

## تحلیل کمانش مکانیکی پنل‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

در این پژوهش کمانش مکانیکی پنل‌های استوانه‌ای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار فشاری محوری مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مکانیکی سازه با استفاده از تئوری تعمیم یافته مخلوط‌ها تخمین زده شده است. معادلات پایداری براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، اصل همیلتون و با استفاده از روابط خطی کرنش-تغییر مکان بدست آمده‌اند. با استفاده از چندجمله‌ای چیبیشف و به کمک روش ریتز مقدار بار بحرانی کمانش محاسبه شده است. تأثیر پارامترهای مختلف نظیر کسر حجمی و نحوه توزیع نانولوله‌های کربنی، شرایط مرزی و ابعاد هندسی سازه بر میزان بار بحرانی کمانش، بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که بیشترین مقدار بار بحرانی کمانش مربوط به توزیع مدرج تابعی نوع  $FG-X$  نانولوله-های کربنی تک جداره در راستای ضخامت پنل استوانه‌ای می‌باشد.

DOI: 10.30506/ijmep.2020.90739.1438

راضیه هاشمی<sup>۱</sup>

دانشجوی کارشناسی ارشد

مصطفی میرزائی<sup>۲</sup>

استادیار

محمد رضا عدل پرور<sup>۳</sup>

دانشیار

واژه‌های راهنما: کمانش مکانیکی، پنل استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، روش ریتز، چندجمله‌ای‌های چیبیشف

### ۱- مقدمه

سازه‌های جدارنازک، نظیر پنل‌های استوانه‌ای و کروی در زمینه‌های مختلف مهندسی و صنایع پیشرفته کاربرد فراوانی دارند. اگر این سازه‌ها تحت بار فشاری قرار گیرند، مهم‌ترین عامل تهدید کننده عملکرد عادی آنها، مسئله ناپایداری، افت سختی و کمانش است. بنابراین دانستن مقدار بار بحرانی کمانش، نقش مهمی را در طراحی این نوع سازه‌ها ایفا می‌کند. از سوی دیگر مطالعات متعدد محققین علم مواد [۱-۳] نشان داده است که نانولوله‌های کربنی<sup>۴</sup>، نوع جدیدی از مواد پیشرفته‌اند که دارای مدول الاستیسیته بسیار بالا (بیشتر از یک تراپاسکال) و مقاومت کششی ۱۰ تا ۱۰۰ برابر بیشتر از فولاد هستند. نانولوله‌های کربنی علاوه بر خواص مکانیکی فوق‌العاده، خواص الکتریکی و حرارتی منحصر به فردی دارند که باعث شده این مواد به عنوان یک تقویت کننده مناسب برای تقویت سازه‌ها به شمار آیند.

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشگاه قم، قم، ایران r.h\_hashemi@yahoo.com

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه قم، قم، ایران m.mirzaei@qom.ac.ir

<sup>۳</sup> دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه قم، قم، ایران adlparvar@qom.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۵/۰۴، تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۸/۱۹

<sup>۴</sup> Carbon nanotubes (CNT)

در سال‌های اخیر استفاده از سازه‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در صنایع مختلف همچون مهندسی پزشکی و مهندسی هوا و فضا گسترش یافته است. مطالعه رفتار مکانیکی ورق‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی<sup>۱</sup> با شرایط مرزی ساده اولین بار توسط Shen [۴] انجام گردید. این پژوهش باعث شد که محققین دیگر به بررسی رفتار سایر سازه‌های مکانیکی نظیر تیرها، ورق‌ها، پوسته‌ها و پنل‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بارگذاری‌های مختلف و شرایط مرزی متنوع ترغیب شوند، که در ادامه به گزیده‌ای از آنها اشاره می‌گردد. کمانش<sup>۲</sup> و پس‌کمانش<sup>۳</sup> حرارتی ورق مستطیلی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از روش آشوب دو مرحله‌ای<sup>۴</sup> توسط Zhang و Shen [۵] مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت بصورت متقارن در نظر گرفته شده است. استفاده از روش تحلیلی آشوب اگرچه روش کارآمدی در حل مسائل پایداری است با این وجود محدود به سازه‌های با شرایط مرزی ساده در تمامی لبه‌ها می‌باشد.

مهرآبادی و همکاران [۶] کمانش تک محوری و دو محوری ورق تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را مطالعه نمودند. در این پژوهش خواص ورق، به کمک تئوری تعمیم یافته‌ی مخلوط‌ها<sup>۵</sup> و روش اشلیبی-موری-تاناکا<sup>۶</sup> بدست آمده و برای محاسبه‌ی مقدار بار بحرانی کمانش، از روش حل ناویر<sup>۷</sup> که فقط برای ورق‌هایی با شرایط مرزی ساده در همه‌ی لبه‌ها مناسب است، استفاده شده است. کمانش مکانیکی ورق تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار ترکیبی فشاری-پیچشی، براساس روش بدون المان<sup>۸</sup> کی-پی ریتز<sup>۹</sup> و برای شرایط مرزی مختلف توسط Lei و همکاران [۷] مورد مطالعه قرار گرفته است. از آنجایی که توزیع نامتقارن نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت ورق باعث ایجاد خمش غیرخطی می‌شود، در این پژوهش فقط توزیع متقارن نانولوله‌های کربنی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین Zhang و همکاران [۸] کمانش ورق با بستر الاستیک وینکلر<sup>۱۰</sup> را مورد مطالعه قرار دادند. در این پژوهش معادلات پایداری با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول ورق<sup>۱۱</sup> استخراج شده است و مقدار بار بحرانی کمانش، تحت بار فشاری تک محوری، دو محوری و بار ترکیبی فشاری-پیچشی مانند پژوهش Lei و همکاران [۷] بدست آمده است. در دو پژوهش دیگر، Lei و همکاران [۹] و Zhang و همکاران [۱۰] کمانش ورق‌های مورب را با استفاده از روش بدون المان، براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در دو حالت با بستر الاستیک و بدون بستر الاستیک مورد مطالعه قرار دادند. پس کمانش استوانه تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار محوری توسط Liew و همکاران [۱۱] بررسی شده است.

<sup>1</sup> Functionally graded carbon nanotube reinforced composite (FG-CNTRC)

<sup>2</sup> Buckling

<sup>3</sup> Postbuckling

<sup>4</sup> Two-step perturbation technique

<sup>5</sup> Extended rule of mixture

<sup>6</sup> Ehselby-Mori-Tanaka

<sup>7</sup> Navier solution method

<sup>8</sup> Element free

<sup>9</sup> kp-Ritz

<sup>10</sup> Winkler

<sup>11</sup> First-order Shear Deformation Theory (FSDT)

در این پژوهش معادلات پس‌کمانش با ترکیبی از روش طول کمان<sup>۱</sup> و نیوتون-رافسون اصلاح شده<sup>۲</sup> حل شده است. تأثیر انواع توزیع نانو لوله‌های کربنی، ابعاد هندسی و کسر حجمی نانولوله‌های کربنی نیز بر مسیر پس‌کمانش بررسی شده است. در دو پژوهش دیگر Zhang و Liew [۱۲] و Zhang و همکاران [۱۳] رفتار پس‌کمانش ورق‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را تحت بار محوری و با در نظر گرفتن تأثیر بستر الاستیک و شرایط مرزی گیردار بررسی کردند.

Shen [۱۴] با استفاده از روش نیمه تحلیلی و با روش حل آشوب دو مرحله‌ای، پس‌کمانش پنل‌های استوانه‌ای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بارگذاری فشاری و حرارتی را بررسی نمود. با استفاده از روشی مشابه Xiang و Shen [۱۵-۱۷] نیز کمانش غیرخطی پنل‌های استوانه‌ای را تحت بار محوری فشاری، بارگذاری حرارتی و اثر همزمان بار فشاری و حرارتی مطالعه نمودند. در تمامی این پژوهش‌ها اثرات نقص اولیه هندسی و بستر الاستیک بررسی شده است و خواص ماده نیز تابعی از دما در نظر گرفته شده است.

میرزائی و کیانی [۱۸] رفتار کمانش حرارتی ورق مستطیلی مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف<sup>۳</sup> و روش ریتز بررسی نمودند. در این پژوهش مقدار دمای بحرانی کمانش در نقطه دوشاخگی<sup>۴</sup> تحت بارگذاری حرارتی محوری و دومحوری بدست آمده است و همچنین خواص مواد متشکل سازه تابع حرارت در نظر گرفته شده است. همچنین کیانی [۱۹] روش حلی مبتنی بر روش ریتز برای تحلیل پس‌کمانش حرارتی ورق مستطیلی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت ارائه نمود. نتایج این پژوهش نشان داد که مسیر تعادل پس‌کمانش ورق‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی از نوع ناپایداری ثانویه<sup>۵</sup> می‌باشد.

در پژوهشی دیگر ارتعاش آزاد پنل استوانه‌ای مورب تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از روش ریتز توسط کیانی [۲۰] مورد بررسی قرار گرفته است. کمانش خطی پنل‌های استوانه‌ای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی نیز تحت بار فشاری و برشی توسط Garica [۲۱] به روش اجزا محدود<sup>۶</sup> بررسی شده است. در این پژوهش خواص مواد با استفاده از قانون موری-تاناکا تخمین زده شده است.

با توجه به پژوهش‌های انجام گرفته، بررسی کمانش پنل استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره<sup>۷</sup> تحت بار محوری در نقطه دوشاخگی با روش ریتز و بررسی تأثیر انواع شرایط مرزی، ابعاد هندسی پنل، الگوی توزیع و کسر حجمی مختلف نانولوله‌های کربنی بر مقدار بار بحرانی کمانش مکانیکی تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته است.

در این پژوهش میزان بار بحرانی کمانش در نقطه دوشاخگی برای پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی تحت بار محوری فشاری با استفاده از روش ریتز بررسی شده است. بدین منظور خواص کل سازه توسط روش میکرومکانیکی تئوری تعمیم یافته‌ی مخلوط‌ها محاسبه شده است.

<sup>1</sup>Arc length

<sup>2</sup> Modified Newton-Raphson method

<sup>3</sup>Chebyshev

<sup>4</sup>Bifurcation buckling

<sup>5</sup>Secondary instability

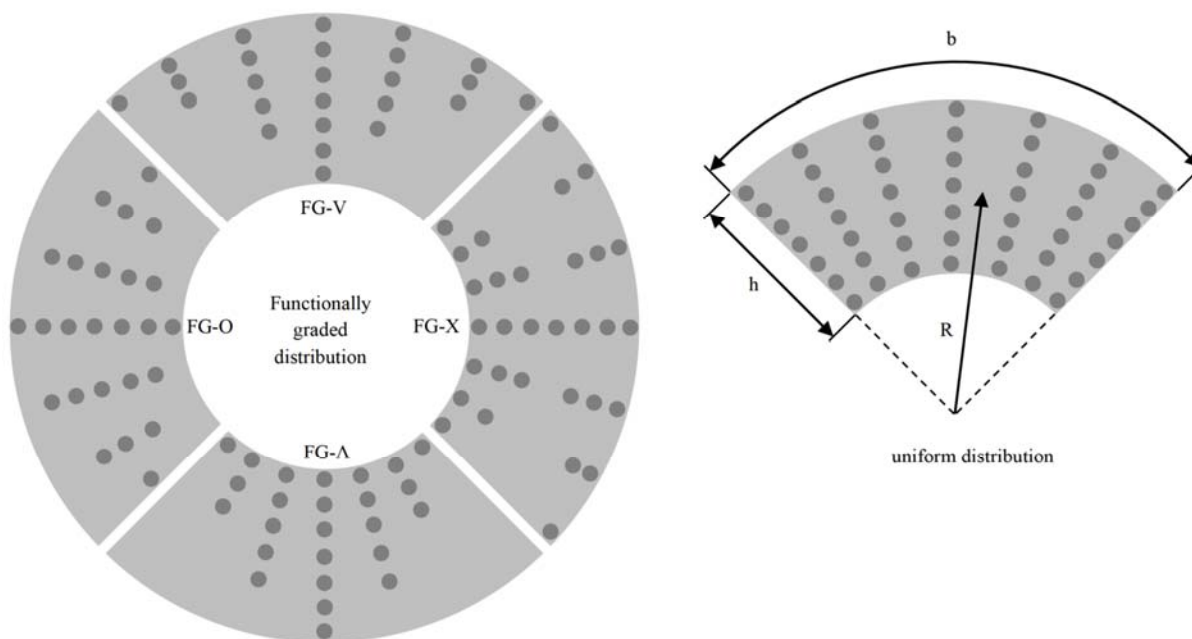
<sup>6</sup> Finite Elements(FE)

<sup>7</sup> Single Walled Carbon Nanotubes (SWCNT)

معادلات پایداری با استفاده از اصل همیلتون<sup>۱</sup> استخراج و با به‌کارگیری روش ریتز معادلات حاکم به مسئله مقدار ویژه<sup>۲</sup> برای یافتن میزان بار بحرانی کمانش مکانیکی در نقطه دوشاخگی تبدیل شده است. همچنین در این پژوهش چندجمله‌ای‌های چبیشف به عنوان توابع شکل اصلی<sup>۳</sup> متناسب با شرایط مرزی پنل استوانه‌ای در نظر گرفته شده است. در ادامه پس از اعتبارسنجی مدل با پژوهش‌های دیگر، تأثیر عوامل مختلف از جمله کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، الگوی توزیع نانولوله‌های کربنی، شرایط مرزی مختلف و ابعاد هندسی سازه بر مقدار بار بحرانی بررسی شده است.

## ۲- خواص مکانیکی

پنل استوانه‌ای مورد نظر در این پژوهش دارای زمینه پلیمری با رفتار ایزوتروپ است که با نانولوله‌های کربنی تک جداره تقویت شده است. مطابق شکل (۱) توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت بصورت یکنواخت<sup>۴</sup> و مدرج‌تابعی شامل چهار نوع توزیع FG-O، FG-X، FG- $\Lambda$ ، FG-V در نظر گرفته شده است. در توزیع FG- $\Lambda$  در سطح داخلی پنل نسبت به سطح خارجی، نانولوله‌های کربنی بیشتری حضور دارند. در توزیع متقارن FG-O، در سطوح داخلی و خارجی نسبت به سطح میانی پنل استوانه‌ای نانولوله‌های کمتری حضور دارند و این سطوح بیشتر از ماده‌ی زمینه تشکیل شده است.



شکل ۱- انواع توزیع نانولوله‌های کربنی در پنل‌های استوانه‌ای [۲۲]

<sup>1</sup>Hamilton principle

<sup>2</sup>Eigenvalue problem

<sup>3</sup>Basis shape functions

<sup>4</sup> Uniform Distribution (UD)

جدول ۱- مقادیر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی به ازای انواع توزیع نانولوله‌های کربنی

$V_{CNT}$	نحوه توزیع نانو لوله‌های کربنی
$V_{CNT}^*$	توزیع یکنواخت
$\left(\frac{4 z }{H}\right)V_{CNT}^*$	توزیع FG-X
$\left(1 - \frac{2Z}{H}\right)V_{CNT}^*$	توزیع FG- $\Lambda$
$\left(1 + \frac{2Z}{H}\right)V_{CNT}^*$	توزیع FG-V
$\left(1 - \frac{2 z }{H}\right)V_{CNT}^*$	توزیع FG-O

همچنین در توزیع متقارن نوع FG-X نیز نانولوله‌های کربنی بیشتری در سطوح داخلی و خارجی نسبت به سطح میانی هستند. برخلاف توزیع FG- $\Lambda$ ، در توزیع نوع FG-V در سطح خارجی نسبت به سطوح میانی و داخلی نانولوله‌های کربنی بیشتری حضور دارند. مقادیر کسر حجمی برای توزیع‌های مختلف نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت بصورت جدول (۱) می‌باشد. همچنین مقدار  $V_{CNT}^*$  در روابط جدول (۱) بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود [۱۰]:

$$V_{CNT}^* = \frac{W_{CNT}}{W_{CNT} + \left(\frac{\rho_{CNT}}{\rho_m}\right) - \left(\frac{\rho_{CNT}}{\rho_m}\right) W_{CNT}} \quad (1)$$

در رابطه فوق،  $W_{CNT}$  بیانگر کسر جرمی نانولوله‌های کربنی در سازه بوده و  $\rho_m$  و  $\rho_{CNT}$  به ترتیب چگالی ماده‌ی زمینه و نانولوله‌های کربنی می‌باشد. در این پژوهش با در نظر گرفتن رابطه (۱) مقادیر ۰/۱۷، ۰/۲۸، ۰/۱۲  $V_{CNT}^* =$  در نظر گرفته شده است. مدل‌های میکرومکانیکی متفاوتی برای پیش‌بینی خواص مکانیکی سازه مورد نظر ارائه شده است که در این پژوهش از قانون تعمیم یافته‌ی مخلوط‌ها به منظور محاسبه‌ی خواص سازه استفاده شده است. مطابق تئوری تعمیم یافته مخلوط‌ها، مدول الاستیسیته و مدول برشی برای سازه‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی بصورت روابط (۴-۲) ارائه می‌شود [۲۶-۲۲]:

$$E_{11} = \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m E^m \quad (2)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{E^m} \quad (3)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G^m} \quad (4)$$

مقادیر  $E_{22}^{CNT}$ ،  $E_{11}^{CNT}$  به ترتیب مدول الاستیسیته نانولوله کربنی در راستای نانولوله و عمود بر آن و  $G_{12}^{CNT}$  نیز مدول برشی نانولوله‌ی کربنی می‌باشد. مقادیر  $E^m$  و  $G^m$  نیز به ترتیب، مدول الاستیسیته و مدول برشی ماده‌ی زمینه می‌باشد. همچنین مقدار  $V_{CNT}$  بیانگر کسر حجمی نانو لوله‌های کربنی است که به ازای توزیع‌های مختلف نانولوله‌های کربنی در ماده زمینه مطابق جدول (۱) مشخص شده است و  $V_m$  نیز کسر حجمی ماده زمینه می‌باشد که از رابطه (۵) پیروی می‌کند:

$$V_m + V_{CNT} = 1 \quad (۵)$$

در روابط (۲-۴)،  $j$  ضریب تأثیر یا پارامتر کارایی<sup>۱</sup> نانولوله کربنی می‌باشد که برای در نظر گرفتن اثرات اندازه<sup>۲</sup> در خواص مواد لحاظ شده است و از طریق ادغام مدول الاستیک بدست آمده از روش دینامیک مولکولی با تئوری مخلوط‌ها بدست آمده است. نسبت پواسون کل سازه را می‌توان بصورت رابطه (۶) بدست آورد [۲۶-۲۲]:

$$v_{12} = V_{CNT} v_{12}^{CNT} + V_m v^m \quad (۶)$$

که مقدار  $v_{12}$  بیانگر نسبت پواسون کل سازه،  $v_{12}^{CNT}$  نسبت پواسون نانولوله‌های کربنی و  $v^m$  نسبت پواسون ماده‌ی زمینه می‌باشد.

### ۳- فرمول‌بندی معادلات کمانش

پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با شعاع متوسط ( $R$ )، ضخامت ( $h$ )، طول محوری ( $a$ ) و طول انحنای ( $b$ ) در نظر گرفته شده است. دستگاه مختصات سطح میانی پنل استوانه‌ای با مؤلفه‌های  $xy$  و  $z$  که به ترتیب بیانگر طول محوری، طول انحنای و ضخامت پنل استوانه‌ای می‌باشد، با محدود  $-0.5a \leq x \leq +0.5a$ ،  $-0.5b \leq y \leq +0.5b$  و  $-0.5h \leq z \leq +0.5h$  مفروض است. با توجه به دستگاه مختصات، براساس تغییر شکل برشی مرتبه اول، تغییر مکان هر نقطه دلخواه از پنل در راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  را می‌توان بصورت روابط (۹-۷) بیان کرد [۲۷]:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \quad (۷)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \quad (۸)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (۹)$$

در روابط فوق  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب بیانگر تغییر مکان نقطه‌ی دلخواه از پنل در راستای محوری، محیطی و عرضی است. همچنین  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  به ترتیب بیانگر تغییر مکان سطح میانی پوسته در راستای محوری، محیطی و عرضی می‌باشند.  $\varphi_x$  و  $\varphi_y$  نیز به ترتیب بیانگر دوران صفحه میانی حول محورهای  $x$  و  $y$  هستند. براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مؤلفه‌های کرنش بر حسب مؤلفه‌های کرنش صفحه میانی بصورت رابطه (۱۰) نوشته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \\ k_{xz} \\ k_{yz} \end{Bmatrix} \quad (۱۰)$$

<sup>۱</sup>Efficiency parameters

<sup>۲</sup>Size effect

در رابطه (۱۰)  $\varepsilon_{xx}$ ،  $\varepsilon_{yy}$  و  $\gamma_{xz}$  به ترتیب کرنش محوری، محیطی و برشی می‌باشد.  $\varepsilon_{xx}^0$ ،  $\varepsilon_{yy}^0$  و  $\gamma_{xy}^0$  هم به ترتیب بیانگر کرنش محوری، محیطی و برشی در صفحه میانی می‌باشد. براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، کرنش‌های برشی  $\gamma_{xz}$  و  $\gamma_{yz}$  قابل صرف نظر نمی‌باشند و تنها مؤلفه  $\varepsilon_{zz}$  کرنش صفر می‌باشد. همچنین  $k_{xx}$ ،  $k_{yy}$  و  $k_{xy}$  به ترتیب انحنا خمشی در جهت  $x$  و  $y$  و انحنا پیچشی می‌باشند که مقادیر آنها طبق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول عبارت است از [۲۷]:

$$\begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \\ k_{xz} \\ k_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{x,x} \\ \varphi_{y,y} \\ \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

پدیده‌ی کمانش ذاتاً پدیده‌ای غیرخطی است و باید با استفاده از تجزیه و تحلیل غیرخطی هندسی محاسبه گردد. در حالی که وقتی کمانش نقطه دوشاخگی مورد بررسی است، در شروع کمانش مؤلفه‌های کرنش بی‌نهایت کوچک است در نتیجه روابط خطی کرنش- تغییرمکان برای بدست آوردن معادلات پایداری کافی است. براساس روابط خطی کرنش- تغییرمکان مقادیر کرنش‌های درون صفحه‌ای سطح میانی پنل استوانه‌ای برابر است با:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} + \frac{w_0}{R} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \\ \varphi_x + w_{0,x} \\ \varphi_y + w_{0,y} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

برای مواد ترموالاستیک خطی می‌توان میدان تنش را بصورت تابعی خطی از میدان کرنش و تغییر دما بیان نمود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)  $\sigma_{ii}$   $i = x, y$  مقادیر تنش نرمال،  $\tau_{ij}$   $ij = xy, xz, yz$  مقادیر تنش برشی و  $Q_{ij}$   $i, j = 1, 2, 4, 5, 6$  ماتریس سختی است و درایه‌های آن برابر است با:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (14)$$

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (15)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (16)$$

$$Q_{44} = G_{23} \quad (17)$$

$$Q_{55} = G_{13} \quad (18)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (19)$$

براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول منتجه‌های نیرو با انتگرال‌گیری از مؤلفه‌های تنش در راستای ضخامت پنل استوانه‌ای بصورت رابطه (۲۰) تعریف می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-0.5h}^{+0.5h} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ z\sigma_{xx} \\ z\sigma_{yy} \\ z\tau_{xy} \\ \kappa\tau_{xz} \\ \kappa\tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (20)$$

در رابطه فوق  $\kappa$  ضریب تصحیح برشی طبق تئوری مرتبه اول برشی می‌باشد. بررسی‌های دقیق نشان می‌دهد که این ضریب به شرایط مرزی، خواص ماده، هندسه و نوع بارگذاری بستگی دارد. با این حال در اکثر پژوهش‌ها مقدار این ضریب  $\kappa = \frac{5}{6}$ ،  $\kappa = 1$  یا  $\kappa = \frac{\pi^2}{12}$  در نظر گرفته می‌شود. در این پژوهش  $\kappa = \frac{5}{6}$  فرض شده است. با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۲۰) مقادیر منته‌جه نیروها برابر است با [۲۷]:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

در رابطه (۲۱) مؤلفه‌های سختی  $A_{ij}$ ،  $B_{ij}$  و  $D_{ij}$  به ترتیب بیانگر سختی کششی، خمشی-کششی و خمشی می‌باشد که مطابق با رابطه (۲۲) محاسبه می‌شوند [۲۷]:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-0.5h}^{+0.5h} (Q_{ij}, zQ_{ij}, z^2Q_{ij}) dz \quad (22)$$

با استفاده از اصل همیلتون، مقدار انرژی پتانسیل کل سازه بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود [۲۷]:

$$\delta\Pi = \delta U + \delta U_p = 0 \quad (23)$$

در رابطه فوق  $\delta\Pi$  تغییرات انرژی پتانسیل کل،  $\delta U$  تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی سازه است که مقدار آن مطابق با رابطه (۲۴) می‌باشد:

$$\delta U = \int_{-0.5h}^{+0.5h} \int_{-0.5b}^{+0.5b} \int_{-0.5h}^{+0.5h} (\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz}) dz dy dx \quad (24)$$



همچنین در رابطه (۲۳)،  $\delta U_p$  بیانگر تغییرات کار انجام شده توسط نیروی محوری خارجی روی پنل استوانه‌ای بوده و برابر است با:

$$\delta U_p = - \int_{-0.5a}^{+0.5a} \int_{-0.5b}^{+0.5b} P w_{0,x} \delta w_{0,x} dy dx \quad (25)$$

که در رابطه فوق مقدار  $P$  نیروی محوری فشاری می‌باشد.

#### ۴- حل معادلات کمانش

در این پژوهش معادلات پایداری با استفاده از معیار انرژی و روش ریتز بدست آمده است. در روش ریتز مسئله اصلی حدس مناسب توابع شکل است، زیرا عدم رعایت این امر می‌تواند منجر به عدم همگرایی یا خطا در پاسخ‌ها شود. از نظر سادگی محاسبات، توابع مثلثاتی و توابع چندجمله‌ای، متداول‌ترین توابع مورد استفاده هستند. در پژوهش حاضر مؤلفه‌های تغییر مکان با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف بصورت روابط (۲۶-۳۰) تعریف می‌شود:

$$u_0(x, y) = R^u(x, y) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} U_{ij} P_i(x) P_j(y) \quad (26)$$

$$v_0(x, y) = R^v(x, y) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} V_{ij} P_i(x) P_j(y) \quad (27)$$

$$w_0(x, y) = R^w(x, y) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} W_{ij} P_i(x) P_j(y) \quad (28)$$

$$\varphi_x(x, y) = R^x(x, y) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} X_{ij} P_i(x) P_j(y) \quad (29)$$

$$\varphi_y(x, y) = R^y(x, y) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} Y_{ij} P_i(x) P_j(y) \quad (30)$$

در معادلات بالا  $P_i(x)$  و  $P_j(y)$  به ترتیب  $i$ -امین و  $j$ -امین چندجمله‌ای چبیشف نوع اول می‌باشند که بصورت روابط (۳۱-۳۲) تعریف می‌شوند:

$$P_i(x) = \cos((i-1) \arccos(2x/a)) \quad (31)$$

$$P_j(y) = \cos((j-1) \arccos(2y/b)) \quad (32)$$

از طرف دیگر در معادلات (۲۶-۳۰) توابع  $R^\alpha(x, y)$ ،  $\alpha = u, v, w, x, y$  توابع کمکی متناظر با شرایط مرزی می‌باشند.  $N_x$  و  $N_y$  نیز تعداد چندجمله‌ای‌های توابع شکل می‌باشد که با افزایش  $N_x$  و  $N_y$  دقت جواب بهبود می‌یابد، اما به نسبت محاسبات پیچیده‌تر شده و تعداد معادلات نیز افزایش خواهد یافت.

همچنین در روش ریتز انتخاب توابع شکل به شرایط مرزی سازه بستگی دارد. در این پژوهش سه نوع شرط مرزی، تکیه‌گاه گیردار (C)، تکیه‌گاه ساده (S) و لبه‌ی آزاد (F) در نظر گرفته شده است.

سه نوع شرایط مرزی در نظر گرفته شده بصورت روابط (۳۳-۳۸) بیان می‌شود:  
تکیه‌گاه گیردار:

$$x = \pm \frac{a}{2}: u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = \varphi_y = 0 \quad (33)$$

$$y = \pm \frac{b}{2}: u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = \varphi_y = 0 \quad (34)$$

تکیه‌گاه ساده:

$$x = \pm \frac{a}{2}: u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_y = 0 \quad (35)$$

$$y = \pm \frac{b}{2}: u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = 0 \quad (36)$$

تکیه‌گاه آزاد:

$$x = \pm \frac{a}{2}: - \quad (37)$$

$$y = \pm \frac{b}{2}: - \quad (38)$$

توابع شکل باید براساس روابط (۳۳-۳۸) انتخاب شوند. مقدار تابع کمکی  $R^\alpha(x, y), \alpha = u, v, w, x, y$  برابر است با:

$$R^\alpha(x, y) = \left(1 + \frac{2x}{a}\right)^p \left(1 - \frac{2x}{a}\right)^q \left(1 + \frac{2y}{b}\right)^r \left(1 - \frac{2y}{b}\right)^s \quad (39)$$

هر یک از متغیرهای  $p, q, r, s$  و  $\alpha$  با توجه به شرایط مرزی می‌توانند مقادیر صفر یا یک را بگیرند. برای مثال در پنل استوانه‌ای با شرایط مرزی CSCF، حرف (C) بیانگر تکیه‌گاه گیردار در لبه‌ی  $x = -0.5a$ ، حرف (S) بیانگر تکیه‌گاه ساده در مرز  $y = -0.5b$ ، حرف (C) بیانگر تکیه‌گاه گیردار در لبه‌ی  $x = +0.5a$  و حرف (F) نشان دهنده لبه‌ی آزاد در مرز  $y = +0.5b$  می‌باشد، در این صورت توابع کمکی برابرند با:

$$R^u(x, y) = \left(1 + \frac{2x}{a}\right) \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \left(1 + \frac{2y}{b}\right) \quad (40)$$

$$R^v(x, y) = \left(1 + \frac{2x}{a}\right) \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \left(1 + \frac{2y}{b}\right) \quad (41)$$

$$R^w(x, y) = \left(1 + \frac{2x}{a}\right) \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \left(1 + \frac{2y}{b}\right) \quad (42)$$

$$R^x(x, y) = \left(1 + \frac{2x}{a}\right) \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \left(1 + \frac{2y}{b}\right) \quad (43)$$

$$R^y(x, y) = \left(1 + \frac{2x}{a}\right) \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \quad (44)$$

در نهایت با جایگذاری روابط (۳۰-۲۶) در معادله (۲۳) مسئله مورد نظر تبدیل به مسئله مقدار ویژه خطی رابطه‌ی (۴۵) می‌گردد:

$$[K^e + K^g][X] = 0 \quad (45)$$

در رابطه‌ی فوق  $K^e$  ماتریس سختی سازه می‌باشد که از معادله (۲۴) بدست آمده است.  $K^g$  ماتریس سختی هندسی ناشی از بار خارجی محوری می‌باشد که از معادله (۲۵) بدست آمده است. هر یک از ماتریس‌های فوق دارای  $5 \times N_x \times N_y$  سطر و ستون می‌باشند. همچنین بردار  $X$  ضرایب مؤلفه‌های تغییر مکان می‌باشد که مطابق رابطه (۴۶) تعریف می‌شوند.

$$[X] = \begin{bmatrix} U_{ij} \\ V_{ij} \\ W_{ij} \\ X_{ij} \\ Y_{ij} \end{bmatrix}, \quad U_{ij} = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ \vdots \\ U_{21} \\ U_{22} \\ \vdots \\ U_{N_x N_y} \end{bmatrix}, \quad V_{ij} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \\ \vdots \\ V_{21} \\ V_{22} \\ \vdots \\ V_{N_x N_y} \end{bmatrix}, \quad W_{ij} = \begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{12} \\ \vdots \\ W_{21} \\ W_{22} \\ \vdots \\ W_{N_x N_y} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$X_{ij} = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ \vdots \\ X_{21} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{N_x N_y} \end{bmatrix}, \quad Y_{ij} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ \vdots \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ \vdots \\ Y_{N_x N_y} \end{bmatrix}$$

معادله (۴۵) به منظور بدست آوردن مقدار بار بحرانی کمانش با استفاده از روش مقدار ویژه قابل حل می‌باشد.

## ۵- نتایج عددی و بحث

هدف از پژوهش حاضر، بررسی کمانش پنل‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی می‌باشد. در این بخش ابتدا بررسی همگرایی حل عددی و اعتبارسنجی نتایج ارائه می‌گردد. سپس به منظور بررسی عوامل موثر بر کمانش پنل‌های مورد اشاره، مطالعات پارامتری انجام گرفته و تاثیر پارامترهایی نظیر ابعاد هندسی و شرایط مرزی، نحوه توزیع و کسر حجمی نانو لوله‌های کربنی بررسی گردیده است.

جدول ۲- خواص مکانیکی ماده‌ی پلی متیل متاکریلیت [۱۵]

$\nu^m$	$G^m(GPa)$	$E^m(GPa)$
۰/۳۴	۰/۹۳۲۸	۲/۵

جدول ۳- خواص مکانیکی نانولوله‌های کربنی تک جداره (۱۰ و ۱۰) [۱۵]

$\nu_{12}^{CN}$	$G_{12}^{CN}(TPa)$	$E_{22}^{CN}(TPa)$	$E_{11}^{CN}(TPa)$	$T (^{\circ}k)$
۰/۱۷۵	۱/۹۴۴۵	۷/۰۸۰۰	۵/۶۴۶۶	۳۰۰

جدول ۴- پارامتر کارایی به ازای کسر حجمی مختلف نانولوله‌های کربنی [۱۵]

تئوری تعمیم یافته مخلوط‌ها					دینامیک مولکولی		$V_{CNT}^*$
$\eta_3$	$\eta_2$	$\eta_1$	$E_{22}(GPa)$	$E_{11}(GPa)$	$E_{22}(GPa)$	$E_{11}(GPa)$	
۰/۱۳۷	۱/۰۲۲	۰/۷۱۵۴	۲/۹	۹۴/۷۸	۲/۹	۹۴/۶	۰/۱۲
۰/۱۴۲	۱/۶۲۶	۱/۱۳۸۲	۴/۹	۱۳۸/۶۸	۴/۹	۱۳۸/۹	۰/۱۷
۰/۱۴۱	۱/۵۸۵	۱/۱۰۹۵	۵/۵	۲۲۴/۵۰	۵/۵	۲۲۴/۲	۰/۲۸

بدین منظور در ابتدا خواص مکانیکی مؤثر مواد متشکل سازه ارائه می‌گردد. ماده‌ی پلی متیل متاکریلیت<sup>۱</sup> با خواص مکانیکی مطابق جدول (۲) به عنوان زمینه در نظر گرفته شده است. همچنین خواص مکانیکی نانولوله‌های کربنی تک جداره (۱۰ و ۱۰) که به عنوان تقویت‌کننده‌ی زمینه نظر گرفته شده است، در جدول (۳) آورده شده است [۱۵]. همانطور که قبلاً اشاره شده است، ضرایب پارامتر کارایی از طریق مطابقت نتایج حاصل از قانون تعمیم یافته‌ی مخلوط‌ها و روش دینامیک مولکولی که توسط Elliott و Han [۲۸] بررسی شده است، محاسبه می‌گردد. در جدول (۴) مقادیر ضرایب پارامتر کارایی به ازای کسر حجمی‌های مختلف نانولوله‌های کربنی ارائه شده است.

#### ۵-۱- بررسی همگرایی و اعتبارسنجی نتایج

به منظور بررسی همگرایی نتایج عددی، در جدول (۵)، بار بحرانی کمانش  $P_{cr}$  (MN) پنل استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار محوری به ازای تعداد چندجمله‌ای‌های توابع شکل مختلف برای پنل با ضخامت‌های مختلف آورده شده است. در جدول (۵) پنل با شرایط مرزی (SSSS)، نسبت‌های هندسی  $a/R=1$ ,  $b/a=\pi$ ، توزیع FG-X و کسر حجمی  $V_{cnt}^* = 0/28$  نانولوله‌های کربنی در نظر گرفته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با تعداد جملات  $N_x = N_y = 19$  پاسخ‌ها تا چهار رقم اعشار همگرا شده اند. به منظور بررسی صحت نتایج، مقایسه‌ی بار بحرانی کمانش با نتایج مقالات [۱۵]، [۲۹-۳۰] در جداول (۶-۷) آورده شده است. در جدول (۶)، بار بحرانی کمانش پنل استوانه‌ای ایزوتروپ با نتایج ارائه شده در مقالات Jaunky و Knight [۲۹] و Shen و Xiang [۱۵] آورده شده است. در این جدول مدول الاستیسیته و ضریب پواسون پنل به ترتیب برابر  $(GPa)$  ۷۰ و ۰/۳ می‌باشند. همچنین شرایط مرزی پنل عبارت است از:

$$x = -\frac{a}{2}: v_0 = w_0 = 0 \quad (47)$$

$$x = +\frac{a}{2}: u_0 = v_0 = w_0 = 0 \quad (48)$$

$$y = \pm \frac{b}{2}: u_0 = w_0 = 0 \quad (49)$$

<sup>1</sup> Poly Methyl Methacrylate

**جدول ۵-** همگرایی میزان بار بحرانی کمانش ( $10^5 N$ )  $P_{cr}$  پنل استوانه‌ای تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار محوری با توزیع FG-X و  $V_{CNT}^* = 28\%$  و نسبت ابعاد هندسی ( $b/a=\pi$  و  $a/R=1$ )

$a/h$				$(N_x, N_y)$
۱۰۰	۵۰	۳۰	۲۰	
۱۰/۴۵۳۹	۳۹/۴۷۲۲	۱۲۵/۶۹۹۹	۳۰۸/۵۸۰۳	(۸,۸)
۸/۳۹۰۵	۳۸/۰۶۴۵	۱۲۳/۵۵۲۶	۳۰۵/۰۶۲۱	(۱۰,۱۰)
۷/۹۰۰۲	۳۷/۴۶۸۶	۱۲۳/۳۸۲۵	۳۰۴/۸۱۹۷	(۱۲,۱۲)
۷/۹۰۰۲	۳۷/۳۳۱۳	۱۲۳/۳۸۲۵	۳۰۴/۸۱۲۶	(۱۳,۱۳)
۷/۷۹۹۸	۳۷/۳۳۱۳	۱۲۳/۳۷۶۸	۳۰۴/۸۱۲۶	(۱۴,۱۴)
۷/۷۹۹۸	۳۷/۳۲۴۰	۱۲۳/۳۷۶۸	۳۰۴/۸۱۲۵	(۱۵,۱۵)
۷/۷۸۶۵	۳۷/۳۲۴۰	۱۲۳/۳۷۶۷	۳۰۴/۸۱۲۵	(۱۶,۱۶)
۷/۷۸۶۵	۳۷/۳۲۳۸	۱۲۳/۳۷۶۷	۳۰۴/۸۱۲۵	(۱۷,۱۷)
۷/۷۸۵۸	۳۷/۳۲۳۸	۱۲۳/۳۷۶۷	۳۰۴/۸۱۲۵	(۱۸,۱۸)
۷/۷۸۵۸	۳۷/۳۲۳۸	۱۲۳/۳۷۶۷	۳۰۴/۸۱۲۵	(۱۹,۱۹)

در این جدول علت اختلاف برخی نتایج پژوهش حاضر با مرجع [۱۵] مربوط به خطی بودن مطالعه حاضر است. درحالی‌که در حل ارائه شده در مرجع [۱۵] حل دقیق کمانش غیرخطی می‌باشد. با این وجود همانطور که انتظار می‌رود تحقیق حاضر بار کمانش را بیشتر از نتایج مرجع [۱۵] پیش‌بینی می‌نماید. همچنین نتایج مربوط تئوری دائل از کمانش خطی مرجع [۲۹] که برای پوسته‌های جدارنازک مناسب است تطابق بیشتری نسبت به تئوری سنדרز که برای پوسته‌های نسبتاً ضخیم مناسب‌تر است با نتایج پژوهش حاضر دارد. در جدول (۷) تنش بحرانی کمانش مکانیکی با نتایج ارائه شده در مقاله [۱۵] و مقاله [۳۰] برای پنل استوانه‌ای مدرج‌تابعی  $Al_2O_3/Al$  مقایسه شده است. سطح خارجی پنل استوانه‌ای سرامیکی و سطح داخلی آن فلزی است. خواص مکانیکی مواد تشکیل‌دهنده بصورت  $E_m=70 (GPa)$ ،  $E_c=380 (GPa)$  و  $\nu_m = \nu_c = 0/3$  و مستقل از دما در نظر گرفته شده است.

**جدول ۶-** مقایسه بار بحرانی کمانش  $P_{cr}$  (in lbs/in) برای پنل استوانه‌ای ایزوتروپی تحت بار محوری ( $E=10^7 psi$ )  
( $h=0/24 (in)$ ,  $a=60 (in)$ ,  $\nu=0/3$ )

پژوهش حاضر	منبع [۲۹]		منبع [۱۵]	$a/b$	$R(in)$
	تئوری دائل	تئوری سنדרز			
۵۷۷۹۳/۰۵	۵۳۰۸۰/۵	۴۲۴۴۱/۲	۵۱۳۹۰/۵۰	۳/۱۸۳۱	۶
۲۸۹۴۴/۰۳	۲۸۲۵۹/۲	۲۷۱۹۴/۷	۲۶۲۲۴/۹۹	۱/۵۹۱۵	۱۲
۱۴۴۷۹/۳۳	۱۴۳۷۸/۴	۱۴۳۳۶/۰	۱۳۳۴۴/۰۵	۰/۳۹۷۹	۲۴
۷۲۴۹/۳۴	۷۲۴۳/۳	۷۲۴۳/۳	۷۲۲۳/۵۶	۰/۳۹۷۹	۴۸
۲۴۲۰/۲۱	۲۴۲۱/۱	۲۴۲۱/۱	۲۴۰۸/۸۳	۰/۱۳۲۶	۱۴۴

خواص مکانیکی پنل استوانه‌ای با استفاده از قانون توانی، مطابق با روابط زیر محاسبه شده است:

$$V_m(Z) = \left(\frac{2Z+h}{2h}\right)^N, V_c(Z) = 1 - V_m(Z) \quad (50)$$

$$pr_{eff} = pr_m V_m(Z) + pr_c V_c(Z) \quad (51)$$

در رابطه (۵۰)،  $N$  شاخص کسر حجمی و زیرنویس  $m$  و  $c$  به ترتیب نشان‌دهنده سرامیک و فلز می‌باشد. همچنین  $pr_{eff}$  مشخصه مؤثر پنل استوانه‌ای مدرج تابعی است که بر اساس قانون ترکیب خطی تعیین می‌شود. شرایط مرزی پنل استوانه‌ای در جدول (۷) بصورت روابط (۵۲-۵۳) در نظر گرفته شده است:

$$x = \pm \frac{a}{2}: w_0 = \varphi_y = 0 \quad (52)$$

$$y = \pm \frac{b}{2}: w_0 = \varphi_x = 0 \quad (53)$$

جدول (۷) نشان می‌دهد که نتایج این پژوهش با نتایج مقالات [۱۵] و [۳۰] تطابق خوبی دارد. همچنین در شرایطی که نسبت طول به شعاع پنل ( $a/R$ ) ثابت باشد، با افزایش نسبت عرض به ضخامت پنل ( $b/h$ )، بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد و با افزایش نسبت ( $a/R$ ) در صورت ثابت ماندن نسبت طول به شعاع ( $a/R$ ) بار بحرانی کمانش مکانیکی نیز افزایش خواهد یافت.

**جدول ۷-** مقایسه تنش کمانشی  $\sigma_{cr}$  (in GPa) برای پنل‌های استوانه‌ای  $Al_2O_3/Al$  تحت نیروی محوری

N					منبع	b/h	a/R
۱۰	۵	۱	۰/۵	.			
۳/۶۱۰۰	۳/۲۴۰۱	۲/۲۰۴۷	۱/۷۸۳۷	۰/۷۸۳۵	حاضر		
۳/۶۱۱۰	۳/۲۴۱۴	۲/۲۰۴۷	۱/۷۸۳۱	۰/۷۸۳۵ <sup>(۱)</sup>	[۳۰]	۲۰	۰/۳
۳/۶۰۸۳	۳/۲۳۸۰	۲/۲۰۲۳	۱/۷۸۱۸	۰/۷۸۳۴ <sup>(۱)</sup>	[۱۵]		
۵/۰۳۵۹	۴/۵۷۰۸	۳/۱۱۶۶	۲/۴۸۶۲	۱/۰۶۷۲	حاضر		
۵/۰۳۶۸	۴/۵۷۲۱	۳/۱۱۶۶	۲/۴۸۵۶	۱/۰۶۷۲ <sup>(۱)</sup>	[۳۰]	۲۰	۰/۵
۵/۰۰۷۳	۴/۵۴۴۲	۳/۰۹۷۴	۲/۴۷۱۰	۱/۰۶۱۴ <sup>(۱)</sup>	[۱۵]		
۲/۵۲۷۹	۲/۳۰۸۳	۱/۵۷۵۷	۱/۲۴۷۴	۰/۵۲۸۷	حاضر		
۲/۷۴۶۸	۲/۴۷۴۸	۱/۶۸۴۴	۱/۳۵۵۹	۰/۵۹۱۳ <sup>(۲)</sup>	[۳۰]	۴۰	۰/۵
۲/۷۴۸۷	۲/۴۷۵۹	۱/۶۸۵۰	۱/۳۵۶۹	۰/۵۹۲۱ <sup>(۲)</sup>	[۱۵]		
۲/۵۱۳۴	۲/۲۹۴۶	۱/۵۶۶۰	۱/۲۴۰۱	۰/۵۲۵۹ <sup>(۳)</sup>			

<sup>(۱)</sup>مود کمانش  $(m,n)=(1,1)$

<sup>(۲)</sup> $(m,n) = (3,1)$

<sup>(۳)</sup> $(m,n) = (2,1)$

## ۵-۲- مطالعات پارامتری

در این بخش اثر عوامل مختلف از جمله ابعاد هندسی، چگونگی توزیع و میزان کسر حجمی نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت سازه، شرایط مرزی پنل استوانه‌ای بر میزان بار بحرانی کمانش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### ۵-۲-۱- بررسی تأثیر ابعاد هندسی بر بار بحرانی کمانش

در جدول (۸) میزان بار بحرانی کمانش به ازای مقادیر متفاوت عرض، ضخامت و شعاع پنل استوانه‌ای محاسبه شده است. پنل استوانه‌ای مفروض با شرایط مرزی (CFCF)،  $V_{CNT}^* = 0.28$  و الگوی توزیع FG-X نانولوله‌های کربنی در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد، در شرایطی که شعاع و ضخامت پنل ثابت باشد با افزایش نسبت طول به عرض ( $a/b$ )، میزان بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. از سوی دیگر با افزایش ضخامت، میزان بار بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد. همچنین در شرایطی که ضخامت و عرض پنل ثابت باشند هر چه شعاع کاهش یابد، میزان بار بحرانی کمانش نیز افزایش خواهد یافت. با توجه به نتایج جدول (۸) میزان افزایش بار بحرانی کمانش، به ازای افزایش ضخامت به مراتب بیشتر از کاهش نسبت طول به عرض ( $a/b$ ) و یا کاهش شعاع پنل خواهد بود.

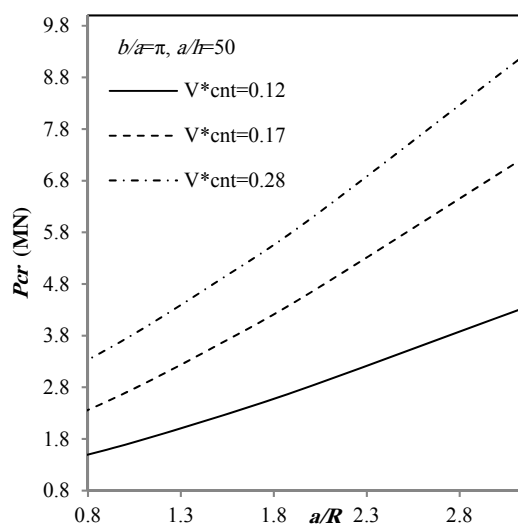
در شکل (۲) نمودار تغییرات بار بحرانی کمانش پنل استوانه‌ای برحسب نسبت طول به شعاع پنل ( $a/R$ )، به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی با شرایط مرزی (SSSS) نشان داده شده است. همچنین نسبت ابعاد هندسی ( $b/a = \pi$  و  $a/h = 50$ ) و الگوی توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت، نوع FG-X می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که در تمامی کسرهای حجمی نانولوله‌های کربنی در نظر گرفته، با افزایش نسبت طول به شعاع ( $a/R$ ) میزان بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

### ۵-۲-۲- بررسی تأثیر نحوه توزیع و کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بحرانی کمانش

در شکل (۳) مقادیر بار بحرانی کمانش به ازای مقادیر متفاوت کسر حجمی نانولوله‌های کربنی و الگوهای مختلف توزیع نانولوله‌های کربنی آورده شده است. پنل استوانه‌ای مفروض با شرایط مرزی (CFCF) و نسبت ابعاد هندسی ( $b/R = 1$  و  $b/h = 100$ ) در نظر گرفته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، کمترین میزان بار بحرانی کمانش مربوط به توزیع FG-O و  $V_{CNT}^* = 0.12$ ، و بیشترین میزان بار بحرانی مربوط به توزیع FG-X و  $V_{CNT}^* = 0.28$  می‌باشد. ماکزیمم تنش در سطح بیرونی پنل استوانه‌ای و در دورترین نقطه از تار خنثی مشاهده می‌گردد و هرچه این نواحی بیشتر تقویت شوند، مقدار بار بحرانی کمانش نیز افزایش خواهد یافت. در توزیع FG-O نسبت به سایر الگوهای توزیع، در سطوح خارجی و داخلی پنل نانولوله‌های کربنی بسیار کمی حضور دارند، بنابراین کمترین میزان بار بحرانی کمانش مربوط به این نوع توزیع می‌باشد. همچنین با افزایش درصد حجمی نانولوله‌های کربنی به مقدار  $V_{CNT}^* = 0.28$ ، به دلیل افزایش مدول الاستیک و نسبت مستقیم کمانش با سختی، بار بحرانی کمانش پنل استوانه‌ای افزایش می‌یابد.

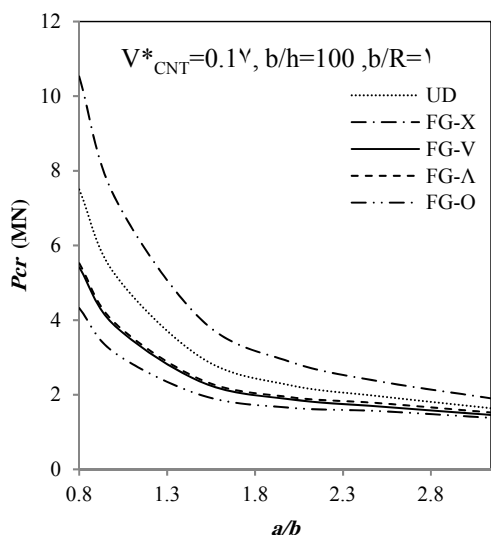
**جدول ۸-** تأثیر نسبت ابعاد هندسی ( $a/h$ ,  $b/a$  و  $a/R$ ) بر میزان بار بحرانی  $P_{cr}$  ( $10^5 N$ ) کمانش برای پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانولوله‌های کربن با الگوی توزیع FG-X، شرایط مرزی چهار لبه ساده تحت بار فشاری محوری و  $V^*_{CNT}=0.28$

$b/R=\pi$	$b/R=2/5$	$b/R=2$	$b/R=1/5$	$b/R=1$	$b/R=0.18$	$b/h$	$a/b$
۱۹/۵۰۸۵	۱۸/۴۵۱۷	۱۷/۶۹۳۹	۱۶/۹۸۱۱	۱۶/۲۴۸۷	۱۶/۰۰۱۴	۱۰۰	
۱۰۳/۷۱۸۹	۹۹/۹۷۵۸	۹۷/۲۵۲۹	۹۴/۸۸۴۰	۹۳/۰۰۰۰	۹۱/۹۵۶۸	۵۰	۰/۸
۲۸۵/۵۷۴۲	۲۷۷/۶۲۹۳	۲۷۲/۲۸۷۰	۲۶۷/۶۴۱۶	۲۶۱/۲۸۷۷	۲۵۹/۲۴۵۵	۳۰	
۱۴/۸۵۳۲	۱۳/۷۲۹۲	۱۲/۹۳۴	۱۲/۰۷۷۸	۱۱/۲۹۵۳	۱۱/۰۴۰	۱۰۰	
۸۱/۱۹۶۸	۷۷/۰۵۲۴	۷۴/۱۵۴۹	۷۱/۶۹۶۲	۶۹/۴۳۰۴	۶۸/۲۸۵۰	۵۰	۱
۲۴۲/۵۵۹۱	۲۳۴/۲۶۶۴	۲۲۸/۷۶۰۰	۲۲۲/۲۸۸۸	۲۱۵/۳۸۱۰	۲۱۳/۲۲۵۵	۳۰	
۱۰/۲۰۴۶	۸/۹۴۳۹	۷/۸۵۳۴	۶/۸۵۷۲	۶/۰۴۶۴	۵/۷۹۱۵	۱۰۰	
۵۱/۷۱۶۸	۴۷/۲۷۸۲	۴۴/۳۰۶۱	۴۱/۸۳۸۰	۳۸/۱۶۴۴	۳۶/۹۱۵۰	۵۰	۱/۵
۱۷۰/۰۰۴۲	۱۶۱/۶۱۷۰	۱۵۲/۲۴۲۶	۱۴۲/۷۴۵۴	۱۳۵/۳۳۹۴	۱۳۳/۱۱۰۳	۳۰	
۸/۶۶۵۷	۷/۱۳۹۱	۶/۰۱۵۶	۵/۰۲۹۱	۴/۲۴۸۲	۳/۸۴۶۲	۱۰۰	
۳۹/۶۶۰۴	۳۵/۳۴۴۱	۳۲/۴۸۴۲	۲۸/۴۵۲۹	۲۴/۴۴۳۶	۲۳/۱۹۵۷	۵۰	۲
۱۳۴/۰۹۸۶	۱۱۹/۱۹۲۶	۱۰۷/۶۸۹۹	۹۷/۹۹۰۲	۹۰/۶۵۵۹	۸۸/۴۸۱۳	۳۰	
۷/۷۹۳۳	۶/۳۰۸۴	۵/۲۳۰۶	۴/۲۹۷۵	۳/۳۷۰۵	۲/۸۶۰۴	۱۰۰	
۳۴/۵۰۳۲	۳۰/۴۲۵۰	۲۶/۲۸۵۷	۲۱/۳۳۴۲	۱۷/۳۷۷۰	۱۶/۱۷۱۴	۵۰	۲/۵
۱۰۹/۷۷۰۰	۹۲/۸۸۲۳	۸۱/۳۸۱۷	۷۱/۹۰۲۰	۶۴/۸۴۵۶	۶۲/۷۶۹۶	۳۰	
۷/۱۷۲۶	۵/۸۱۳۰	۴/۸۳۰۴	۳/۹۷۸۶	۲/۶۶۸۰	۲/۱۶۸۰	۱۰۰	
۳۲/۰۹۹۷	۲۶/۵۶۳۱	۲۱/۰۳۳۵	۱۶/۱۷۴۴	۱۲/۴۰۷۵	۱۱/۲۷۷۲	۵۰	$\pi$
۸۸/۸۹۲۶	۷۲/۲۲۴۹	۶۱/۱۶۵۲	۵۲/۱۹۹۲	۴۵/۶۰۱۹	۴۳/۶۷۲۳	۳۰	

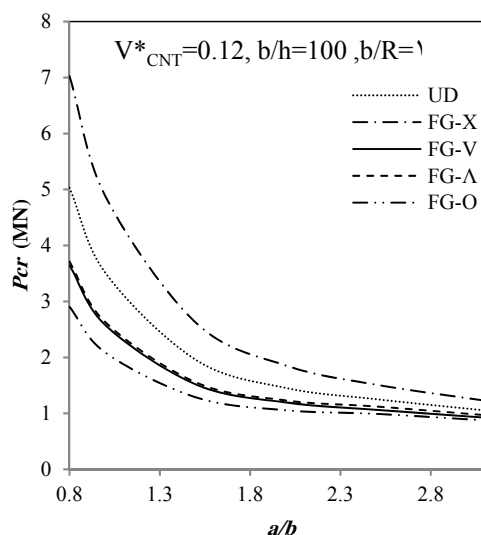


**شکل ۲-** نمودار بار بحرانی کمانش  $P_{cr}$  (MN) برحسب نسبت ( $a/R$ ) برای شرایط مرزی چهار لبه ساده تحت بار محوری فشاری ( $b/a=\pi$  و  $a/h=50$ )

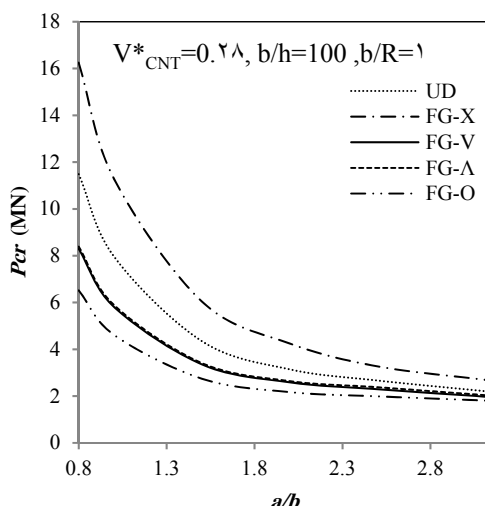




(ب)



(الف)



(ج)

شکل ۳- نمودار تأثیر الگوهای توزیع و کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بحرانی پنل استوانه‌ای تحت بار محوری با شرایط

$$V_{CNT}^* = 0.12 \text{ (الف)}, b/h=100, b/R=1 \text{ و } V_{CNT}^* = 0.17 \text{ (ب)}, V_{CNT}^* = 0.28 \text{ (ج)}, CFCF \text{ مرزی}$$

### ۳-۲-۵- بررسی تأثیر شرایط مرزی مختلف بر بار بحرانی کمانش

تأثیر شرایط مرزی مختلف بر میزان بار بحرانی کمانش با در نظر گرفتن کسر حجمی و الگوهای توزیع متقارن نانولوله‌های کربنی مختلف در جدول (۹) بررسی شده است. پنل استوانه‌ای مورد نظر با نسبت ابعاد هندسی  $(a/b=1, b/h=100, b/R=1)$  در نظر گرفته شده است. از آنجایی که توزیع نامتقارن نانولوله‌های کربنی در پنل‌های استوانه‌ای با تکیه‌گاه ساده باعث ایجاد خمش غیرخطی می‌شود، در جدول (۹) فقط توزیع‌های متقارن نانولوله‌های کربنی در نظر گرفته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در بین شرایط مرزی مختلف در نظر گرفته شده به ازای درصد‌های حجمی و الگوهای مختلف توزیع نانولوله‌های کربنی، بیشترین مقدار بار

بحرانی کمانش مربوط به پایدارترین حالت یعنی شرایط مرزی (SCSC) است و با افزایش پایداری پنل در شرایط مرزی مختلف مقدار بار بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد، به نحوی که بیشترین مقدار بار بحرانی مربوط به شرایط مرزی (SCSC) و بعد از آن به ترتیب مربوط به شرایط مرزی SSSS، CFCF، CFSF، SFSF می‌باشد. در شکل (۴) پنل استوانه‌ای کمانش یافته تحت بار محوری و با شرایط مرزی مختلف نشان داده شده است. نسبت ابعاد هندسی پنل استوانه‌ای مفروض ( $a/b=1$ ،  $b/R=1$  و  $b/h=1.0$ ) در نظر گرفته شده است. همچنین الگوی توزیع نانولوله‌های کربنی از نوع FG-X و کسر حجمی آن‌ها  $V_{CNT}^* = 0.28$  می‌باشد.

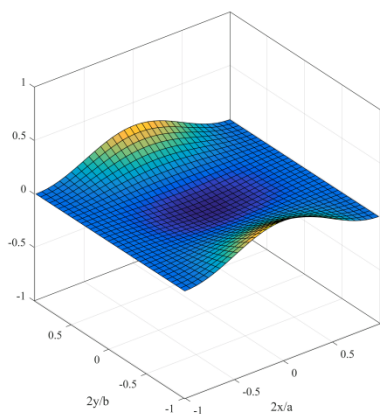
## ۶- نتیجه‌گیری

هدف از این پژوهش، بررسی میزان بار کمانش مکانیکی پنل استوانه‌ای مدرج‌تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار محوری می‌باشد. توزیع نانولوله‌های کربنی به دو صورت مدرج‌تابعی و یکنواخت در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی سازه با استفاده از قانون تعمیم یافته مخلوط‌ها محاسبه شده است. معادلات حاکم بر کمانش سازه با استفاده از روابط خطی کرنش-تغییر مکان، اصل همیلتون و روش ریتز بدست آمده و بار بحرانی کمانش با روش حل مقادیر ویژه خطی، محاسبه شده است. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد با افزایش میزان کسر حجمی نانولوله‌های کربنی به میزان  $V_{CNT}^* = 0.28$ ، میزان بار بحرانی سازه نیز افزایش می‌یابد. در بین الگوهای توزیع نانولوله‌های کربنی، بیشترین میزان بار بحرانی مربوط به توزیع FG-X و کمترین میزان بار بحرانی مربوط به توزیع FG-O نانولوله‌های کربنی است. همچنین با افزایش نسبت طول به عرض پنل استوانه‌ای ( $a/b$ )، میزان بار بحرانی کمانش کاهش خواهد یافت و با افزایش ضخامت پنل استوانه‌ای، میزان بار بحرانی کمانش نیز افزایش خواهد یافت.

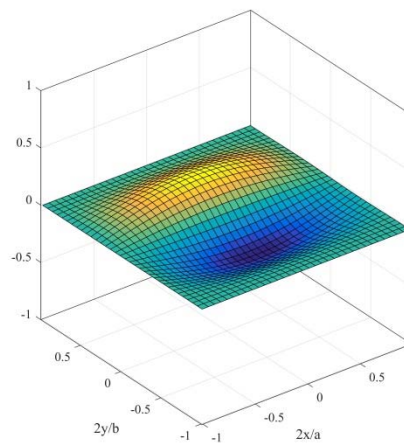
## جدول ۹- بار بحرانی کمانش ( $10^5 N$ ) $P_{cr}$ پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

تحت بار محوری ( $b/h=1.0$  و  $b/R=1$ ،  $a/b=1$ )

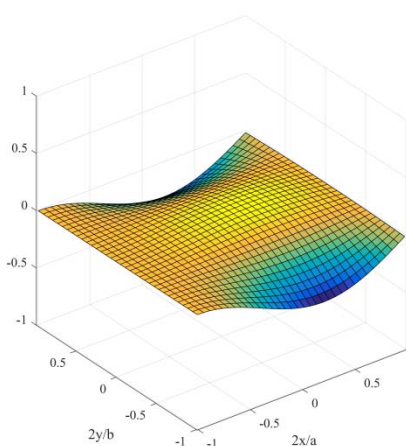
شرایط مرزی مختلف	$V_{CNT}^*$	UD	FG-X	FG-O
SSSS	0.12	4/2677	4/7897	3/5140
	0.17	7/0166	7/9879	5/5407
	0.28	8/4235	10/4804	7/1799
SFSF	0.12	1/3602	1/7476	0/9769
	0.17	2/1096	2/7060	1/5379
	0.28	2/9489	3/9813	2/0315
SCSC	0.12	5/1340	5/7672	3/6875
	0.17	7/9972	9/6184	5/8192
	0.28	10/3317	12/2646	7/5587
CFSF	0.12	2/1106	2/8551	1/3546
	0.17	3/2013	4/3285	2/0777
	0.28	4/7195	6/5895	2/9224
CFCF	0.12	3/5044	4/8713	2/0829



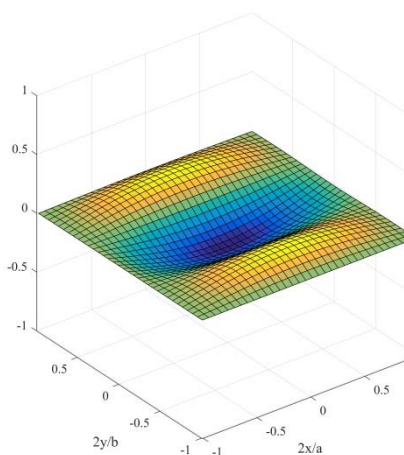
(ب)



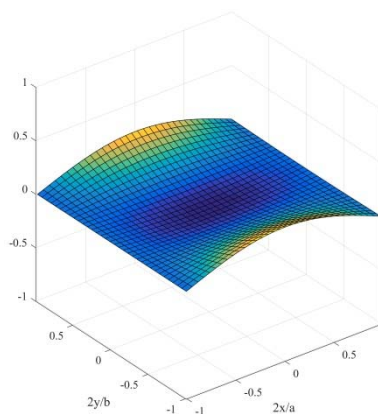
(الف)



(ج)



(پ)



(د)

شکل ۴- کمانش پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با الگوی توزیع FG-X و  $V_{CNT}^* = 0.28$  تحت بار محوری با شرایط مرزی مختلف (الف) SCSC (ب) CFCF (پ) SSSS (ج) CFSF (د) SFSF

۳/۱۲۸۳	۷/۳۰۶۹	۵/۲۴۳۴	۰/۱۷
۴/۶۱۹۸	۱۱/۲۹۵۳	۷/۹۷۱۶	۰/۲۸

از طرفی دیگر با کاهش شعاع کمانش و با افزایش نسبت طول به شعاع ( $a/R$ ) نیز مقدار بار بحرانی کمانش افزایش خواهد یافت. در بررسی شرایط مرزی مختلف در نظر گرفته شده، همانطور که انتظار می‌رود، با افزایش پایداری پنل استوانه‌ای، میزان بار بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد. بیشترین میزان پایداری و در نتیجه افزایش بار بحرانی کمانش مربوط به شرایط مرزی (SCSC) و بعد از آن به ترتیب مربوط به شرایط مرزی SSSS، CFCF، CFSF، SFSF می‌باشد.

## مراجع

- [1] Thostenson, E.T., "Advances in the Science and Technology of Carbon Nanotubes and their Composites: A Review", *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 61, pp. 1899–1912, (2001).
- [2] Thostenson, E.T., "Nanocomposites in Context", *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 65, pp. 491–516, (2005).
- [3] Coleman, J.N., "Small But Strong: A Review of the Mechanical Properties of Carbon Nanotube–polymer Composites", *Carbon*, Vol. 44, pp. 1624–1652, (2006).
- [4] Shen, H.S., "Nonlinear Bending of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Plates in Thermal Environments", *Composite Structures*, Vol. 91, pp. 9–19, (2009).
- [5] Shen, H.S., and Zhang, C.L., "Thermal Buckling and Postbuckling Behavior of Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Plates", *Material Design*, Vol. 31, pp. 3403–3411, (2010).
- [6] Mehrabadi, S.J., "Mechanical Buckling of Nanocomposite Rectangular Plate Reinforced by Aligned and Straight Single-walled Carbon Nanotubes", *Composite Part B-Engineering*, Vol. 43, pp. 2031–2240, (2012).
- [7] Lei, Z.X., "Buckling Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Plates using the Element-free Kp-Ritz Method", *Compos. Struct.*, Vol. 98, pp. 160–168, (2013).
- [8] Zhang, L.W., "An Element-free IMLS-Ritz Framework for Buckling Analysis of FG-CNT Reinforced Composite Thick Plates Resting on Winkler Foundation", *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 58, pp. 7–17, (2015).
- [9] Lei, Z.X., "Buckling of FG-CNT Reinforced Composite Thick Skew Plates Resting on Pasternak Foundations Based on an Element-free Approach", *Appl. Math. Comput.*, Vol. 266, pp. 773–791, (2015).
- [10] Zhang, L.W., "Buckling Analysis of FG-CNT Reinforced Composite Thick Skew Plates using an Element-free Approach", *Compos. Part B*, Vol. 75, pp. 36–46, (2015).
- [11] Liew, K.M., "Postbuckling of Carbon Nanotube-reinforced Functionally Graded Cylindrical Panels under Axial Compression using a Meshless Approach", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 268, pp. 1–17, (2013).

- [12] Zhang, L.W., and Liew, K.M., "Postbuckling Analysis of Axially Compressed CNT Reinforced Functionally Graded Composite Plates Resting on Pasternak Foundations using an Element-free Approach", *Compos. Struct.*, Vol. 138, pp. 40–51, (2016).
- [13] Zhang, L.W., "Postbuckling of Carbon Nanotube Reinforced Functionally Graded Plates With Edges Elastically Restrained Against Translation and Rotation under Axial Compression", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 298, pp. 1–28, (2016).
- [14] Shen, H. S., "Postbuckling of Nanotube-reinforced Composite Cylindrical Panels Resting on Elastic Foundations Subjected to Lateral Pressure in Thermal Environments", *Eng. Struct.*, Vol. 122, pp. 174–183, (2016).
- [15] Shen, H. S., and Xiang, Y., "Postbuckling of Axially Compressed Nanotube-reinforced Composite Cylindrical Panels Resting on Elastic Foundations in Thermal Environments", *Compos. Part B*, Vol. 67, pp. 50–61, (2014).
- [16] Shen, H. S., and Xiang, Y., "Nonlinear Response of Nanotube-reinforced Composite Cylindrical Panels Subjected to Combined Loadings and Resting on Elastic Foundations", *Compos. Struct.*, Vol. 131, pp. 939–950, (2015).
- [17] Shen, H. S., and Xiang, Y., "Thermal Postbuckling of Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Panels Resting on Elastic Foundations", *Compos. Struct.*, Vol. 123, pp. 383–392, (2015).
- [18] Mirzaei, M., and Kiani, Y., "Thermal Buckling of Temperature Dependent FG-CNT Reinforced Composite Plates", *Meccanica*, Vol. 51, pp. 2185–2201, (2016).
- [19] Kiani, Y., "Thermal Post-buckling of FG-CNT Reinforced Composite Plates", *Composite Structures*, Vol. 159, pp. 299–306, (2017).
- [20] Kiani, Y., "Free Vibration of FG-CNT Reinforced Composite Skew Cylindrical Shells using the Chebyshev-Ritz Formulation", *Composites Part B*, Vol. 147, pp. 169–177, (2018).
- [21] Garcia, E. M., "Buckling Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Curved Panels under Axial Compression and Shear", *Compos. Part B*, Vol. 108, pp. 243–256, (2017).
- [22] Mirzaei, M., and Kiani, Y., "Thermal Buckling of Temperature Dependent FG-CNT Reinforced Composite Conical Shells", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 47, pp. 42–53, (2015).
- [23] Shen, H.S., "Postbuckling of Nanotube-reinforced Composite Cylindrical Shells in Thermal Environments, Part I: Axially-loaded Shells", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 2096–2108, (2011).
- [24] Jam, J.E., and Kiani, Y., "Buckling of Pressurized Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Conical Shells", *Composite Structures*, Vol. 125, pp. 586–595, (2015).
- [25] Jam, J.E., and Kiani, Y., "Low Velocity Impact Response of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Beams in Thermal Environment", *Composite Structures*, Vol. 132, pp. 35–43, (2015).

- [26] Mirzaei, M., and Kiani, Y., "Snap-through Phenomenon in a Thermally Postbuckled Temperature Dependent Sandwich Beam with FG-CNTRC Face Sheets", *Composite Structures*, Vol. 134, pp. 1004–1013, (2015).
- [27] Reddy, J.N., "*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*", Theory and Application, CRC Press, Boca Raton, (2003).
- [28] Han, Y., and Elliott, J., "Molecular Dynamics Simulations of the Elastic Properties of Polymer/Carbon Nanotube Composites", *Computational Materials Science*, Vol. 39, pp. 315–323, (2007).
- [29] Jaunky, N., and Knight, N.F., "An Assessment of Shell Theories for Buckling of Circular Cylindrical Laminated Composite Panels Loaded in Axial Compression", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 36, pp. 3799–3820, (1999).
- [30] Tung, H.V., and Duc, N.D., "Nonlinear Response of Shear Deformable FGM Curved Panels Resting on Elastic Foundations and Subjected to Mechanical and Thermal Loading Conditions", *Appl Math Modell*, Vol. 38, pp. 2848–2866, (2013).

### فهرست نمادهای انگلیسی

- $a$ : طول محوری پنل استوانه‌ای
- $A_{ij}$ : مؤلفه‌های سختی کششی
- $b$ : طول انحنای پنل استوانه‌ای
- $B_{ij}$ : مؤلفه‌های سختی خمشی-کششی
- $D_{ij}$ : مؤلفه‌های سختی خمشی
- $E_{11}^{CNT}$ : مدول الاستیسیته نانولوله‌های کربنی در راستای نانولوله‌ها
- $E_{22}^{CNT}$ : مدول الاستیسیته نانولوله‌های کربنی عمود بر نانولوله‌ها
- $E^m$ : مدول الاستیسیته ماده زمینه
- $E_{11}$ : مدول الاستیسیته معادل پنل استوانه‌ای در راستای  $x$
- $E_{22}$ : مدول الاستیسیته معادل پنل استوانه‌ای در راستای  $y$
- $G_{12}^{CNT}$ : مدول برشی نانولوله‌های کربنی
- $G^m$ : مدول برشی ماده‌ی زمینه
- $h$ : ضخامت پنل استوانه‌ای
- $K^e$ : ماتریس سختی الاستیک
- $K^g$ : ماتریس سختی هندسی
- $k_x$ : انحنا خمشی در جهت  $x$
- $k_y$ : انحنا خمشی در جهت  $y$
- $k_{xy}$ : انحنا پیچشی

- $Q_{ij}$ : درایه‌های ماتریس سختی  
 $R$ : شعاع متوسط پنل استوانه‌ای  
 $u$ : تغییر مکان محوری  
 $u_0$ : تغییر مکان صفحه میانی محوری  
 $V$ : تغییر مکان محیطی  
 $V_0$ : تغییر مکان صفحه میانی محیطی  
 $V_{CNT}$ : کسر حجمی نانولوله‌های کربنی  
 $V_m$ : کسر حجمی ماده زمینه  
 $W$ : تغییر مکان عرضی  
 $W_0$ : تغییر مکان صفحه میانی عرضی  
 $W_{CNT}$ : کسر جرمی نانولوله‌های کربنی

### نمادهای یونانی

- $\gamma_{xy}^0$ : کرنش برشی صفحه میانی  
 $\gamma_{xy}$ : کرنش غشایی برشی  
 $\delta U_p$ : نمو انرژی پتانسیل ناشی از کار نیرو فشاری  
 $\delta U$ : نمو انرژی پتانسیل کرنشی سازه  
 $\delta \Pi$ : نمو انرژی پتانسیل کل  
 $\epsilon_{xx}$ : کرنش غشایی محوری  
 $\epsilon_{yy}$ : کرنش غشایی محیطی  
 $\epsilon_{xx}^0$ : کرنش محوری صفحه میانی  
 $\epsilon_{yy}^0$ : کرنش محیطی صفحه میانی  
 $\eta_j$ : ضریب تأثیر  
 $\kappa$ : ضریب تصحیح برشی تئوری مرتبه اول برشی  
 $\nu_{12}$ : نسبت پواسون پنل استوانه‌ای  
 $\nu_{CNT}$ : نسبت پواسون نانولوله‌های کربنی  
 $\nu_m$ : نسبت پواسون ماده زمینه  
 $\rho_{CNT}$ : چگالی نانولوله‌های کربنی  
 $\rho_m$ : چگالی ماده زمینه  
 $\sigma_{ii}$ : تنش نرمال  
 $\tau_{ii}$ : تنش برشی  
 $\varphi_x$ : دوران صفحه میانی حول محور  $x$   
 $\varphi_y$ : دوران صفحه میانی حول محور  $y$

**Abstract**

In this study, mechanical buckling of composite cylindrical panels reinforced with single walled carbon nanotubes under axial compression is investigated. Distribution of SWCNTs across the thickness of the panel is considered to be uniform or functionally graded. Mechanical Properties of the carbon nanotube reinforced cylindrical panel are obtained by means of a modified rule of mixtures approach. The governing equations are obtained by using Hamilton's principle based on first-order shear deformation theory and considering strain-displacement linear relation. An energy based Ritz method and Chebyshev polynomials are used to obtain the critical buckling load of composite cylindrical panels. In addition, the effect of various parameters such as boundary conditions, geometrical conditions, distribution pattern across the thickness of carbon nanotubes and their Volume fraction are studied on the critical buckling load. It is shown that, FG-X pattern of SWCNTs distribution results in the maximum critical buckling load and by increasing the Volume fraction of carbon nanotubes, the critical buckling load of composite cylindrical panel increases.