه) برای تحلیل ارائه می‌گردد و در رهیافت دوم با بکارگیری تئوری‌های کلاسیک تیر و استفاده از فرضهای ساده کننده، مدل دیگری برای بررسی رفتار غیرخطی معرفی می‌شود.

منصور درویزه<sup>۱</sup>

استاد

ابوالفضل درویزه<sup>۲</sup>

استاد

رضا انصاری<sup>۳</sup>

استادیار

علی علی‌جانی<sup>۴</sup>

دانشجوی دکترا

واژه های راهنما : غیر خطی، المان محدود، استراتژی لاگرانژی

### ۱- مقدمه

تحلیل تغییر شکلهای بزرگ و پیش بینی رفتار غیرخطی سازه‌ها پس از تغییر هندسه اولیه بطور گسترده‌ای مورد توجه محققان قرار دارد. در این راستا بسیاری از محققان از بین روشهای تحلیل مساله، روش‌های عددی و به طور خاص روش المان محدود را برای بررسی غیرخطی هندسی سازه پیشنهاد نموده‌اند. [۱]Zienkiewicz، [۲]Crisfield، [۳]Bathe، [۴]Wriggers، [۵]Reddy و ... روابط المان محدود را برای بررسی این پدیده استخراج نموده‌اند. به منظور استفاده کاربردی از روابط المان محدود در هندسه‌های گوناگون، تیر بعنوان یک هندسه پایه‌ای، می‌تواند آغازی برای بررسی تغییر شکلهای بزرگ سایر هندسه‌ها در تحلیل‌های مکانیکی محسوب شود. بطور کلی برای پیش‌بینی رفتار غیرخطی تیر می‌توان چهار رهیافت پیشنهاد نمود که سه رهیافت بر پایه المانهای یک بعدی و رهیافت چهارم بر پایه المانهای دو بعدی فرمولبندی می‌گردد و هر چهار رهیافت مبتنی بر تغییر شکلهای بزرگ و کرنشهای کوچک می‌باشند.

<sup>۱</sup> استاد، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان

<sup>۲</sup> استاد، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان

<sup>۳</sup> نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان [r\\_ansari@guilan.ac.ir](mailto:r_ansari@guilan.ac.ir)

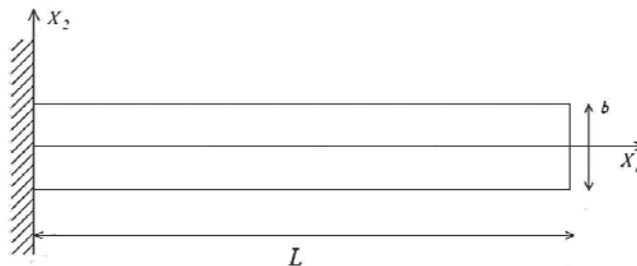
<sup>۴</sup> دانشجوی دکترا، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان [nimalijani@yahoo.com](mailto:nimalijani@yahoo.com)

Wriggers [۴]، به سه رهیافت برای تحلیل تیر اشاره می کند که در آن رهیافت اول توسط Wempner [۶]، Rankin [۷] و Crisfield [۲] بر پایه المانهای یک بعدی و بر اساس دورانهای بزرگ ارائه شده است. رهیافت دوم تحلیل غیرخطی تیر بر پایه المانهای یک بعدی بر اساس معادلات مکانیک محیط پیوسته فرمولبندی می شود. محققینی مانند Dvorkine [۸] و Crisfield [۲] با استفاده از روابط سینماتیک تیر و ترکیب آن با درونیابی المان محدود این روش را معرفی نموده اند. رهیافت سوم بر پایه المانهای یک بعدی بر اساس فرمولبندی تئوریهای غیرخطی تیر و میله و استفاده از فرضیات کلاسیک تحلیل تیر می باشد. Gruttman [۹] و Amero [۱۰] به صورت صریح این روابط را استخراج نموده اند. رهیافت چهارم بر پایه المانهای دو بعدی بوده که می تواند با دو استراتژی اولیه (لاگرانژی) و ثانویه (جاری) بر اساس روابط مکانیک محیط پیوسته فرمولبندی شود. در این خصوص Wriggers [۴] یک مدل کامل از تحلیل غیرخطی هندسی و مادی را معرفی می نماید، همچنین در زمینه تحلیل غیرخطی مادی Ehrlick [۱۱] یک تحلیل پلاستیک از تیر را ارائه داده است.

در مقاله حاضر، دو رهیافت از چهار رهیافت ذکر شده به منظور بررسی رفتار غیرخطی هندسی تیر بکار می رود. رهیافت بر پایه المانهای یک بعدی بر اساس فرمولبندی مکانیک محیط پیوسته با بکارگیری استراتژی لاگرانژی (اولیه) و رهیافت بر پایه المانهای یک بعدی بر اساس تئوریهای کلاسیک تیر و در نهایت پاسخهای دو تحلیل با یکدیگر و همچنین صحت و دقت آنها با مراجع مقایسه می گردد.

## ۲- فرمولبندی مساله

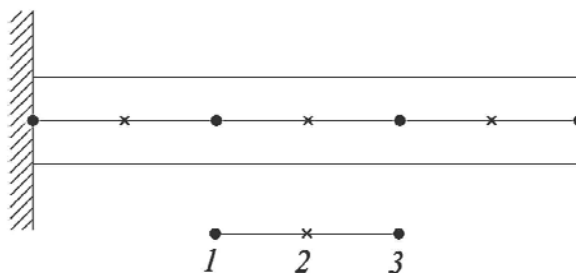
شکل (۱) یک طرح شماتیک از تیر یکسر گیرداری به طول  $L$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $t$  را نشان می دهد محور  $X_1$  راستای محور تیر و  $X_2$  موازی عرض تیر می باشد.



شکل ۱- طرح شماتیک تیر

## ۲-۱- فرمولبندی مساله به وسیله رهیافت بر اساس مکانیک محیط پیوسته

این رهیافت را در طول مطالعه رهیافت اول می نامیم. در رهیافت اول یک تیر دوبعدی با استفاده از روابط مکانیک محیط پیوسته به وسیله یک المان یک بعدی مرتبه ۲ مدل می گردد.



شکل ۲- المان یک بعدی مرتبه ۲ بر روی تیر

تابع شکل که وظیفه درونیابی کلیه میدان‌های مکان و جابجایی را برعهده دارد توسط روابط ذیل معرفی می‌شود.

$$N_1(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(1-\zeta) \quad (1)$$

$$N_2(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(1+\zeta)$$

$$N_3(\zeta) = 1-\zeta^2$$

روابط سینماتیک بر اساس پیکربندی لاگرانژی یا اولیه فرمولبندی می‌گردد. اگر مختصات نقاط در وضعیت اولیه را با  $X$  و مختصات نقاط پس از تغییر شکل در وضعیت ثانویه با  $x$  نشان داده شود، گرادیان تغییر شکل به کمک رابطه زیر معرفی می‌گردد:

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} = x_{,X} \quad (2)$$

با معرفی  $\bar{U}$  بعنوان بردار جابجایی، گرادیان تغییر شکل می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$x = X + \bar{U} \Rightarrow F = \hat{I} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} \quad (3)$$

$$\Rightarrow F = \hat{I} + \text{Grad}\bar{U}$$

که در رابطه فوق  $\hat{I}$  ماتریس واحد است. بدین ترتیب می‌توان کرنش گرین را بر اساس گرادیان تغییر شکل تعریف نمود:

$$E = \frac{F^T F - \hat{I}}{2} \quad (4)$$

اگر سازه در مکان اولیه خود باقی بماند یعنی  $x = X$  و یا  $F = \hat{I}$ ؛ که در اینصورت کرنش گرین صفر خواهد بود یعنی جسم در وضعیت مرجع خود قرار دارد.

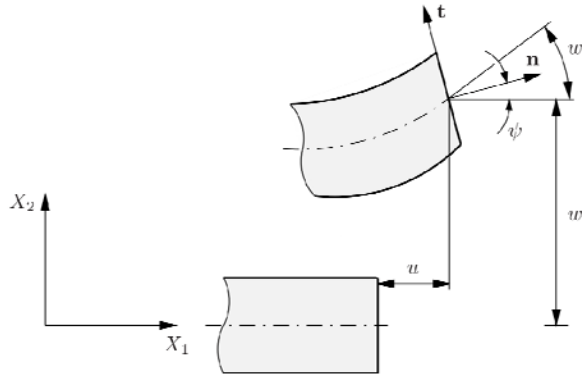
مطابق با شکل ۳،  $X_1, X_2$  به ترتیب محورهای راستای محور تیر و موازی عرض تیر قبل از تغییر شکل را بیان می‌نماید و موقعیت مکانی هر نقطه از تیر در وضعیت اولیه را نشان می‌دهد. پس از اعمال بارگذاری وضعیت مکانی هر نقطه در اثر جابجایی  $\bar{U} = \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}$  بر اساس فرضیه سینماتیک برای تغییر شکل تیر با  $x_1, x_2$  بیان می‌گردد که خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u - X_2 \sin\psi \\ -X_2 + w + X_2 \cos\psi \end{bmatrix} \quad (5)$$

در رابطه فوق، مکان ثانویه به صورت حاصل جمع مکان اولیه و جابجایی هر نقطه بیان شده است. که در آن بردار جابجایی به شکل زیر ارائه می گردد. [۴]

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - X_2 \sin \psi \\ w + X_2 \cos \psi - X_2 \end{bmatrix} \quad (۶)$$

که  $u$  جابجایی راستای محوری،  $w$  جابجایی عرضی و  $\psi$  دوران می باشد.



شکل ۳- سینماتیک تیر

با استفاده از گسسته سازی در روش المان محدود و همچنین بسط سری تیلور، میدان جابجایی به شکل زیر بدست می آید که  $N_I$  تابع شکل مربوط به گره  $I$  ام است.

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^3 N_I u_I - X_2 \sum_{I=1}^3 N_I \psi_I \\ \sum_{I=1}^3 N_I w_I - \frac{1}{2} X_2 \sum_{I=1}^3 N_I \psi_I^2 \end{bmatrix} \quad (۷)$$

هر گره المان دارای سه درجه آزادی ( $u, w, \psi$ ) بوده و از رابطه (۷) نمو میدان جابجایی بصورت زیر حاصل می گردد:

$$\delta \bar{U} = \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^3 N_I \delta u_I - X_2 \sum_{I=1}^3 N_I \delta \psi_I \\ \sum_{I=1}^3 N_I \delta w_I - X_2 \sum_{I=1}^3 N_I \psi_I \delta \psi_I \end{bmatrix} \quad (۸)$$

همچنین می توان گرادیان  $\bar{U}$  و  $\delta \bar{U}$  را بصورت برداری زیر نمایش داد:

$$Grad \delta \bar{U} = \begin{bmatrix} \delta U_{,X_1} \\ \delta W_{,X_1} \\ \delta U_{,X_2} \\ \delta W_{,X_2} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^3 \begin{bmatrix} N_{I,X_1} & \circ & -N_{I,X_1} X_2 \\ \circ & N_{I,X_1} & -N_{I,X_1} X_2 \psi_I \\ \circ & \circ & -N_I \\ \circ & \circ & -N_I \psi_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta w \\ \delta \psi \end{bmatrix}_I \Rightarrow Grad \delta \bar{U} = \sum_{I=1}^3 \hat{B}_I \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta w \\ \delta \psi \end{bmatrix}_I \quad (۹)$$

$$\text{Grad}\bar{U} = \begin{bmatrix} U_{,X_1} \\ W_{,X_1} \\ U_{,X_2} \\ W_{,X_2} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^3 \begin{bmatrix} N_{I,X_1} & \circ & -N_{I,X_1}X_2 \\ \circ & N_{I,X_1} & -\frac{1}{2}N_{I,X_1}X_2\psi_I \\ \circ & \circ & -N_I \\ \circ & \circ & -\frac{1}{2}N_I\psi_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \psi \end{bmatrix}_I$$

با تبدیل  $\text{Grad}\bar{U}$  از یک بردار به یک ماتریس و جایگذاری آن در رابطه (۳) گرادیان تغییر شکل حاصل و بصورت نمادین زیر بیان می‌گردد.

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = I + \text{Grad}\bar{U} \quad (10)$$

دو پارامتر اساسی برای تحلیل مساله غیرخطی، ماتریس سفتی مماسی و بردار نیروهای داخلی می‌باشند؛ مقدمه دستیابی به هر دو پارامتر تعیین نمو کرنش گرین بوده و بر این اساس روابط (۲)، (۳) و (۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta F = \frac{\partial \delta x}{\partial X} \quad (11)$$

$$\delta x = \delta \bar{U} \Rightarrow \delta x_1 = \delta U = \bar{\eta}_1, \quad \delta x_2 = \delta W = \bar{\eta}_2 \quad (12)$$

$$\delta E = \frac{\delta F^T F + F^T \delta F}{2} \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$\delta F = \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{1,X_1} & \bar{\eta}_{1,X_2} \\ \bar{\eta}_{2,X_1} & \bar{\eta}_{2,X_2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

با تعاریف فوق و تبدیل نمو کرنش گرین رابطه (۱۳) از شکل ماتریسی به صورت برداری، ماتریس  $B_{LI}$  برای تشکیل ماتریس سفتی مماسی و بردار نیروهای داخلی حاصل می‌گردد:

$$\delta E = \begin{bmatrix} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \\ 2\delta E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}\bar{\eta}_{1,X_1} + F_{21}\bar{\eta}_{2,X_1} \\ F_{12}\bar{\eta}_{1,X_2} + F_{22}\bar{\eta}_{2,X_2} \\ F_{11}\bar{\eta}_{1,X_2} + F_{21}\bar{\eta}_{2,X_2} + F_{12}\bar{\eta}_{1,X_1} + F_{22}\bar{\eta}_{2,X_1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

با تفکیک پارامتر نمو جابجایی هر گره از سایر پارامترها بردار نمو کرنش گرین به شکل ذیل بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \\ 2\delta E_{12} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^3 B_{LI} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta w \\ \delta \psi \end{bmatrix}_I \quad (16)$$

با بدست آوردن ماتریس  $\hat{B}_I$  از روابط (۹) و ماتریس  $B_{LI}$  از رابطه (۱۶) ماتریس سفتی مماسی به صورت زیر خواهد بود:

$$K_{TIK} = \int (\hat{B}_I^T \hat{S} \hat{B}_k + B_{LI}^T D B_{LK}) dv \quad (17)$$

اندیس‌های  $I$  و  $K$ ،  $I$  امین و  $K$  امین گره محلی در یک المان را بیان می‌کنند و بدین ترتیب ماتریس  $K_T$  از نه زیر ماتریس  $3 \times 3$  تشکیل می‌شود. همچنین در رابطه (۱۷)  $\hat{S}$  تنش دوم پیلا،  $D$  ماتریس ضریب الاستیک و  $dv$  جز حجم المان می‌باشد و با فرض ثابت بودن خواص ماده در تمام مراحل تغییر شکل و بر طبق روابط سینماتیک و براساس فرض تنش مسطح، ماتریس ضریب الاستیک  $D$  حاصل می‌گردد:

$$D = \frac{E_L}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

که در آن  $E_L$  مدول یانگ و  $\nu$  ضریب پواسون می‌باشد. رابطه بین کرنش گرین و تنش دوم پیلا با کمک معادله ساختاری زیر ارائه می‌گردد.

$$S = DE \quad (19)$$

$$S = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix}, \quad S_m = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix}$$

با تبدیل  $S$  از وضعیت برداری رابطه (۱۹) به صورت ماتریسی و تشکیل ماتریس  $S_m$  می‌توان تنش موجود در ترم سفتی هندسی ماتریس سفتی مماسی (رابطه ۱۷) را بدست آورد:

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} S_m & [0]_{2 \times 2} \\ [0]_{2 \times 2} & S_m \end{bmatrix} \quad (20)$$

ماتریس نیروهای داخلی به کمک رابطه زیر استخراج می‌گردد:

$$R_I = \int B_{LI}^T S dv \quad (21)$$

## ۲-۲- فرمولبندی مساله به وسیله رهیافت بر اساس روابط کلاسیک تیر

این رهیافت را در طول مطالعه رهیافت دوم می‌نامیم. در این رهیافت ضمن استفاده از تابع شکل رابطه (۱)، یک تیر دوبعدی به کمک روابط کلاسیک تیر و به وسیله یک المان یک بعدی مرتبه ۲ مدل‌سازی می‌شود. با در نظر گرفتن فرضهای ساده کننده، روشهای متعددی از رهیافت دوم استخراج خواهد شد که در این مطالعه روش دورانه‌های متوسط بر اساس تعاریف پایه‌ای سینماتیک و به کمک روابط کلاسیک تیر برای تحلیل غیرخطی ارائه می‌گردد. رابطه کرنش - جابجایی به کمک روابط سینماتیک و برطبق شکل (۳) به صورت زیر بیان می‌شود [۴]:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (1+u') \cos \psi + w' \sin \psi - 1 \\ \gamma &= w' \cos \psi - (1+u') \sin \psi \end{aligned} \quad (22)$$

$$K = w'$$

در رابطه (۲۰)،  $\varepsilon$  کرنش محوری،  $\gamma$  کرنش برشی،  $K$  انحنا و  $(\ )$  بیان کننده مشتق نسبت به محور  $X_1$  می باشد. کرنش می تواند به شکل ماتریسی فرمولبندی شود:

$$\bar{\varepsilon} = T(\psi)\bar{u}' - \bar{N} \quad (23)$$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ K \end{Bmatrix}, \quad T(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}' = \begin{Bmatrix} 1+u' \\ w' \\ \psi' \end{Bmatrix}, \quad \bar{N} = \begin{Bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با در نظر گرفتن سه جمله اول سری تیلور یعنی  $\sin\psi = \psi$  و  $\cos\psi = 1 - \frac{1}{2}\psi^2$  می توان کرنش را با تقریب مناسب به صورت زیر بیان نمود که بدین ترتیب روابط سینماتیک برای روش دورانهای متوسط در رهیافت دوم ارائه می گردد:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{T}(\psi)\bar{u}' - \bar{\psi} - \bar{N} \quad (24)$$

$$\bar{T}(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & \psi & 0 \\ -\psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\psi} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\psi^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با تعریف بردار تنش منته به صورت  $\bar{S}^T = \{N, Q, M\}$ ، هر یک از مؤلفه های آن به صورت زیر ارائه می گردد.

$$N = \int P_{11} b dX_2$$

$$Q = \int P_{12} b dX_2 \quad (25)$$

$$M = \int P_{11} X_2 b dX_2$$

که  $P_{11}$  و  $P_{12}$  به کمک معادلات ذیل در رابطه (۲۵) قرار می گیرد.

$$\begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_L & 0 \\ 0 & G \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon + X_2 K \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (26)$$

و به کمک معادله ساختاری، رابطه بین تنش - کرنش بدست می آید:

$$\bar{S} = \bar{D}\bar{\varepsilon}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} E_L A & 0 & 0 \\ 0 & GA & 0 \\ 0 & 0 & E_L I \end{bmatrix} \quad (27)$$

که در آن  $G$  مدول برشی،  $A$  سطح مقطع و  $I$  ممان اینرسی سطح می باشد. بر طبق روابط المان محدود و وارد نمودن تابع شکل، رابطه سینماتیک (۲۴) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{I=1}^3 \begin{bmatrix} N'_I & N'_I \psi & -\frac{I}{2} \psi N'_I \\ \circ & N'_I & -(I+u')N'_I \\ \circ & \circ & N'_I \end{bmatrix} \bar{u}_I \quad (28)$$

که در آن  $\bar{u}_I^T = \{u_I, w_I, \psi_I\}^T$  جابجایی هر گره از المان بوده و نمو معادله (۲۸) به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\delta \bar{\varepsilon} = \sum_{I=1}^3 B_I \bar{\eta}_I \quad (29)$$

$$B_I = \begin{bmatrix} N'_I & N'_I \psi & (w' - \psi)N'_I \\ -N'_I \psi & N'_I & -(1+u')N'_I \\ \circ & \circ & N'_I \end{bmatrix}, \quad \bar{\eta}_I = \delta \bar{u}_I$$

اکنون با بدست آوردن روابط فوق همانند رهیافت اول، پارامترهای اساسی تحلیل غیرخطی معرفی می‌گردد:

$$R_I = \int_0^{l_e} B_I^T \bar{S} dX_I \quad (30)$$

در رابطه (۳۰) طول المان بوده و  $R_I$  بردار نیروهای داخلی مربوط به هر گره توسط  $B_I$  از رابطه (۲۹) و  $\bar{S}$  از رابطه (۲۷) تعیین می‌گردد. پس از خطی سازی معادلات المان محدود غیرخطی، ماتریس سفتی مماسی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$K_{TIK} = \int_0^{l_e} (B_I^T \bar{D} B_K + N G_{IK}^N + Q G_{IK}^O) dX_I \quad (31)$$

با قرار دادن  $\bar{D}$ ،  $N$  و  $Q$  از معادلات (۲۵) و (۲۷) در رابطه (۳۱)، پارامترهای  $G_{IK}^N$  و  $G_{IK}^O$  به شکل زیر ارائه می‌گردد:

$$G_{IK}^N = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & N'_I N'_K \\ \circ & N'_I N'_K & -N'_I N'_K \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$G_{IK}^O = \begin{bmatrix} \circ & \circ & -N'_I N'_K \\ \circ & \circ & \circ \\ -N'_I N'_K & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

### ۲-۳- حل معادلات غیرخطی

در هر دو رهیافت مطرح شده دو پارامتر اساسی ماتریس سفتی مماسی و بردار نیروهای داخلی برای تحلیل معادلات غیرخطی استفاده می‌گردد. یک الگوریتم تکراری توانمند برای حل این دسته از مسائل، الگوریتم نیوتن - رافسون می‌باشد. به دلیل عدم وجود Snapping در جابجایی عرضی تیر، می‌توان این الگوریتم را همراه با روش افزایش نیرو (Load Control) بکار برد.

در روش نیوتن رافسون به منظور رسیدن از یک گام نیرو به گام نیروی دیگر، از چندین حلقه تکرار استفاده می‌گردد بطوریکه در هر حلقه با بدست آوردن ماتریس سفتی مماسی و نیروهای داخلی، صحت نقطه بدست آمده توسط معیار همگرایی مورد سنجش قرار می‌گیرد. در زیر الگوریتم نیوتن رافسون بصورت فشرده ارائه شده است.

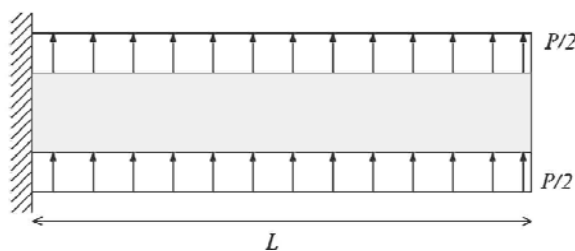


## جدول ۱- الگوریتم نیوتن رافسون

$\bar{U}_0 = \bar{U}_k$	مقدار اولیه جابجایی :
$i = 0, 1, \dots$	۱- حلقه تکراری تا اینکه همگرایی حاصل گردد.
$K_T(\bar{U}_i)\Delta\bar{U}_{i+1} = -G(\bar{U}_i)$ , $G(\bar{U}_i) = R_I(\bar{U}_i) - P_{ext}$	۲- محاسبه نمو جابجایی:
	۳- محاسبه جابجایی جدید:
	$\bar{U}_{i+1} = \bar{U}_i + \Delta\bar{U}_{i+1}$
$\ G(\bar{U}_{i+1})\  = \begin{cases} \leq \Gamma \rightarrow \bar{U}_{k+1} = \bar{U}_{i+1} \\ > \Gamma \rightarrow i = i + 1 \rightarrow Goto 2 \end{cases}$	۴- تست همگرایی:

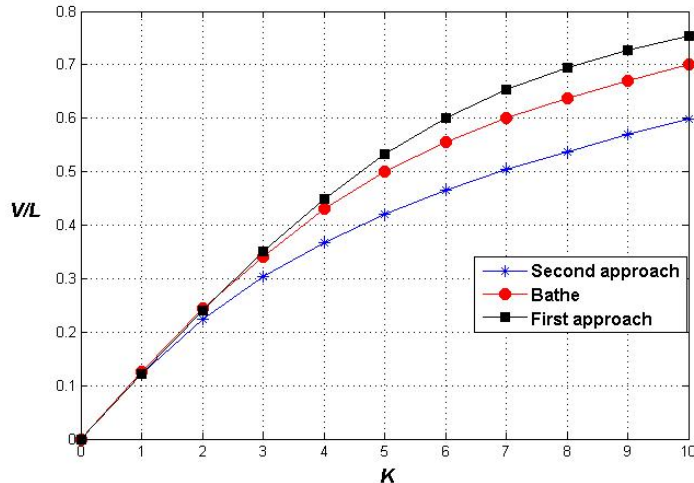
## ۳- بحث و نتیجه گیری

مقایسه جوابهای بدست آمده دو رهیافت بطور کامل می تواند صحت بررسی انجام شده را مورد تأیید قرار دهد همچنین دقت پاسخهای هر رهیافت را می توان به کمک مقایسه با مرجع Bathe [۱۲] نشان داد. برای این منظور یک تیر یکسرگیردار را در نظر می گیریم که تحت بار گسترده عرضی  $\frac{P}{2}$  در سطوح فوقانی و تحتانی قرار دارد.



شکل ۴- تیر یکسرگیردار تحت بار گسترده عرضی P

این تیر به طول  $L = 10$  (in) و عرض و ضخامت  $I$  (in) با مدول الاستیک  $E_L = 1.2 \times 10^4$  (psi) و ضریب پواسون  $\nu = 0.2$  فرض می شود. جابجایی عرض تیر با  $V$  نمایش داده می شود بدین ترتیب شکل (۵) جابجایی بی بعد عرضی تیر  $\frac{V}{L}$  بر حسب ضریبی از بار  $K = \frac{PL^3}{E_L I}$  را نشان می دهد که  $I$  همان اینرسی سطح مقطع است.



شکل ۵- نمودار جابجایی عرضی انتهای آزاد تیر برحسب بار

شکل (۵) جابجایی عرضی انتهای آزاد تیر را بیان می‌کند بطوریکه به ازای نیروی مشخصی، نقطه‌ای از تیر در انتهای آزاد آن تقریباً به اندازه  $0.7$  طول تیر تغییر مکان می‌دهد. از این رو می‌توان با تحلیل غیرخطی هندسی و با فرض ثابت ماندن خواص مکانیکی، تغییر شکلهای بزرگ تیر را بررسی نمود و در صورت تغییر خواص ماده، با بکارگیری یک تحلیل غیرخطی مادی در درون تحلیل غیرخطی هندسی پدیده غیرخطی از دو حیث ارزیابی می‌شود.

همانطور که شکل (۵) نشان می‌دهد نمودار دو رهیافت و مرجع [۱۲] در ناحیه خطی بر یکدیگر منطبق می‌باشند ولی با افزایش نیرو و ورود به ناحیه غیرخطی نمودارها از یکدیگر جدا می‌گردند. رهیافت اول تطابق بسیار مناسبی با پاسخ مرجع [۱۲] دارد و این بدان معنی است که بکارگیری روابط مکانیک محیط پیوسته در تحلیلهای المان محدود پاسخهای قابل قبولی را سبب خواهد شد.

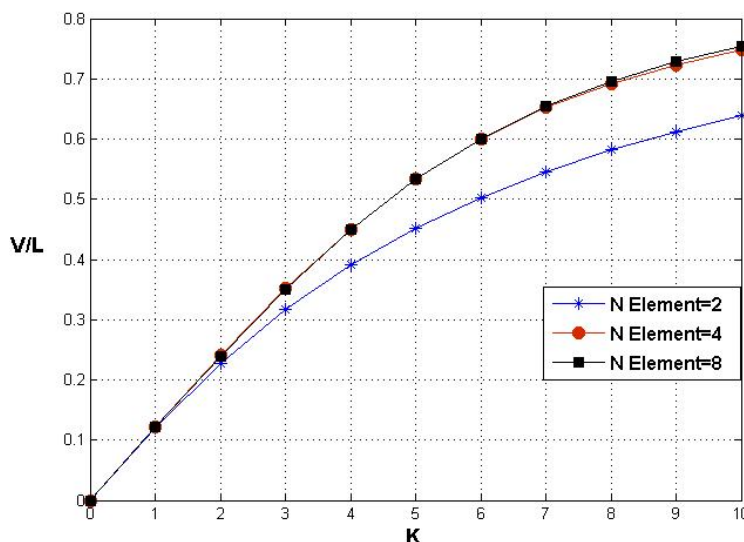
پاسخ مرجع [۱۲] به کمک المانهای دو بعدی بدست آمده که در آن تحلیل هر المان دارای هشت گره می‌باشد، بطور یقین پاسخ های دو رهیافت ارائه شده که با حذف یک بعد و با استفاده از المانهای یک بعدی حاصل گردیده است دقت پایینتری نسبت به جوابهای Bathe [۱۲] خواهند داشت.

با وجود اینکه پاسخهای رهیافت دوم همراه با خطای بیشتری است ولی اجرای برنامه در این رهیافت نسبت به رهیافت اول - که آنها بر اساس المان یک بعدی فرمولبندی شده است - بیش از  $10$  برابر سریعتر است.

جدول ۲- مقایسه زمان اجرای برنامه در دو رهیافت

تعداد المان	تعداد گام نیرو	زمان اجرای رهیافت اول (ثانیه)	زمان اجرای رهیافت دوم (ثانیه)
۲۵	۱۰	۲۲/۰۳	۱/۶۷
۱۰۰	۱۰	۱۰۲/۲	۶/۰۷

شکل (۶) همگرایی روش المان محدود را بر حسب تعداد المانها نشان می‌دهد این نمودار برای رهیافت اول ترسیم شده است :



شکل ۶- همگرایی روش المان محدود

براساس شکل (۶) نمودارها پس از ۴ المان بر روی یکدیگر منطبق می‌باشند و این بدین معنی است که المان یک بعدی مرتبه ۲ برای چنین تحلیلهایی بسیار مناسب و توانمند عمل می‌کند. همین سرعت همگرایی برای رهیافت دوم نیز مانند رهیافت اول برقرار است.

اگرچه استفاده از توابع شکل مرتبه بالاتر نسبت به توابع شکل مرتبه ۲ منجر به همگرایی پاسخ‌ها با تعداد المانهای کمتر می‌گردد. اما میزان این بهبود در مقایسه با بهبود استفاده از توابع شکل درجه ۲ نسبت به توابع شکل خطی به مراتب کمتر خواهد بود.

#### ۴- جمع بندی

تحلیل رفتار غیرخطی هندسی تیر با دو نگاه کلاسیک و مکانیک محیط پیوسته مورد ارزیابی قرار گرفته است، در تحلیل براساس روابط مکانیک محیط پیوسته، بنیادی ترین پارامتر، گرادیان تغییر شکل می‌باشد که بطور پیوسته تصحیح شده و تمامی پارامترهای دیگر تحلیل به نوعی از آن حاصل می‌گردد، اما در روش دوم مفاهیم کلاسیک المان محدود حاکم است که در آن از روابط جابجایی- کرنش و کرنش-تنش، ماتریس‌های تحلیل حاصل می‌گردد. تیر در هر دو روش به صورت یک بعدی مدل‌سازی شده است، اما با وجود تحلیل براساس المانهای یک بعدی، پاسخهای ترسیم شده تغییر شکل‌های بزرگ تیر را با دقت مناسب بررسی می‌نماید. در رهیافت بر اساس روابط کلاسیک المان محدود، رابطه کرنش- جابجایی به عنوان ورودی اولیه ارائه می‌گردد اما در رهیافت بر اساس مکانیک محیط پیوسته رابطه سینماتیکی کرنش- جابجایی به کمک گرادیان تغییر شکل حاصل می‌شود. بطور کلی روش المان محدود بر اساس مکانیک محیط پیوسته روشی توانمند در تحلیل سازه‌هایی که تحت تغییر شکل‌های بزرگ قرار دارند و از شکل اولیه خود خارج می‌شوند می‌باشد. و این بدین علت است که در تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ براساس مکانیک محیط پیوسته برای همه اشکال مختلف سازه مانند تیر، استوانه، کره و ... ترمهای غیر خطی رابطه کرنش- جابجایی بدون هیچگونه فرضیه ساده کننده‌ای می‌تواند بصورت کامل حاصل شود.

## مراجع

- [1] Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., "*The Finite Element Method*", Fifth Edition, Vol. 2, Solid Mechanics, Butterworth-Heinemann, Oxford, (2000).
- [2] Crisfield, M.A., "*Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*", Vol. 2, Advanced Topics, John Wiley & Sons Ltd, New York, (1997).
- [3] Bathe, K.J., "*Finite Element Procedures*", Prentice-Hall, New York, (1996).
- [4] Wriggers, P., "*Nonlinear Finite Element Methods*", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2008).
- [5] Reddy, J.N., "*An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*", Oxford University Press, Oxford, (2004).
- [6] Wempner, G., "Finite Elements, Finite Rotations and Small Strains of Flexible Shells", *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 5, pp. 117-153, (1969).
- [7] Rankin, C., and Brogan, F.A., "An Element Independent Corotational Procedure for the Treatment of Large Rotations", *ASME Journal. Pressure Vessel Technology*, Vol. 108, pp. 165-174, (1986).
- [8] Dvorkin, E.N., Pantuso, D., and Repetto, A., "A Formulation of the MITC4 Shell Element for Finite Strain Elasto-plastic Analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 125, pp. 17-40, (1995).
- [9] Gruttmann, F., Sauer, R., and Wagner, W., "Theory and Numeric of Three-dimensional Beams with Elastoplastic Material Behavior", *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, pp. 1675-1702, (2000).
- [10] Romero, I., and Armero, F., "An Objective Finite Element Approximation of the Kinematics of Geometrically Exact Rods and its use in the Formulation of an Energy Momentum Conserving Scheme in Dynamics", *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, pp. 1683-1716, (2002).
- [11] Ehrlich, D., and Armero, F., "Finite Element Methods for the Analysis of Softening Plastic Hinges in Beams and Frames", *Computational Mechanics*, Vol. 35, No. 4, pp. 237-264, (2005).
- [12] Bathe, K.J., Ramm, E., and Wilson, E.L., "Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis", *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 353-386, (1975).

### فهرست نمادهای انگلیسی

سطح مقطع	: $A$
ماتریس ضریب الاستیک	: $D$
کرنش گرین	: $E$
مدول الاستیک	: $E_L$
ماتریس گرادیان تغییر شکل	: $F$
مدول برشی	: $G$
ممان اینرسی سطح	: $I$
انحنا	: $K$
ماتریس سفتی مماسی	: $K_T$
طول المان	: $l_e$
گشتاور خمشی	: $M$
نیروی محوری	: $N$
تابع شکل	: $N_I$
نیروی برشی	: $Q$
بردار نیروهای داخلی	: $R_I$
تنش دوم پیلا	: $S$
تنش منتهجه	: $\bar{S}$
بردار جابجایی	: $\bar{U}$
جابجایی محوری هر نقطه	: $U$
جابجایی محوری نقاط روی محور	: $u$
جابجایی عرضی هر نقطه	: $W$
جابجایی عرضی نقاط روی محور	: $w$
مکان اولیه	: $X$
مکان ثانویه	: $x$

### نمادهای یونانی

کرنش برشی	: $\gamma$
نمو	: $\delta$
کرنش محوری	: $\varepsilon$
نمو بردار جابجایی	: $\bar{\eta}$
دوران	: $\psi$
معیار همگرایی	: $\mathbf{G}$

**Abstract**

In this paper, nonlinear behavior of beam is studied assuming constant properties of material and using finite element method. For behavior investigation of beam, two approaches are represented; In the both of the approaches, the beam is modeled by one dimensional elements of second order: In the first approach that is according to continuum mechanics relationships, a Lagrangian strategy is imparted for analysis with using deformation gradient and determining the Green strain and in the second approach, another model is introduced using beam classic theories and by simplifying assumptions.