

خمش ناشی از تورم در هیدروژل دولایه: رهیافت

نیمه تحلیلی و عددی

محمدرضا بیات^۱

دانشجوی دکترا

آرش کارگر اصطهباناتی^۲

کارشناسی ارشد

مصطفی باغانی^۳

دانشیار

طراحی دقیق و کارآمد حسگرها و عملگرهای ساخته از شده از هیدروژل از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله یک روش نیمه تحلیلی برای حل مسئله خمش ناشی از تورم هیدروژل در سازه‌ی دولایه در شرایط کرنش صفحه‌ای ارائه می‌شود. سازه‌ی دولایه از هیدروژل و الاستومر تشکیل شده است. اتصال بین دو لایه به صورت ایده آل فرض شده است. همچنین، مسئله‌ی طرح شده به کمک ابزار اجزا محدود با بهره‌گیری از کد UHYPER در نرم افزار ABAQUS نیز شبیه‌سازی شده است. برای بررسی صحت و دقت روش نیمه تحلیلی ارائه شده چند مثال به کمک روش نیمه تحلیلی و اجزا محدود حل شده است. تطابق خوبی بین نتایج روش نیمه تحلیلی ارائه شده و روش اجزا محدود مشاهده می‌شود. تغییر شکل و توزیع تنش در لایه‌ها با پارامتر مواد مختلف، به کمک روش نیمه تحلیلی و اجزا محدود ارائه شده است. در نهایت، تاثیر چگالی اتصالات عرضی شبکه‌ی پلیمری لایه‌ی هیدروژل بر انحنا سازه‌ی دولایه بررسی شد.

DOI: 10.30506/ijmep.2020.78718.1355

واژه‌های راهنما: هیدروژل، سازه دولایه، خمش ناشی از تورم، حل نیمه تحلیلی، حل اجزا محدود.

۱-مقدمه

ژل ماده‌ای الاستیک است که در اثر جذب سیال پیرامونی، متورم می‌شود. هیدروژل‌ها یکی از انواع مهم و پرکاربرد ژل‌ها به شمار می‌روند. رفتار کلی ساختار حاصل در حالت متورم شده، شبیه جامدات نرم می‌باشد که می‌تواند بعد از تغییر شکل، شکل اولیه خود را بازیابد. هیدروژل‌ها می‌توانند هم‌زمان به‌عنوان حسگر و عملگر مورد استفاده قرار گیرند [۱]. همچنین این مواد کاربردهای فراوانی در پزشکی دارند [۲، ۳]. ساختارهای خودتاشوی^۴ دو یا چندلایه، یکی از کاربردهای دیگر هیدروژل‌ها است که در اثر تورم می‌توانند از خود عکس‌العمل نشان داده و هندسه خود را تغییر دهند [۴، ۵]. اساس کار این ساختارها خمش بر اساس تورم لایه‌ی هیدروژل است. به طور خاص، در عملگرها و حسگرهایی که بر پایه‌ی تورم ژل کار می‌کنند، شکل و اندازه‌ی سیستم به توزیع فضایی حلال در داخل ژل و مقدار جذب آن بستگی دارد.

^۱ دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران m.r.bayat@ut.ac.ir

^۲ کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران arash.kargar.est@ut.ac.ir

^۳ نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران baghani@ut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۶/۱۰/۱۵، تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۷/۱۴

به عنوان مثال، ورق‌های دوبعدی ژل می‌توانند پس از تورم به صورت سطوح منحنی درآیند [۸-۶]. همچنین ساختارهای دولایه که از یک لایه الاستومر و یک لایه ژل تشکیل شده‌اند، زمانی که در سیال قرار گرفته و متورم می‌شود دچار خمش ناشی از تورم لایه‌ی ژل می‌شوند [۹-۱۱]. موریاموتو و آشیدا [۱۲] با استفاده از استراتژی ارائه شده توسط ریولین [۱۳] و نیز تجزیه گرادیان تغییرشکل به دو بخش تورم همگن و خمش خالص که توسط لوکانتونیو و همکارانش [۱۴] نیز استفاده شده بود، تغییرشکل بزرگ خمش یک تیر دولایه‌ی هیدروژلی در پاسخ به دما را بررسی کردند. با توجه به این که تیر دولایه از یک لایه هیدروژل و یک لایه الاستومر تشکیل شده بود، مولفه تغییرشکل ناشی از تورم فقط متوجه لایه هیدروژل بوده و تورم به صورت یک بعدی در راستای ضخامت صورت گرفته است. عبداللهی و همکارانش [۹] خمش ناشی از تورم تیر دولایه متشکل از یک لایه هیدروژل حساس به دما و یک لایه الاستومر را در شرایط کرنش صفحه‌ای با استفاده از روش نیمه تحلیلی بررسی کرده و از حل عددی برای اعتبارسنجی نتایج استفاده کردند. به دنبال آن‌ها، اربابی و همکارانش [۱۵] حل نیمه تحلیلی مشابهی برای خمش ناشی از تورم تیر دولایه از جنس هیدروژل حساس به pH و الاستومر ارائه کردند. در نهایت، عبداللهی و همکارانش [۱۰] خمش ناشی از تورم را برای تیر سه لایه که دو لایه آن را هیدروژل حساس به دما تشکیل داده و یک لایه‌ی آن الاستومر است، با استفاده از حل نیمه تحلیلی بررسی کرده و نتایجشان را به کمک حل اجزا محدود اعتبارسنجی کردند. هانگ و همکارانش [۱۶] نفوذ در مواد الاستیک که با تغییر شکل‌های بزرگ همراه است را بررسی نمودند. این کار سرآغازی دوباره برای بررسی تغییرشکل بزرگ ژل‌ها با دیدگاه ترمودینامیک محیط‌های پیوسته است. آن‌ها در این مقاله با استفاده از دیدگاه پدیده‌شناختی مدلی را که سازگار با قانون دوم ترمودینامیک است، ارائه نمودند. آنها مدل خود را برای یک مساله یک‌بعدی ساده حل و نتایجی را بدون صحت‌گذاری ارائه کردند. ژائو و همکارانش [۱۷] با استفاده از این تئوری، همچنین مساله تورم ناهمگن یک هیدروژل کروی در حالت تعادلی را بررسی نمودند. هانگ و همکارانش [۱۸] نیز با استفاده از تئوری استخراج شده، حل تعادلی ناهمگن را با استفاده از نرم‌افزار ABAQUS انجام دادند. با الهام از کار هانگ و همکارانش [۱۶]، دودا و همکارانش [۱۹] مساله نفوذ سیال در یک ماده جامد را، با استفاده از روش حساب تغییرات تحلیل نمودند و یک مدل رفتاری برای تورم ژل‌ها در تغییرشکل‌های بزرگ ارائه کردند. در ادامه، چستر و اناند [۲۰]، رفتار تورمی ژل‌ها در تغییر شکل‌های بزرگ را بررسی و بر اساس ترمودینامیک محیط‌های پیوسته مدلی را ارائه نمودند. در این مقاله، یک روش نیمه تحلیلی برای بررسی تغییرشکل بزرگ خمشی سازه‌ی دولایه‌ی متشکل از هیدروژل PNIPAM و الاستومر در شرایط کرنش صفحه‌ای ارائه می‌شود. سازه در حالت اولیه به صورت صاف بوده و بر اثر تورم هیدروژل دچار خمش می‌شود. از یک تنسور گرادیان تغییرشکل برای نگاشت حالت اولیه به حالت نهایی بدون در نظر گرفتن حالت میانی مجازی، استفاده می‌شود. با توجه به جامعیت مدل هانگ و همکارانش [۱۶] و همچنین شباهت بسیار مدل‌های دیگر به این مدل، در این مقاله برای مدل‌سازی رفتار تورمی هیدروژل از این مدل استفاده می‌شود. همچنین با استفاده از کد UHYPER در نرم‌افزار ABAQUS سازه‌ی دو لایه به صورت عددی نیز تحلیل شده و از نتایج آن برای اعتبارسنجی نتایج حل نیمه تحلیلی استفاده می‌شود. تفاوت کار حاضر با کارهایی مانند مقاله‌ی موریاموتو و آشیدا [۱۲]، عدم تجزیه‌ی تنسور گرادیان جابجایی و همچنین صحت سنجی نتایج حاصل از حل نیمه تحلیلی با نتایج المان محدود می‌باشد.

لازم به توضیح است که در کارهای مشابه نتایج حاصل از حل نیمه تحلیلی صحت سنجی نشده بودند. ساختار کلی مقاله به این شرح است: در بخش ۲ مسئله تعریف شده و هندسه معرفی می‌شوند. همچنین سینماتیک تغییرشکل و معادلات مربوط به آن ارائه می‌شود. سپس تئوری تورم هیدروژل به صورت مختصر معرفی شده و معادلات سینماتیک شامل تنش و معادلات تعادل شرح داده می‌شود. سپس پارامترهای مسئله و دستگاه معادلات حاکم معرفی می‌شوند. پس از آن یک روش نیمه تحلیلی برای حل مسئله خمشی سازه‌ی دولایه ناشی از تورم هیدروژل ارائه می‌شود. در بخش ۳ یک مطالعه موردی برای نشان دادن قدرت و دقت روش ارائه شده در بخش ۲ انجام شده صحت نتایج به دست آمده با مقایسه با حل به کمک روش اجزا محدود بررسی می‌شود. پس از بحث بر روی نتایج به دست آمده، در نهایت در بخش ۴ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری انجام می‌شود.

۲- تغییرشکل خمشی ناشی از تورم

در این مقاله تغییرشکل خمشی سازه‌ی متشکل از دو لایه‌ی چسبیده به هم بررسی می‌شود. یک لایه از جنس الاستومر تراکم ناپذیر خنثی بوده (لایه‌ی شماره‌ی ۱) و لایه‌ی دیگر از جنس هیدروژل PNIPAM (لایه‌ی شماره‌ی ۲) است. شمای سازه‌ی دولایه در حالت‌های اولیه (صاف) و نهایی (خمیده) در شکل (۱) نشان داده شده است. تغییرشکل بزرگ خمشی سازه‌ی دولایه به دلیل نفوذ سیال در لایه‌ی هیدروژلی و متورم شدن این لایه رخ می‌دهد. ابعاد خارج از صفحه بینهایت فرض شده و در نتیجه مسئله به صورت کرنش صفحه‌ای مدل شده است. همچنین، فرض می‌شود که سطح مقطع سازه‌ی دولایه پس از تغییرشکل به صورت صفحه باقی می‌ماند و نیز از اثرات انتهای سازه در حل نیمه تحلیلی و عددی صرف نظر می‌شود. با معرفی مختصات کارتزین $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ به عنوان مختصات مرجع برای سازه‌ی دولایه، مختصات نقطه‌ی دلخواه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{X} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3, \quad (1)$$

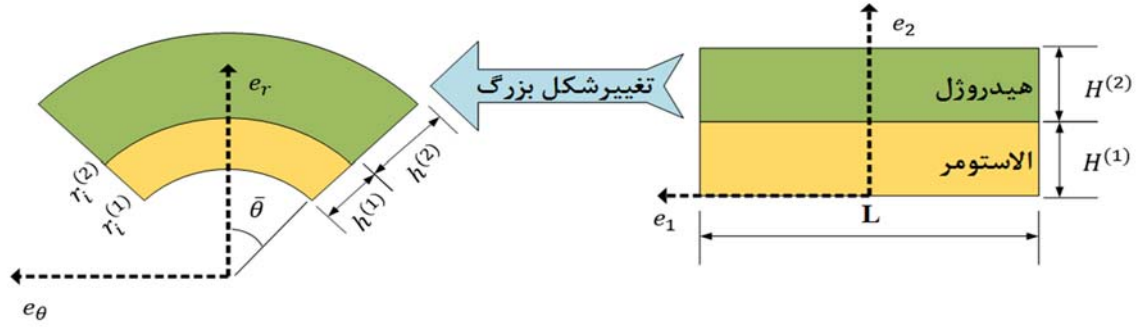
با در نظر گرفتن:

$$\begin{cases} X_1 \in [-L/2, L/2] \\ X_2 \in [0, H^{(1)} + H^{(2)}], \\ X_3 \in (-\infty, +\infty) \end{cases} \quad (2)$$

با در نظر گرفتن:

$$\begin{cases} r^{(1)} \in [r_i^{(1)}, r_i^{(1)} + h^{(1)}], r^{(2)} \in [r_i^{(2)}, r_i^{(2)} + h^{(2)}] \\ \theta^{(n)} \in [-\bar{\theta}, \bar{\theta}] \\ z^{(n)} \in (-\infty, +\infty) \end{cases}, \quad (3)$$

که در آن $\mathbf{e}_i$ ($i = r, \theta, z$) محورهای مختصات استوانه‌ای، $h^{(n)}$ و $r_i^{(n)}$ ضخامت و شعاع داخلی لایه‌ی n ام در حالت تغییرشکل یافته بوده و همچنین $r_i^{(2)} = r_i^{(1)} + h^{(1)}$ است.



شکل ۱- شماتیک هندسه سازهی دولایه‌ی الاستومر و هیدروژل در (الف) حالت اولیه و (ب) حالت نهایی

اگر فرض شود $\theta^{(n)} = \theta^{(n)}(X_1)$ ، $r^{(n)} = r^{(n)}(X_2)$ ، $z^{(n)} = X_3$ ، گرادیان تغییر شکل را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲۱]:

$$\mathbf{F}^{(n)} = \frac{dr^{(n)}(X_2)}{dX_2} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_2 + r^{(n)} \frac{d\theta^{(n)}}{dX_1} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_3. \quad (4)$$

که در آن علامت $\otimes$ نشان‌دهنده‌ی ضرب دیادیک است. همچنین کشش‌های اصلی را می‌توان به صورت زیر از معادله‌ی (۴) استخراج کرد:

$$\lambda_r^{(n)} = \frac{dr^{(n)}(X_2)}{dX_2}, \quad \lambda_\theta^{(n)} = r^{(n)} \frac{d\theta^{(n)}}{dX_1}, \quad \lambda_z^{(n)} = 1. \quad (5)$$

اگر برای مولفه‌ی مماسی کشش، توزیع خطی به صورت $\theta^{(n)} = 2\bar{\theta} X_1 / L$ فرض کنیم، کشش اصلی مماسی برای هر لایه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\lambda_\theta^{(n)} = \frac{2\bar{\theta}}{L} r^{(n)}(X_2). \quad (6)$$

با توجه به فرض تراکم‌ناپذیری لایه‌ی الاستومر، کشش اصلی در راستای شعاعی برای این لایه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lambda_r^{(1)} = \frac{L}{2\bar{\theta} r^{(1)}(X_2)}. \quad (7)$$

با تساوی کشش شعاعی در معادله‌ی (۷) با مقدار متناظر آن در معادله‌ی (۵) یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول با شرط مرزی $r^{(1)}(X_2=0) = r_i^{(1)}$ به دست می‌آید. با حل این معادله توزیع $r^{(1)}(X_2)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$r^{(1)}(X_2) = \sqrt{\frac{L}{\bar{\theta}} X_2 + \left(r_i^{(1)}\right)^2}, \quad (8)$$

که در آن $\bar{\theta}$ و $r_i^{(1)}$ مجهولات سینماتیکی هستند.

برای مدل‌سازی رفتار تورمی هیدروژل از تابع انرژی آزاد هلمهولتز^۱ که توسط هانگ و همکارانش [۱۶] ارائه شده، استفاده می‌شود. این تابع انرژی از دو بخش که ناشی از کشش شبکه‌ی پلیمری و مخلوط شدن حلال و پلیمر است، تشکیل می‌شود:

¹ Helmholtz

$$W(\mathbf{F}^{(2)}, C) = W_s(\mathbf{F}^{(2)}) + W_m(C), \quad (9)$$

که در آن $\mathbf{F}^{(2)}$ تنسور گرادیان تغییر شکل هیدروژل، C غلظت نامی مولکول‌های حلال، W_s و W_m به ترتیب انرژی ناشی از کشش شبکه‌ی پلیمری و مخلوط شدن حلال و پلیمر است. W_m و W_s به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$W_s(\mathbf{F}^{(2)}) = \frac{1}{2} NkT (I^{(2)} - 3 - 2 \log J^{(2)}), \quad (10)$$

$$W_m(C) = \frac{kT}{\nu} \left(\nu C \log \frac{\nu C}{1 + \nu C} + \frac{\chi \nu C}{1 + \nu C} \right), \quad (11)$$

که در آن $I^{(2)} = F_{ij} F_{ij}$ و $J^{(2)} = \det \mathbf{F}^{(2)}$ به ترتیب ناوردای اول و دترمینان تنسور گرادیان تغییر شکل است. همچنین N تعداد موثر زنجیره‌های شبکه پلیمری بر واحد حجم پلیمر خشک، T نشان‌دهنده‌ی دمای مطلق و χ پارامتر اندرکنش شبکه‌ی پلیمر و حلال است.

زمانی که هیدروژل متورم شده و به حالت تعادلی می‌رسد، پتانسیل شیمیایی داخل هیدروژل به صورت همگن برابر پتانسیل شیمیایی سیال پیرامون آن $\mu = \mu_0$ می‌شود. اما مولکول‌های حلال داخل هیدروژل لزوماً به صورت همگن توزیع نمی‌شوند. بنابراین بهتر است انرژی آزاد هیدروژل را به صورت تابعی از تنسور گرادیان تغییر شکل و پتانسیل شیمیایی بنویسیم. برای این منظور می‌توان از تبدیل لژاندر استفاده کرد، به عبارت دیگر:

$$\hat{W}(\mathbf{F}^{(2)}, \mu) = W(\mathbf{F}^{(2)}, \mu) - \mu C. \quad (12)$$

همچنین با توجه به این که حلال و شبکه پلیمری را می‌توان به صورت تراکم ناپذیر فرض کرد، تغییر شکل هیدروژل فقط ناشی از نفوذ مولکول‌های حلال است، بنابراین:

$$J^{(2)} = 1 + \nu C. \quad (13)$$

با استفاده از معادلات (۹)–(۱۲) انرژی آزاد تبدیل یافته به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \hat{W}(\mathbf{F}^{(2)}, \mu) = & \frac{1}{2} NkT (I^{(2)} - 3 - 2 \log J^{(2)}) \\ & + \frac{kT}{\nu} \left[(J^{(2)} - 1) \log \frac{J^{(2)} - 1}{J^{(2)}} + \frac{\chi (J^{(2)} - 1)}{J^{(2)}} \right] - \frac{\mu}{\nu} (J^{(2)} - 1). \end{aligned} \quad (14)$$

همچنین برای مدل‌سازی لایه‌ی الاستومر از مدل نتوهوکی^۱ استفاده می‌شود، تابع انرژی آزاد این مدل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$W^{(1)}(\mathbf{F}^{(1)}) = \frac{G^{(1)}}{2} (I_1^{(1)} - 3 - 2 \ln J^{(1)}) + \pi (\ln J^{(1)})^2 \quad (15)$$

که در آن $\mathbf{F}^{(1)}$ تنسور گرادیان تغییر شکل الاستومر، $G^{(1)}$ مدول برشی، $I_1^{(1)}$ و $J^{(1)}$ به ترتیب ناوردای اول تنسور تغییر شکل کوشی-گرین راست^۲ و دترمینان تنسور تغییر شکل لایه‌ی الاستومری است. همچنین π ضریب لاگرانژ است که نماینده‌ی فشار هیدرواستاتیک می‌باشد.

^۱ Neo-Hookean

^۲ Right Cauchy-Green deformation tensor

تنش کوشی اصلی برای لایه الاستومر ($n=1$) به عنوان یک لایه ی تراکم ناپذیر ($J^{(1)}=1$) و همچنین برای لایه ی هیدروژل ($n=2$) با استفاده از تابع انرژی آزاد به صورت زیر به دست می آید [۲۲]:

$$\sigma_j^{(1)} = \lambda_j^{(1)} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \lambda_j^{(1)}} - \pi, \quad (j=1,2,3), \quad (16)$$

$$\sigma_j^{(2)} = \lambda_j^{(2)} \frac{\partial W^{(2)}}{\partial \lambda_j^{(2)}}, \quad (j=1,2,3). \quad (17)$$

تابع انرژی آزاد هیدروژل (معادله ی (۱۴)) در حالت خشک ($\nu C=0$) تکین^۱ است. این تکینگی باعث ایجاد مشکل در حل عددی خواهد شد. برای رفع این مشکل حالت اولیه را هیدروژل متورم شده در حلال با پتانسیل شیمیایی مشخص ($\mu=\mu_0$) بدون حضور نیروهای مکانیکی در نظر می گیریم. در این حالت هیدروژل نسبت به حالت خشک به صورت همسانگرد متورم می شود به عبارت دیگر $\lambda_1^{(2)}=\lambda_2^{(2)}=\lambda_3^{(2)}=\lambda_0$. واضح است که تنش در این حالت صفر است، بنابراین با برابر صفر قرار دادن معادله ی (۱۷) در دمای ثابت مقدار λ_0 به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$N\nu \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_0^3} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\lambda_0^3} \right) + \frac{1}{\lambda_0^3} + \frac{\chi}{\lambda_0^6} = \frac{\mu_0}{kT}. \quad (18)$$

فرض می شود که لایه ی الاستومر و هیدروژل در حالت اولیه به صورت ایده آل چسبیده اند و هیچ تنشی را تحمل نمی کنند. بنابراین باید انرژی آزاد هلمهولتز در این حالت اصلاح شود، برای این کار تمام $\lambda_i^{(2)}$ در معادله ی (۱۴) با $\lambda_0 \lambda_i^{(2)}$ جایگزین شده و انرژی آزاد بر λ_0^3 تقسیم می شود [۱۸]. همچنین برای نوشتن کد UHYPER در نرم افزار ABAQUS از انرژی آزاد اصلاح شده استفاده می شود.

با توجه به تقارن مسئله، تغییراتی در راستای مماسی وجود ندارد ($\partial \sigma_r^{(n)} / \partial \theta = 0$) بنابراین معادله ی تعادل در مختصات استوانه ای برای هر لایه به صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{\partial \sigma_r^{(n)} / \partial X_2}{\partial r^{(n)}(X_2) / \partial X_2} + \frac{\sigma_r^{(n)} - \sigma_\theta^{(n)}}{r^{(n)}(X_2)} = 0 \quad (19)$$

برای لایه ی الاستومر با استفاده از معادلات (۸) و (۱۶) و جایگذاری در معادله ی (۱۹) و انتگرال گیری، تنش در راستای شعاعی به صورت تابعی از X_2 به صورت زیر به دست می آید:

$$\sigma_r^{(1)}(X_2) = \int - \frac{\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}}{r^{(1)}(X_2)} \frac{dr^{(1)}(X_2)}{dX_2} dX_2 + c_1, \quad (20)$$

که در آن c_1 ثابت انتگرال گیری بوده که از شرط تنش شعاعی صفر در شعاع داخلی لایه ی الاستومر ($\sigma_r^{(1)}=0 @ r^{(1)}(0)=r_i^{(1)}$) قابل محاسبه است. بنابراین تنش های اصلی کوشی برای لایه ی الاستومر به صورت زیر به دست می آیند:

¹ Singular

$$\sigma_r^{(1)}(X_2) = -\frac{1}{8} \frac{G^{(1)} \left[-16(r_i^{(1)})^4 \bar{\theta}^4 - 16LX_2 (r_i^{(1)})^2 \bar{\theta}^3 + L^4 \right] X_2}{\bar{\theta}^2 L \left[(r_i^{(1)})^2 \bar{\theta} + LX_2 \right] (r_i^{(1)})^2} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(1)}(X_2) = & -G^{(1)} \left[-32(r_i^{(1)})^6 \bar{\theta}^5 - 80LX_2 (r_i^{(1)})^4 \bar{\theta}^4 \right. \\ & \left. - 48L^2 X_2^2 (r_i^{(1)})^2 \bar{\theta}^3 + 2L^4 (r_i^{(1)})^2 \bar{\theta} + L^5 X_2 \right] / \\ & 8\bar{\theta}^2 \left[(r_i^{(1)})^2 \bar{\theta} + LX_2 \right] L^2 (r_i^{(1)})^2 \end{aligned} \quad (22)$$

برای لایه‌ی هیدروژل پس از جایگذاری کشش‌های اصلی (معادله‌ی (۵)) در معادله‌ی (۱۷) و جایگذاری تنش‌های به دست آمده در معادله‌ی (۱۹)، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به دست می‌آید. شرایط مرزی مناسب برای معادله دیفرانسیل عبارتند از:

شرط تنش شعاعی صفر در شعاع بیرونی سازه‌ی دولایه $(\sigma_r^{(2)}(X_2 = H^{(1)} + H^{(2)}) = 0)$ و پیوستگی میدان تنش در مرز بین دو لایه $(\sigma_r^{(1)}(X_2 = H^{(1)}) = \sigma_r^{(2)}(X_2 = H^{(1)}))$. با توجه به خمش آزاد سازه، نیرو و گشتاور برآیند در راستای مماسی در هر سطح مقطع برابر صفر است. بنابراین داریم:

$$\int_0^{H^{(1)}} \sigma_\theta^{(1)}(X_2) \frac{dr^{(1)}(X_2)}{dX_2} dX_2 + \int_{H^{(1)}}^{H^{(1)}+H^{(2)}} \sigma_\theta^{(2)}(X_2) \frac{dr^{(2)}(X_2)}{dX_2} dX_2 = 0 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{H^{(1)}} r^{(1)}(X_2) \sigma_\theta^{(1)}(X_2) \frac{dr^{(1)}(X_2)}{dX_2} dX_2 \\ + \int_{H^{(1)}}^{H^{(1)}+H^{(2)}} r^{(2)}(X_2) \sigma_\theta^{(2)}(X_2) \frac{dr^{(2)}(X_2)}{dX_2} dX_2 = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

اکنون معادلات حاکم بر مسئله به دست آمده‌اند و باید روشی مناسب برای حل آن‌ها اتخاذ شود. روش حل به این ترتیب است که ابتدا یک حدس اولیه برای شعاع انحنا و زاویه‌ی خمش $(\bar{\theta} \text{ و } r_i^{(1)})$ در نظر گرفته می‌شود، سپس با استفاده از مقادیر حدس زده شده معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم (۱۹) به صورت عددی حل می‌شود تا تابع $r^{(2)}(X_2)$ به دست آید. در نهایت با جایگذاری $r^{(1)}(X_2)$ از معادله‌ی (۸) و $r^{(2)}(X_2)$ در معادلات (۲۳) و (۲۴) و حل آن‌ها به کمک روش نیوتن-رافسون مقادیر جدیدی برای $\bar{\theta}$ و $r_i^{(1)}$ به دست می‌آید. مقادیر جدید به دست آمده دوباره به عنوان حدس اولیه برای حل معادله دیفرانسیل (۱۹) استفاده می‌شود. این رویه تا زمانی که یک همگرایی مناسب برای مقادیر $\bar{\theta}$ و $r_i^{(1)}$ به دست آید، ادامه پیدا می‌کند.

۳- نتایج و بحث

در این بخش دقت و صحت روش ارائه شده در بخش پیشین برای خمش ناشی از تورم سازه‌ی دولایه‌ی هیدروژلی با ارائه چند مثال عددی بررسی می‌شود. سیال پیرامون هیدروژل آب در نظر گرفته می‌شود. حجم

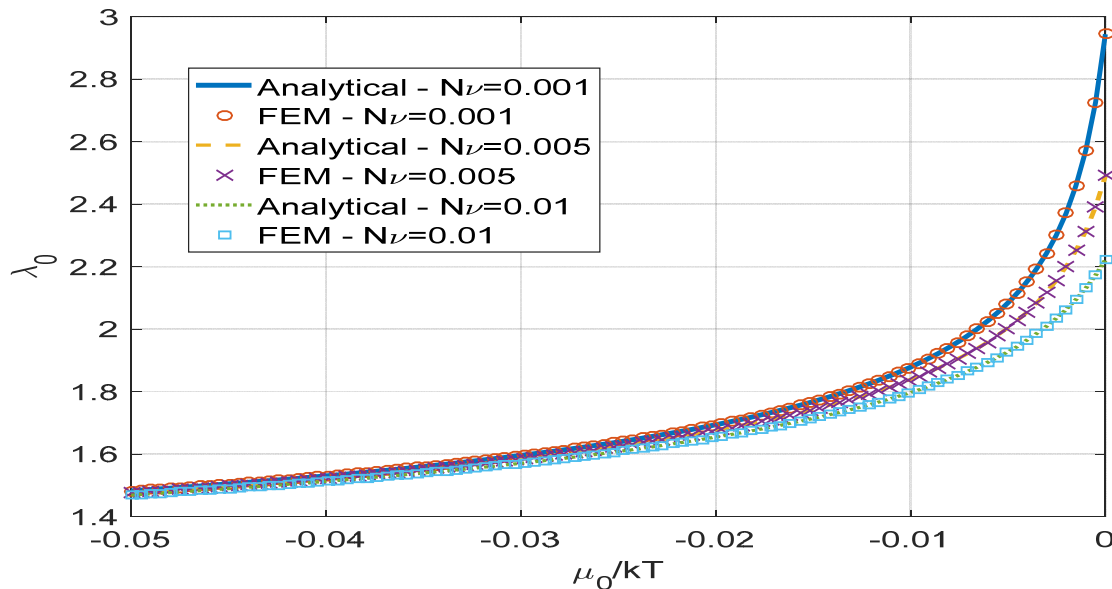
یک مولکول آب $\nu = 10^{-28} \text{ m}^3$ در نظر گرفته می‌شود [۱۸]. پارامترهای هیدروژل مورد استفاده در دمای اتاق $kT = 4 \times 10^{-21} \text{ J}$ و $kT/\nu = 4 \times 10^7 \text{ Pa}$ همچنین $N\nu = 0.001 \sim 0.01$ و $\chi = 0.1$ است [۱۸]. مدول برشی لایه‌ی الاستومر $G^{(1)} = 2 \text{ MPa}$ فرض می‌شود. پتانسیل شیمیایی حلال $\mu_0/kT = -0.05$ در نظر گرفته می‌شود. با توجه به این که در راستای مماسی گرادیان وجود ندارد، تمامی نتایج به جز زاویه‌ی خمش ($\bar{\theta}$) مستقل از نسبت طول به ضخامت (L/H) هستند [۲۳]. همچنین برای مقایسه بهتر نتایج، پتانسیل شیمیایی به کمک kT و تنش به وسیله‌ی kT/ν بی بعد شده‌اند. نخست، رابطه‌ی بین کشش (λ_0) ناشی از تورم آزاد هیدروژل PNIPAM با پتانسیل شیمیایی (μ_0/kT) به کمک روش نیمه تحلیلی و اجزا محدود (FEM) بررسی می‌شود. برای حل عددی از نرم‌افزار تجاری آباکوس^۱ استفاده شده است.

برای این کار مکعبی از هیدروژل که می‌تواند آزادانه در تمام جهات متورم شده ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$) و از حالت اولیه به حالت نهایی برسد، در نظر گرفته می‌شود. برای حل اجزا محدود از المان مکعبی با ۸ گره استفاده شده و یک نقطه از مکعب برای جلوگیری از حرکت صلب مقید شده است، ولی به مکعب اجازه دارد آزادانه در تمام جهات متورم شود. هیدروژل در حل عددی به صورت ماده هایپرالاستیک در نظر گرفته شده و برای مدل‌سازی تابع انرژی ذکر شده در بخش قبل از سابروتین UHYPER استفاده شده است. لازم به توضیح است پتانسیل شیمیایی در نرم‌افزار آباکوس به صورت میدان اولیه‌ی دمایی اعمال شده و در سابروتین UHYPER دما به عنوان پتانسیل شیمیایی در نظر گرفته می‌شود. همچنین برای محاسبه کشش ناشی از تورم آزاد به صورت نیمه تحلیلی، معادله‌ی (۱۸) به صورت ضمنی حل شده است. مقدار کشش ناشی از تورم برای مقادیر مختلف $N\nu$ به صورت تابعی از پتانسیل شیمیایی محاسبه شده و در شکل (۲) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج حاصل از روش نیمه تحلیلی و اجزا محدود وجود دارد.

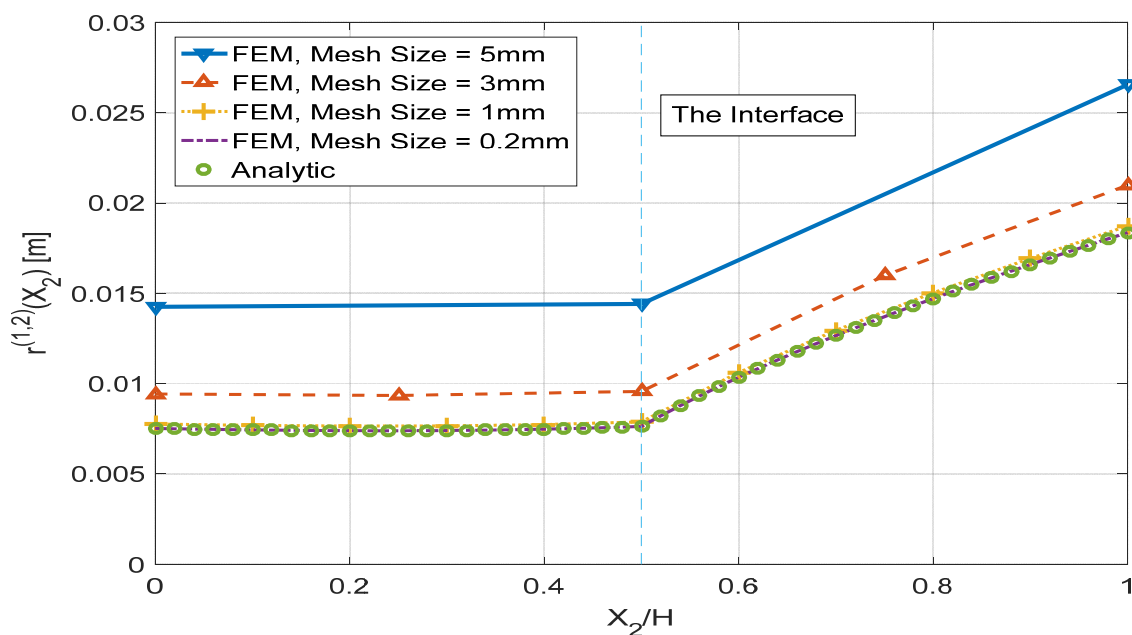
پارامتر $N\nu$ چگالی اتصالات عرضی^۲ در شبکه پلیمری را نشان می‌دهد، هر چقدر این پارامتر بیش‌تر باشد شبکه‌ی پلیمری صلب‌تر خواهد بود. این پدیده به خوبی در شکل (۲) نشان داده شده، به طوری که با افزایش $N\nu$ مقدار کشش ناشی از تورم آزاد کاهش یافته است. در مرحله بعد، تغییرشکل بزرگ خمشی ناشی از تورم سازه‌ی دولایه‌ی نشان داده شده در شکل (۱) به دو روش نیمه تحلیلی و اجزا محدود بررسی می‌شود. برای این کار طول سازه ۳ سانتی‌متر و ضخامت آن ۱ سانتی‌متر (ضخامت الاستومر ۰/۵ سانتی‌متر) در نظر گرفته می‌شود. برای مدل‌سازی الاستومر از مدل نئوهوکین استفاده می‌شود. اتصال بین لایه‌ی الاستومر و هیدروژل چسبی فرض شده است. برای دقت سنجی روش المان محدود، می‌بایست آنالیز حساسیت به اندازه‌ی مش انجام شود. برای این منظور توزیع شعاع سازه‌ی دولایه، به روش المان محدود با اندازه‌ی مش‌های مختلف محاسبه شده و با نتیجه به دست آمده از روش نیمه تحلیلی مقایسه شده است (شکل (۳)). در شکل (۴) توزیع شعاع $r^{(1,2)}(X_2)$ سازه‌ی دولایه‌ی با سه نوع هیدروژل با $N\nu$ های مختلف ($N\nu = 0.001, 0.005, 0.01$) که از روش تحلیل و اجزا محدود به دست آمده، در راستای ضخامت سازه‌ی دولایه رسم شده است.

^۱ Abaqus^۲ Cross link

همان طور که مشاهده می شود تطابق خوبی بین نتایج نیمه تحلیلی و اجزا محدود وجود دارد. از آن جایی که $r^{(1,2)}(X_2)$ مستقل از نسبت طول به ضخامت است، مقدار X_2 فقط به کمک ضخامت دولایه (H) بی بعد شده است. با توجه به این که با کاهش چگالی اتصالات عرضی (N_V) در شبکه ی پلیمری لایه ی هیدروژلی، از صلبیت هیدروژل کاسته می شود، میزان تورم آن افزایش می یابد. این امر موجب می شود که با کاهش چگالی اتصالات عرضی شیب نمودار توزیع شعاع در لایه ی هیدروژلی افزایش یابد.

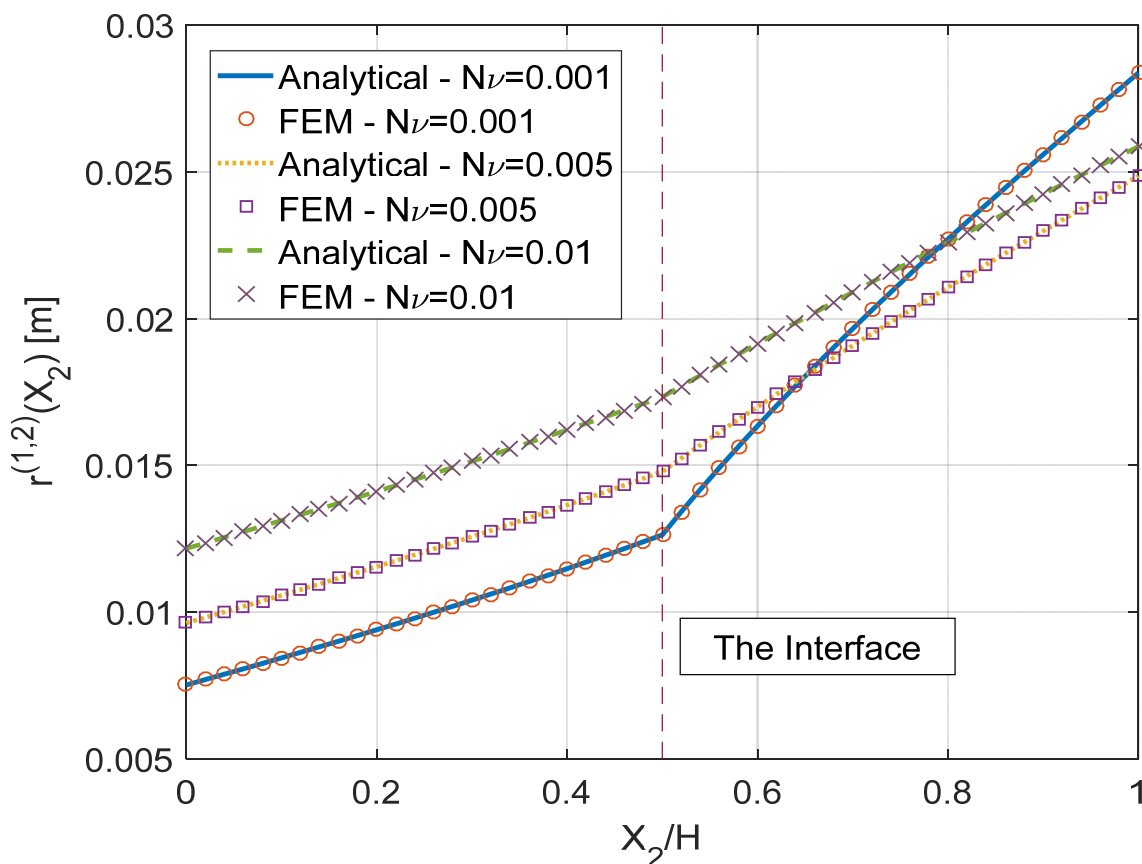


شکل ۲- کشش ناشی از تورم آزاد سه نوع هیدروژل به صورت تابعی از پتانسیل شیمیایی به دست آمده از حل نیمه تحلیلی و اجزا محدود (FEM) رسم شده است.



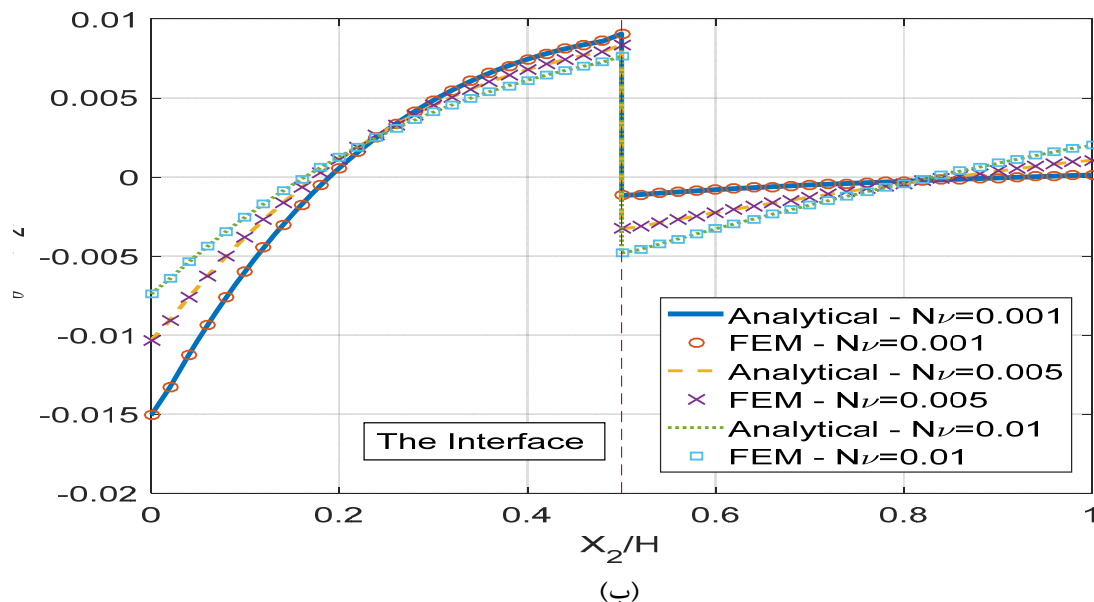
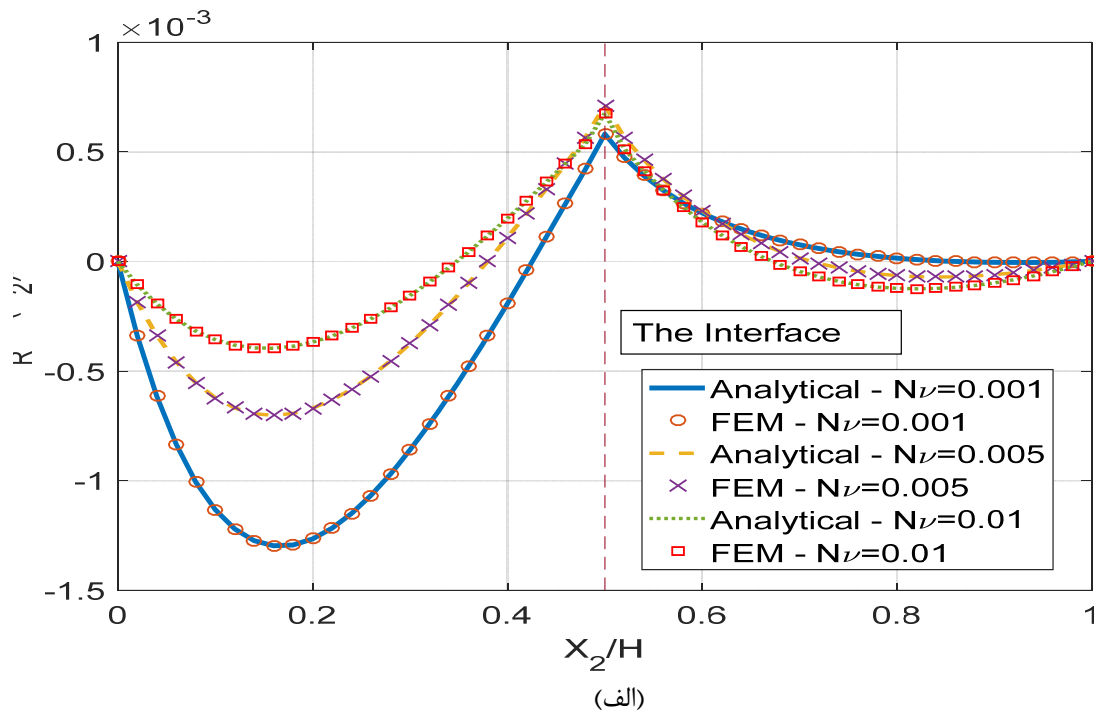
شکل ۳- توزیع شعاع سازه ی دولایه، به روش المان محدود با اندازه مش های مختلف و روش نیمه تحلیلی، جهت دقت سنجی روش المان محدود

اما شیب توزیع شعاع خمش در لایه‌ی الاستومری مستقل از مقدار $N\nu$ است، ولی مقدار شعاع با افزایش $N\nu$ افزایش می‌یابد، زیرا با افزایش $N\nu$ صلبیت هیدروژل افزایش یافته و نیروی بیشتری به الاستومر وارد شده و این امر موجب تغییر حجم بیش الاستومر می‌شود. همچنین با توجه به ناپیوستگی ماده در محل اتصال هیدروژل به الاستومر، برای تمام مقادیر $N\nu$ شکستگی در محل اتصال به چشم می‌خورد. برای بررسی بیش‌تر مسئله، توزیع تنش‌های بی‌بعد شعاعی و مماسی در راستای ضخامت دولایه برای مقادیر $N\nu = 0.001, 0.005, 0.01$ به دو روش نیمه تحلیلی و اجزا محدود محاسبه شده و در شکل (۵) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج نیمه تحلیلی و اجزا محدود وجود دارد. در لایه‌ی هیدروژل برای مقادیر پایین $N\nu$ مقدار تنش شعاعی و مماسی کم است، زیرا مقدار چگالی اتصالات عرضی در هیدروژل کم بوده و در نتیجه صلبیت هیدروژل کم است. مقدار تنش بیشینه در لایه‌ی هیدروژل در مرز بین دو لایه به دلیل اتصال ایده‌آل هیدروژل با الاستومر اتفاق می‌افتد. همچنین در هیدروژل‌های با مقدار $N\nu$ پایین تنش بیشینه‌ی بیشتری در لایه‌ی الاستومر مربوطه به وجود آمده است، زیرا وقتی مقدار $N\nu$ در هیدروژل کم باشد هیدروژل بیش‌تر می‌تواند متورم شود و در نتیجه گشتاور خمشی بیش‌تری به لایه‌ی الاستومر در وارد می‌شود. بنابراین افزایش مقدار $N\nu$ باعث افزایش تنش در لایه‌ی هیدروژل و کاهش آن در لایه‌ی الاستومر می‌شود.



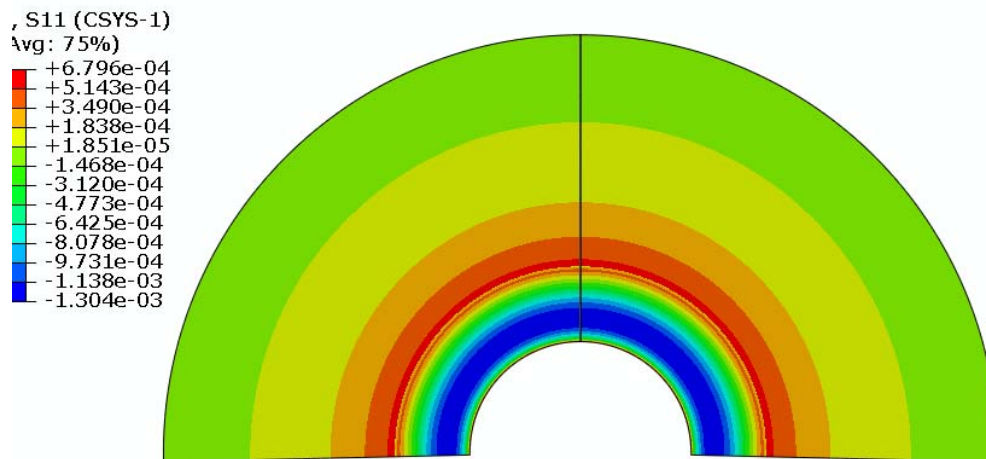
شکل ۴- نتایج نیمه تحلیلی و اجزا محدود برای توزیع شعاع سازه‌ی دولایه با سه نوع هیدروژل با $N\nu$ های متفاوت

علاوه بر این مشاهده می‌شود که در هر لایه یک محور خنثی وجود دارد و برای لایه‌ی هیدروژلی این محور برای تمامی مقادیر $N\nu$ یکسان است. قابل ذکر است که تعداد و محل محورهای خنثی می‌تواند با توجه به هندسه و سختی لایه‌ها تغییر کند [۲۳]. مقدار تنش مماسی در مرز بین دو لایه مختلف‌العلامه است که برش به وجود آمده بین دولایه را نشان می‌دهد. برای شفافیت بیشتر کانتور تنش‌های به دست آمده از حل اجزا محدود برای حالت $N\nu = 0.001$ در شکل (۶) نشان داده شده است.

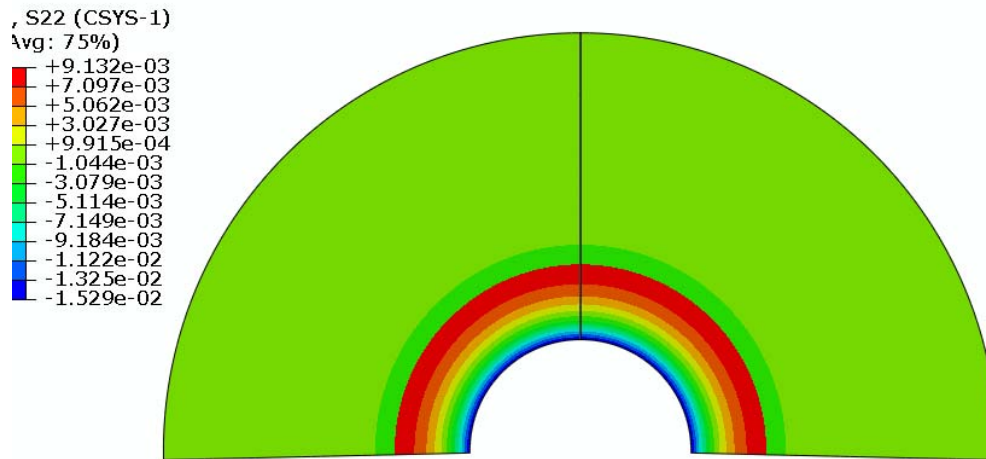


شکل ۵- توزیع تنش (الف) شعاعی و (ب) مماسی در راستای ضخامت دولایه به دست آمده از روش نیمه تحلیلی

و اجزا محدود برای $N\nu = 0.001, 0.005, 0.01$



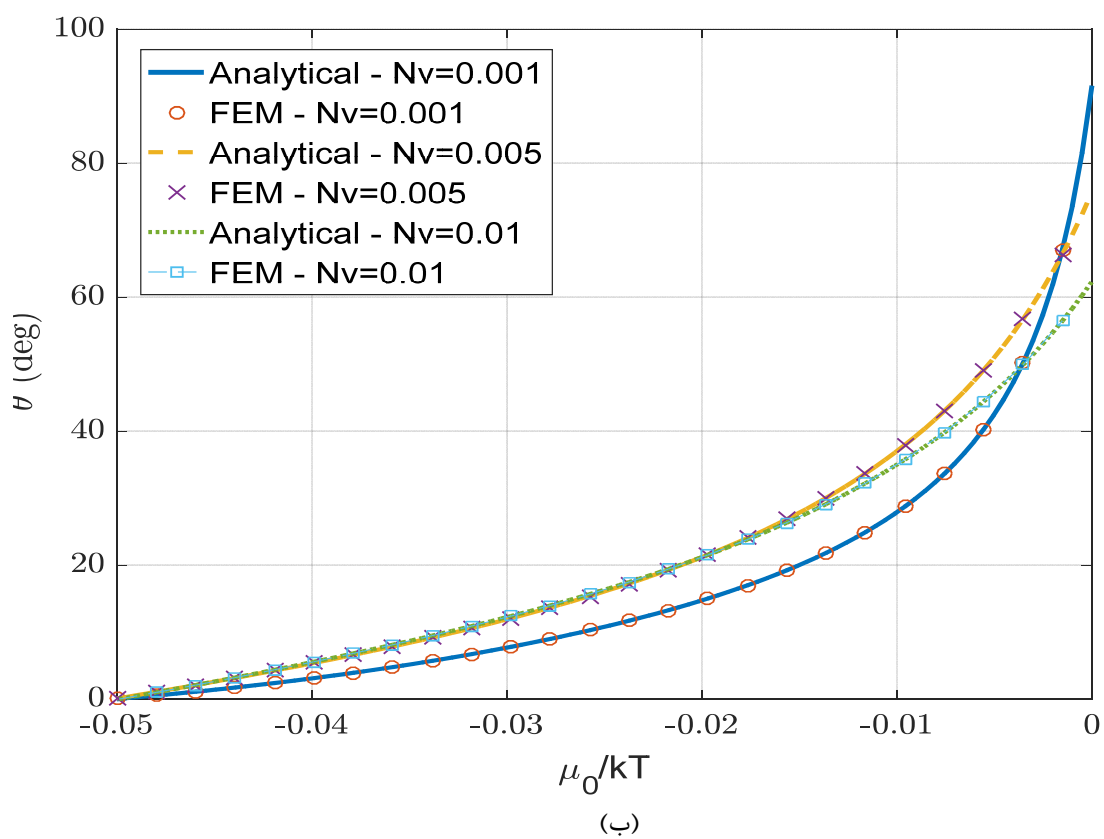
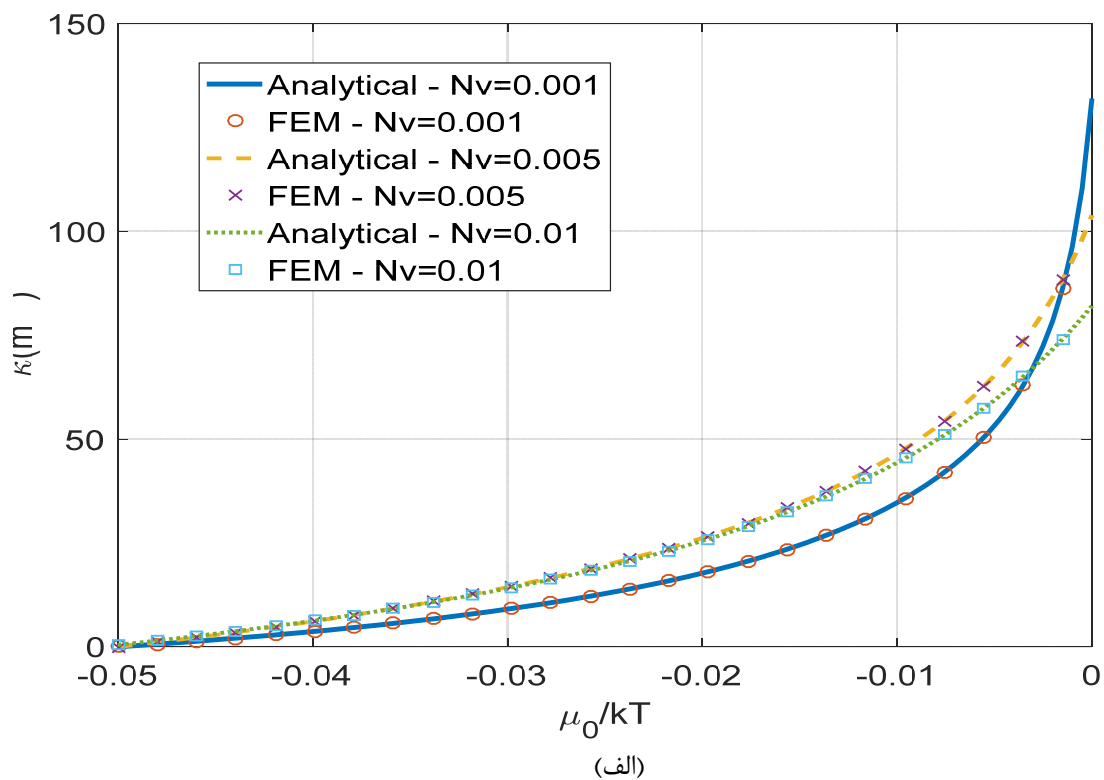
(الف)



(ب)

شکل ۶- کانتور تنش (الف) شعاعی و (ب) مماسی برای دولایه با هیدروژل $Nv = 0.001$

یکی از موارد مهم در طراحی سازه‌های دولایه انحنا و زاویه‌ی خمش ($\bar{\theta}$) است که میزان تغییر شکل سازه‌ی دولایه را نشان می‌دهد. به همین دلیل انحنا و زاویه‌ی داخلی ($\kappa = 1/r_i^{(l)}$) و زاویه خمش سازه‌ی دولایه برای هیدروژل با $Nv = 0.001, 0.005, 0.01$ به صورت تابعی از پتانسیل شیمیایی به کمک روش تحلیل ارائه شده و روش اجزا محدود محاسبه شده و در شکل (۷) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش مقدار پتانسیل شیمیایی مقدار انحنا و زاویه خمش به دلیل تورم لایه‌ی هیدروژل افزایش می‌یابند. سازه‌ی دولایه با هیدروژل نرم‌تر ($Nv = 0.001$) به دلیل تورم بیش‌تر انحنا و زاویه‌ی خمش بیش‌تری را تجربه می‌کند. همچنین تطابق خوب بین نتایج اجزا محدود و حل نیمه تحلیلی، صحت روش تحلیل ارائه شده را به خوبی نشان می‌دهد.



شکل ۷- (الف) انحنا و (ب) زاویه‌ی خمشی سازه دولایه با سه نوع هیدروژل با $Nv = 0.001, 0.005, 0.01$

به دست آمده به کمک روش نیمه تحلیلی و اجزا محدود

۴-نتیجه گیری

در این مقاله یک روش نیمه تحلیلی برای تغییرشکل خمشی ناشی از تورم سازه‌ی دولایه متشکل از هیدروژل و الاستومر در شرایط کرنش صفحه‌ای ارائه شد. در اثر نفوذ حلال در هیدروژل و متورم شدن آن، سازه‌ی دولایه دچار خمش می‌شود. با در نظر گرفتن چگالی انرژی آزاد برای هیدروژل و مدل نئوهوکین برای الاستومر و اعمال معادله‌ی تعادل برای سازه، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله به دست آمدند. معادلات حاکم به کمک روش‌های عددی حل شدند. همچنین برای صحت سنجی روش نیمه تحلیلی ارائه شده، به کمک کد UHYPER نرم‌افزار ABAQUS مسئله به روش اجزا محدود نیز حل شد. نتایج روش نیمه تحلیلی و اجزا محدود تطابق خوبی داشتند. همچنین تاثیر چگالی اتصالات عرضی در شبکه‌ی پلیمری هیدروژل بر میدان جابجایی و تنش‌های به وجود آمده در سازه بررسی شدند. با کاهش چگالی اتصالات عرضی صلبیت هیدروژل کاهش یافته و در نتیجه میزان تورم آن افزایش می‌یابد، که این امر به نوبه‌ی خود باعث افزایش میزان انحنا و زاویه‌ی خمش سازه می‌شود. روش ارائه شده در مقاله‌ی حاضر برای طراحی سازه‌های دولایه به عنوان حسگر، عملگر سازه‌های خودتاشو و رهایش دارو مناسب بوده و پیشنهاد می‌شود.

مراجع

- [1] Randhawa, J.S., Laffin, K.E., Seelam, N., and Gracias, D.H., "Microchemomechanical Systems", *Advanced Functional Materials*, Vol. 21, No. 13, pp. 2395-2410, (2011).
- [2] Afrasiabi Garekani, H., Dolatabadi, R., Akhgari, A., Abbaspour, M.R., and Sadeghi, F., "Evaluation of Ethylcellulose and Its Pseudolatex (Surelease) in Preparation of Matrix Pellets of Theophylline using Extrusion-spheronization", *Iranian Journal of Basic Medical Sciences*, Vol. 20, No. 1, pp. 9-16, (2017).
- [3] Baghani, A., Mesdaghinia, A., Rafieiyan, M., Soltan Dallal, M.M., and Douraghi, M., "Tetracycline and Ciprofloxacin Multiresidues in Beef and Chicken Meat Samples using Indirect Competitive ELISA", *Journal of Immunoassay and Immunochemistry*, Vol. 40, No. 3, pp. 328-342, (2019).
- [4] Ionov, L., "Soft Microorigami: Self-folding Polymer Films", *Soft Matter*, Vol. 7, No. 15, pp. 6786-6791, (2011).
- [5] Ionov, L., "Biomimetic 3D Self-assembling Biomicroconstructs by Spontaneous Deformation of Thin Polymer Films", *Journal of Materials Chemistry*, Vol. 22, No. 37, pp. 19366-19375, (2012).
- [6] Byun, M., Santangelo, C.D., and Hayward, R.C., "Swelling-driven Rolling and Anisotropic Expansion of Striped Gel Sheets", *Soft Matter*, Vol. 9, No. 34, pp. 8264-8273, (2013).
- [7] Kim, J., Hanna, J.A., Hayward, R.C., and Santangelo, C.D., "Thermally Responsive Rolling of Thin Gel Strips with Discrete Variations in Swelling", *Soft Matter*, Vol. 8, No. 8, pp. 2375-2381, (2012).

- [8] Wu, Z.L., Moshe, M., Greener, J., Therien-Aubin, H., Nie, Z., Sharon, E., and Kumacheva, E., "Three-dimensional Shape Transformations of Hydrogel Sheets Induced by Small-scale Modulation of Internal Stresses", *Nature Communications*, Vol. 4, (2013).
- [9] Abdolahi, J., Baghani, M., Arbabi, N., and Mazaheri, H., "Analytical and Numerical Analysis of Swelling-induced Large Bending of Thermally-activated Hydrogel Bilayers", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 99, pp. 1-11, (2016).
- [10] Abdolahi, J., Baghani, M., Arbabi, N., and Mazaheri, H., "Finite Bending of a Temperature-sensitive Hydrogel Tri-layer: An Analytical and Finite Element Analysis", *Composite Structures*, Vol. 164, pp. 219-228, (2017).
- [11] Arbabi, N., Baghani, M., Abdolahi, J., Mazaheri, H., and Mosavi Mashadi, M., "Finite Bending of Bilayer pH-responsive Hydrogels: A Novel Analytic Method and Finite Element Analysis", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 110, pp. 116-123, (2017).
- [12] Morimoto, T., and Ashida, F., "Temperature-responsive Bending of a Bilayer Gel", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 56, pp. 20-28, (2015).
- [13] Rivlin, R.S., "Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, V. The Problem of Flexure", *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. 195, No. 1043, pp. 463-473, (1949).
- [14] Lucantonio, A., Nardinocchi, P., and Pezzulla, M., "Swelling-induced and Controlled Curving in Layered Gel Beams", *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 470, No. 2171, (2014).
- [15] Arbabi, N., Baghani, M., Abdolahi, J., Mazaheri, H., and Mashhadi, M.M., "Finite Bending of Bilayer pH-responsive Hydrogels: A Novel Analytic Method and Finite Element Analysis", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 110, pp. 116-123, (2017).
- [16] Hong, W., Zhao, X., Zhou, J., and Suo, Z., "A Theory of Coupled Diffusion and Large Deformation in Polymeric Gels", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 56, No. 5, pp. 1779-1793, (2008).
- [17] Zhao, X., Hong, W., and Suo, Z., "Inhomogeneous and Anisotropic Equilibrium State of a Swollen Hydrogel Containing a Hard Core", *Applied Physics Letters*, Vol. 92, No. 5, pp. 051904, (2008).
- [18] Hong, W., Liu, Z., and Suo, Z., "Inhomogeneous Swelling of a Gel in Equilibrium with a Solvent and Mechanical Load", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, No. 17, pp. 3282-3289, (2009).
- [19] Duda, F.P., Souza, A.C., and Fried, E., "A Theory for Species Migration in a Finitely Strained Solid with Application to Polymer Network Swelling", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 58, No. 4, pp. 515-529, (2010).
- [20] Chester, S.A., and Anand, L., "A Coupled Theory of Fluid Permeation and Large Deformations for Elastomeric Materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 58, No. 11, pp. 1879-1906, (2010).

- [21] Roccabianca, S., Gei, M., and Bigoni, D., "Plane Strain Bifurcations of Elastic Layered Structures Subject to Finite Bending: Theory Versus Experiments", IMA Journal of Applied Mathematics, Vol. 75, No. 4, pp. 525-548, (2010).
- [22] Cai, S., and Suo, Z., "Mechanics and Chemical Thermodynamics of Phase Transition in Temperature-sensitive Hydrogels", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 59, No. 11, pp. 2259-2278, (2011).
- [23] Morimoto, T., and Ashida, F., "Temperature-responsive Bending of a Bilayer Gel", International Journal of Solids and Structures, Vol. 56-57, pp. 20-28, (2015).

فهرست نمادهای انگلیسی

غلظت نامی مولکول‌های حلال	C
ثابت انتگرال‌گیری	c_1
محورهای مختصات کارتزین در حالت اولیه	$\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$
محورهای مختصات استوانه‌ای در حالت تغییرشکل یافته	$\mathbf{e}_i (i = r, \theta, z)$
تنسور گرادیان تغییرشکل لایه‌ی nام	$\mathbf{F}^{(n)}$
مدول برشی الاستومر	$G^{(1)}$
ضخامت لایه‌ی nام در حالت اولیه	$H^{(n)}$
ضخامت لایه‌ی nام در حالت تغییرشکل یافته	$h^{(n)}$
ناوردای اول تنسور گرادیان تغییرشکل لایه‌ی nام	$I^{(n)}$
ناوردای اول تنسور تغییرشکل کوشی-گرین راست	$I_1^{(n)}$
دترمینان تنسور گرادیان تغییرشکل لایه‌ی nام	$J^{(n)}$
طول دولایه در حالت اولیه	L
تعداد موثر زنجیره‌های شبکه پلیمری بر واحد حجم پلیمر خشک	N
شعاع داخلی لایه‌ی nام در حالت تغییرشکل یافته	$r_i^{(n)}$
دمای مطلق کلوین	T
تابع انرژی آزاد هلمهلتز	W
انرژی ناشی از کشش شبکه‌ی پلیمری	W_s
انرژی ناشی از مخلوط شدن حلال و پلیمر	W_m

نمادهای یونانی

زاویه‌ی خمش دولایه	$\bar{\theta}$
کشش اصلی شعاعی لایه‌ی nام	$\lambda_r^{(n)}$

کشش اصلی مماسی لایه ی n ام	$\lambda_{\theta}^{(n)}$
کشش اصلی خارج از صفحه لایه ی n ام	$\lambda_z^{(n)}$
پتانسیل شیمیایی	μ
حجم یک مول آب	ν
ضریب لاگرانژ	π
تنش اصلی کوشی در راستای j برای لایه ی n ام	$\sigma_j^{(n)}$
پارامتر اندرکنش شبکه ی پلیمر و حلال	χ

Abstract

The accurate and efficient design of the bilayer sensors and actuators made of hydrogels are of crucial importance. In this work, an analytical method is developed to solve the swelling induced bending of hydrogel bilayer under plane strain condition. The bilayer consists of a neutral incompressible elastomer layer attached to a hydrogel layer. The interface of two layers is assumed to be perfectly bonded. Moreover, the plotted problem is simulated using Finite Element Method (FEM) employing UHYPER subroutine in ABAQUS software. Several cases are solved to demonstrate the validity and performance of the proposed analytical method.

A good correspondence between the presented method and the finite element method is observed. The deformation and the stresses inside the layers are presented for various material parameters employing both the developed analytical formulation as well as the finite element method. Finally, the effect of density of cross-link in hydrogel polymer network on curvature is also investigated.