حل ترموالاستیک گذرای پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم FGM بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با درنظرگرفتن اثر کرنش عمودی عرضی طبق نظریه میرسکی- هرمان

سیّدامیررضا وزیری[۱]
دانشجوی دکترا

مهدی قناد[۲]
دانشیار

محمدرضا قریب[۳]
استادیار

در این مقاله با استفاده از نظریه‌ی میرسکی- هرمان مرتبه اول و با در نظر گرفتن اثر کرنش عمودی عرضی، معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم ساخته شده از مواد FGM تحت بارگذاری حرارتی گذرا استخراج شده و جابه‌جایی و تنش برای استوانه‌ای دوسرگیردار به‌صورت تحلیلی به‌دست آمده است. معادلات با استفاده از اصل کار مجازی و روش جداسازی متغیّرها حل شده است. شرایط مرزی دمایی با درنظر گرفتن انتقال حرارت جابه‌جایی به مسئله اعمال شده‌اند. در مطالعه‌ی حاضر اثر زمان بر توزیع تنش و جابه‌جایی بررسی شده و نمودارهای مربوط با حلّ عددی مقایسه شده است.

DOI: 10.30506/ijmep.2020.92301.1455

واژه های راهنما: استوانه‌ی جدار ضخیم، مواد متغیّر تابعی (FGM)، انتقال حرارت گذرا، تئوری میرسکی- هرمان مرتبه اول، اصل کار مجازی.

۱-مقدمه

در سال‌های قبل در صنایع هوافضا از مواد سرامیکی خالص جهت پوشش‌دهی و روکش نمودن قطعات تحت اثر دمای کاری بالا استفاده می‌شد. این مواد عایق‌های بسیار خوبی بودند ولی مقاومت زیادی در مقابل تنش‌های وارد شده نداشتند، به ویژه تنش‌های پسماند در این مواد مشکلات زیادی از جمله حفره و ترک ایجاد می‌نمودند. بعدها برای حلّ این مشکل از مواد کامپوزیت لایه‌ای استفاده شد. تنش‌های حرارتی در این مواد نیز موجب پدیده‌ی لایه لایه شدن می‌گردید، با توجّه به این مشکلات طرح مادّه‌ی مرکّب که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا داشته و هم مشکل لایه لایه شدن را نداشته باشد ضرورت پیدا می‌کرد. به این ترتیب با توجه به مشکلاتی که در صنایع مختلف برای مواد تحت تنش‌های حرارتی بالا وجود داشت، دانشمندان علم مواد برای اوّلین بار مواد FG را پیشنهاد نمودند. نخستین نمونه از این مواد در سال (۱۹۸۴) در منطقه‌ی سندایی در ژاپن در آزمایشگاه هوافضای نینو تولید شد.

---

[۱] دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود Vaziri92amirreza@gmail.com
[۲] دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود Ghannad.mehdi@gmail.com
[۳] نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربت حیدریه، تربت حیدریه M.Gharib@torbath.ac.ir
تاریخ دریافت: ۹۷/۰۵/۲۹، تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۸/۱۹

مواد FG، مواد کامپوزیتی با ریزساختار ناهمگنی می‌باشد که خواص آن‌ها به طور پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این خاصیّت ویژه به‌وسیله‌ی تغییر یکنواخت در نسبت حجمی مواد تشکیل دهنده‌ی آن‌ها به‌دست می‌آید. Sugano [۱] در (۱۹۸۷) توزیع تنش در یک ورق ناهمگن با توزیع دلخواه خواص مکانیکی تحت دمای گذرا را توسط تئوری کلاسیک ورق‌ها به‌دست آوردند و تاثیرات ناهمگنی را بر تنش و دما بررسی کردند. Ootao و Tanigawa [۲] در (۱۹۹۱) توزیع تنش‌های استوانه‌ی توخالی کامپوزیتی چند لایه تحت بارگذاری حرارتی گذرا را با استفاده از تئوری لاو-کیرشهف ارائه نمودند. آن‌ها توزیع حرارت را در راستای شعاعی و طولی در نظر گرفته و برای حلّ آن از تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه‌ی کسینوسی استفاده نمودند. اسلامی وهمکاران [۳] در (۲۰۰۲) تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک استوانه‌ی توخالی FGM تحت بارهای متقارن و در (۲۰۰۳) تحت بارهای حرارتی نامتقارن [۴] در حالت پایای حرارتی را به‌دست آوردند. Ootao و Tanigawa [۵] در (۲۰۰۵) حلّ سه بعدی ورق مستطیلی FGM تحت بار حرارتی گذرا را ارائه نمودند، آن‌ها در این تحقیق توزیع خواص مکانیکی را به صورت نمایی در نظر گرفتند و معادله‌ی انتقال حرارت را با روش لاپلاس و تبدیل فوریه‌ی کسینوسی حل نمودند. حسینی و همکاران [۶] در (۲۰۰۹) حل تحلیلی استوانه‌ی جدار ضخیم FGM تحت بارگذاری حرارتی گذرا را به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی ارائه نمودند. آن‌ها خواص مکانیکی و حرارتی را به‌صورت تابع توانی در نظر گرفتند و استوانه را در حالت کرنش صفحه‌ای حل نمودند. تئوری الاستیسیته‌ی مستوی قادر به مشاهده‌ی طول و تنش‌های برشی نمی‌باشد. عسگری و اخلاقی [۷] در (۲۰۰۹) انتقال حرارت گذرای دو بعدی استوانه‌ی توخالی FGM با طول محدود را به روش اجزاء محدود ارائه نمودند و تأثیرات توزیع خواص در جهت شعاعی و طولی را بررسی نمودند.

قنّاد و زمانی‌نژاد [۸] در (۲۰۱۰) با استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم همگن و همسانگرد بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، دستگاه معادلات دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت حاصل را برای شرایط مرزی دوسر گیردار حلّ نمودند. ایشان همچنین در (۲۰۱۲) [۹] یک حل تحلیلی برای استوانه جدار ضخیم ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی ارائه نمودند آنها در این مقاله فقط به بررسی اثرات فشار داخلی و خارجی در بر روی استوانه ناهمگن پرداختند. رحمتی‌نژاد و همکاران [۱۰] در (۲۰۱۱) حلّ میدان حرارتی گذرای استوانه‌ی توخالی FGM را به وسیله‌ی روش چندلایه کردن ارائه نمودند. آن‌ها از روش چندلایه کردن که مبتنی بر تئوری‌های کامپوزیتی است برای این منظور استفاده کردند و توزیع حرارات وابسته به زمان و شعاع را ارائه نمودند. زمانی‌نژاد و همکاران [۱۱] در (۲۰۱۳) حلّ تحلیلی ترموالاستیک گذرا برای پوسته‌های استوانه‌ای چرخان همگن تحت شرایط مرزی کلی و فشار داخلی و خارجی را ارائه نمودند. آن‌ها برای حلّ معادله‌ی انتقال حرارت از روش جداسازی متغیّرها استفاده نمودند و توزیع حرارت و تنش را ارائه نمودند. نوروزی و همکاران[۱۲] در (۲۰۱۶) حل تحلیلی انتقال حرارت نامتقارن در استوانه‌ی کامپوزیتی را ارائه نمودند. آن‌ها از روش جداسازی متغیّرها و سری فوریه برای رسیدن به این مهم استفاده نمودند. قارونی و همکاران [۱۳] در (۲۰۱۶) با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم (TSDT) حلّ تحلیلی یک استوانه‌ی جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی و بارگذاری پایای حرارتی را ارائه کردند، آن‌ها توزیع خواص ناهمگنی را به صورت توانی در راستای شعاعی استوانه در نظر گرفتند. قنّاد و پرهیزکار یعقوبی [۱۴] در (۲۰۱۷) پاسخ استوانه‌ی جدار ضخیم FGM به فشار و شار حرارتی پایا در جداره‌ی داخلی استوانه را به‌دست آوردند.

در این تحقیق توزیع تنش و جابه‌جایی در یک استوانه‌ی جدار ضخیم FGM تحت بارگذاری حرارتی گذرا با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با درنظرگرفتن اثر کرنش عمودی عرضی طبق نظریه میرسکی-هرمان به‌دست آورده شده است و نتایج حلّ تحلیلی با حلّ عددی حاصل از نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است.

۲-فرمول‌بندی و روابط اساسی

در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل خطوط راست و عمود بر صفحه‌ی میانی پس از تغییر شکل راست باقی می‌مانند ولی الزاماً عمود نیستند، این بدین معنی است که در مقایسه با تئوری‌های دیگر مانند تئوری الاستیسیته‌ی مستوی از کرنش و تنش برشی صرف‌نظر نمی‌شود. میرسکی و هرمان [۱۵] در (۱۹۵۸) با به کارگیری نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، حل پوسته های استوانه‌ای ضخیم از مواد همگن و همسانگرد را ارائه کردند. بر طبق این نظریه مطابق شکل (۱)، فاصله‌ی هر نقطه از پوسته از محور تقارن (r)، برابر است با مجموع شعاع صفحه‌ی میانی(R) و فاصله‌ی آن نقطه از صفحه میانی (z).

$$\boldsymbol{r = R + z - h/2 \le z \le h/2} \tag{۱}$$

h ضخامت و L طول استوانه است.

$$\boldsymbol{0 \le x \le l} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{h = r_0 - r_i} \tag{۲}$$

براساس نظریه الاستیسیته‌ی مستوی جابه‌جایی شعاعی استوانه برابر است با:

$$\boldsymbol{u_r = c_1 r + \frac{c_2}{r} = c_1(R+z) + \frac{c_2}{R+z}} \tag{۳}$$

با توجه به شرط $\left|\frac{z}{R}\right| < 1$ و به کمک بسط تیلور جابه‌جایی شعاعی استوانه برابر است با:

$$\begin{aligned} u_r &= c_1(R+Z) + \frac{c_2}{R}\left(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} + \cdots\right) \\ &= \left(C_1 R + \frac{c_2}{R}\right) + \left(c_1 - \frac{c_2}{R^2}\right) z + \frac{c_2}{R^3} z^2 \end{aligned} \tag{۴}$$

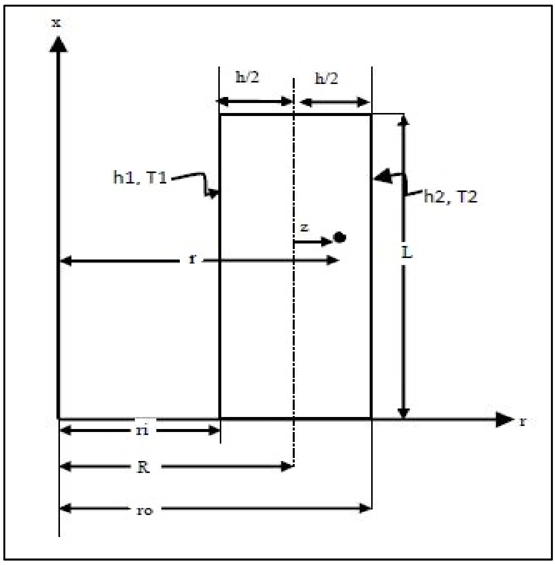
در خصوص همگرایی تئوری بحث شده به ازای دمای ثابت، جابه‌جایی شعاعی مرکز استوانه واقع بر جدار داخلی به ازای مقادیر مختلف h/R محاسبه و با روش عددی (FEM) مقایسه شده است. اپک چی و همکاران [۱۶] در (۲۰۰۳) چنین روندی را مورد بررسی قرار دادند. بر طبق بررسی آن‌ها گراف زیر برای بررسی میزان همگرایی نظریه میرسکی- هرمان ارائه شده است.

در تئوری تغییر شکل برشی بردار جابه‌جایی در حالت کلّی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

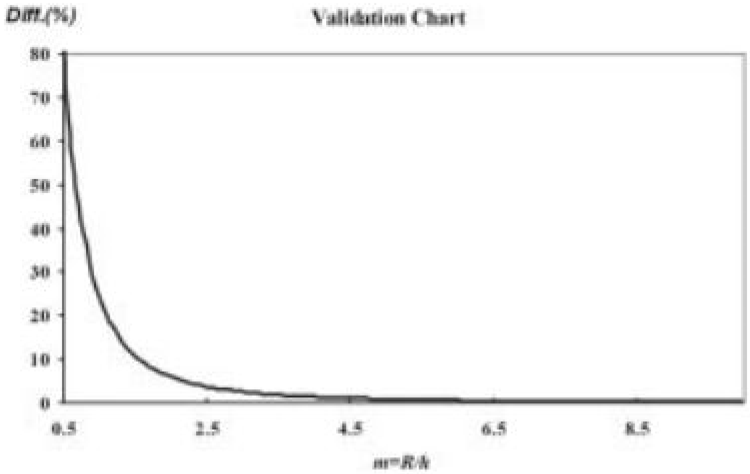
$$\boldsymbol{\vec{U} = \overrightarrow{U_0} + \overrightarrow{U_1} z + \overrightarrow{U_2} z^2 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \overrightarrow{U_m}\, z^m} \tag{۵}$$

بر اساس تقریب مرتبه یک (نظریه میرسکی- هرمان مرتبه اول) میدان جابه‌جایی به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود[۱۵].

$$\boldsymbol{\begin{Bmatrix} U_x \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_0 \\ \psi_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \psi_1 \end{Bmatrix} z} \tag{۶}$$



شکل ۱- پروفیل استوانه‌ی جدار ثابت تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی گذرا



شکل ۲- خطای نسبی جابه‌جایی شعاعی به ازای مقادیر مختلف R/h

تانسور کرنش در حالت تغییر شکل‌های بی‌اندازه کوچک به صورت معادله‌ی (۷) می‌باشد و میدان کرنش بر اساس روابط سینماتیک در حالت تقارن محوری عبارتند از:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[(\vec{\nabla}\vec{U}) + (\vec{\nabla}\vec{U})^T\right] \tag{۷}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial U_x}{\partial x} = \acute{\phi}_0 + \acute{\phi}_1 z \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{U_z}{r} = \dfrac{1}{R+z}(\psi_0 + \psi_1 z) \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial U_z}{\partial z} = \psi_1 \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\partial U_X}{\partial Z} + \dfrac{\partial U_z}{\partial x} = (\phi_1 + \acute{\psi}_0) + z\acute{\psi}_1 \end{cases} \tag{۸}$$

منتجه‌های مرتبه‌ی صفر و یک تنش برابرند با:

$$\{N_x, N_\theta, N_z, N_{xz}\} = \int \left\{\sigma_x, \frac{\sigma_\theta}{1+{z}/{R}}, \sigma_z, \tau_{xz}\right\}\left(1+\frac{z}{R}\right)dz$$
$$\{M_x, M_\theta, M_z, M_{xz}\} = \int \left\{\sigma_x, \frac{\sigma_\theta}{1+{z}/{R}}, \sigma_z, \tau_{xz}\right\}\left(1+\frac{z}{R}\right)z\,dz \tag{۹}$$

۲-۱- تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن

بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta U = \delta W \tag{۱۰}$$

براساس روابط رفتاری برای مواد ناهمگن و همسانگرد و با در نظر گرفتن کرنش‌های حرارتی، تنش‌ها بر جسب مقادیر کرنش عبارتند از:

$$\begin{cases} \sigma_i = \lambda E(r)\left[(1-\upsilon)\varepsilon_i + \upsilon\left(\varepsilon_j+\varepsilon_k\right) - \alpha(r)(1+\upsilon)\Delta T(r,t)\right] \\ \tau_{xz} = \dfrac{1-2\upsilon}{2}\lambda E\gamma_{xz} \qquad\qquad i \neq j \neq k \\ \lambda = \dfrac{1}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \end{cases} \tag{۱۱}$$

با توجه به تعریف انرژی کرنشی و جایگذاری معادله‌ی (۱۱) در این معادلات انرژی کرنشی بر حسب کرنش به‌دست خواهد آمد.

$$\begin{cases} U = \iiint\limits_V U^* dV\,, dV = rdrd\theta dx = (R+z)dxd\theta dz \\ U^* = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_x\sigma_x + \varepsilon_\theta\sigma_\theta + \varepsilon_z\sigma_z + \tau_{xz}\gamma_{xz}) \\ U = \dfrac{1}{2}E(r)\lambda\Big[(1-\upsilon)\left(\varepsilon_x^2+\varepsilon_\theta^2+\varepsilon_x^2\right) + 2\upsilon(\varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta\varepsilon_z) \\ \qquad + \dfrac{1-2\upsilon}{2}\gamma_{xz}^2 - a(r)\Delta T(r,t)(1+\upsilon)(\varepsilon_x+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)\Big] \end{cases} \tag{۱۲}$$

در صورت عدم وجود نیروی خارجی $\delta W = 0$ خواهد شد. با انتگرال‌گیری از معادله‌ی (۱۲) در راستای طولی و شعاعی استوانه و استفاده از اصل کار مجازی معادلات تعادل یک استوانه‌ی FGM تحت بارگذاری حرارتی گذرا بر حسب منتجه‌های تنش را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\begin{cases} RN_x' = 0 \\ RM_x' - RN_{xz} = 0 \\ RN_{xz}' - N_\theta = 0 \\ RM_{xz}' - M_\theta - RN_z = 0 \end{cases} \tag{۱۳}$$

برای تبیین شرایط مرزی مورد نظر رابطه‌ی زیر همیشه برقرار است و در دو انتهای استوانه صفر می‌باشد.

$$R[N_x\delta\phi_0 + M_x\delta\phi_1 + N_{xz}\delta\psi_0 + M_{xz}\delta\psi_1]_0^L = 0 \tag{۱۴}$$

۲-۲- توزیع ناهمگنی خواص مکانیکی و حرارتی

در استوانه‌های تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد (FGM)، خواص مکانیکی از قبیل مدول کشسانی (E)، نسبت پواسون (ν) و چگالی (ρ) تابعی از شعاع استوانه می‌باشند. در اکثر تحلیل‌ها بالاخص در این بررسی به علّت تغییرات جزئی، نسبت پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود. همچنین ثابت‌های انتقال حرارت از جمله ضریب انبساط حرارتی (α)، ضریب رسانش گرمایی (K) و ظرفیت گرمایی ویژه (C) نیز تابعی از شعاع استوانه درنظر گرفته شده است. در این تحلیل، تمام خواص مکانیکی و حرارتی ذکر شده به صورت توزیع توانی در راستای شعاع استوانه در نظر گرفته شده است.

$$K = K_i \left(\frac{r+z}{r_i}\right)^{n_1} \tag{۱۵}$$

$$\rho = \rho_i \left(\frac{r+z}{r_i}\right)^{n_2} \tag{۱۶}$$

$$C = C_i \left(\frac{r+z}{r_i}\right)^{n_3} \tag{۱۷}$$

$$E = E_i \left(\frac{r+z}{r_i}\right)^{n_4} \tag{۱۸}$$

$$\alpha = \alpha_i \left(\frac{r+z}{r_i}\right)^{n_5} \tag{۱۹}$$

که E_i، α_i، K_i، C_i، ρ_i به ترتیب مدول کشسانی، ضریب انبساط حرارتی، ضریب رسانش حرارتی، ظرفیت گرمایی ویژه و چگالی در لایه‌ی داخلی استوانه و n_i (i=1,2,3,4,5) ثابت ناهمگنی مادّه می‌باشد.

۲-۳- حل معادله‌ی انتقال حرارت گذرای استوانه‌ی ناهمگن FG [۱۷]

معادله‌ی انتقال حرارت گذرای یک‌بعدی برای یک استوانه‌ی جدار ضخیم متقارن محوری در غیاب منبع حرارتی، براساس قانون فوریه به شکل زیر می‌باشد.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(Kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{۲۰}$$

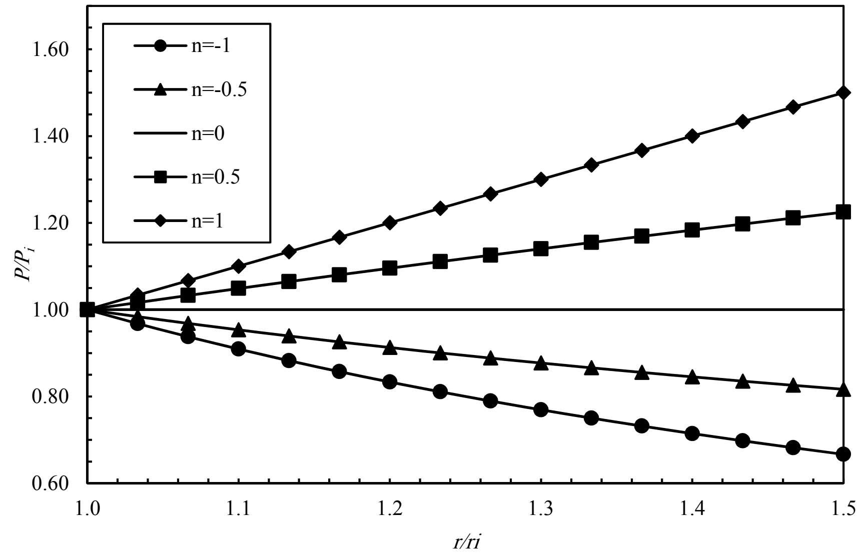
شرایط مرزی و اولیّه در حالت کلّی به شکل زیر درنظر گرفته می‌شوند.

$$B.c.\begin{cases} c_{11}T(r_i,t) + c_{12}\dfrac{\partial T}{\partial r}(r_i,t) = g_1 \\ c_{21}T(r_0,t) + c_{22}\dfrac{\partial T}{\partial r}(r_0,t) = g_2 \end{cases}$$
$$I.c.\ \{T(r,0) = T_i(r) \tag{۲۱}$$

C_{ij} و g_i (i,j=1,2) ثابت‌هایی وابسته به شرایط مرزی و $T_i(r)$، شرط اولیّه‌ی مسأله می‌باشند. حل معادله‌ی (۲۰) با استفاده از روش جداسازی متغیرها، تابع بسل تعمیم یافته و بسط تابع ویژه به‌دست می‌آید.

در ابتدا شرایط مرزی ناهمگن به شرایط مرزی همگن تبدیل شده است، برای این کار تابع انتقال حرارت $T(r,t)$ به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$T(r,t) = T_h(r,t) + T_s(r) \tag{۲۲}$$



شکل ۳- توزیع بی‌بعد خواص دلخواه در راستای شعاع

با قرار دادن معادله‌ی (۲۲) درمعادله (۲۰) عبارت زیر به‌دست می‌آید.

$$\rho c\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(Kr\left(\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial r}+\frac{\partial T_s(r)}{\partial r}\right)\right) \quad (۲۳)$$

معادله‌ی (۱۹) را می‌توان به‌صورت دو معادله مجزا تفکیک نمود.

$$\begin{cases}\rho c\dfrac{\partial T_h(r,t)}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 T_h(r,t)}{\partial r^2}+\left(\dfrac{\partial k}{\partial r}+\dfrac{k}{r}\right)\dfrac{\partial T_h(r,t)}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(Kr\dfrac{\partial T_s(r)}{\partial r}\right)=0\end{cases} \quad (۲۴)$$

شرایط مرزی برای معادله‌ای که دارای عبارت T_s است مطابق شرایط (۲۵) تعریف می‌شود.

$$\begin{cases}c_{11}T_s(r_i)+c_{12}\dfrac{\partial T_s}{\partial r}(r_i)=g_1\\ c_{21}T_s(r_0)+c_{22}\dfrac{\partial T_s}{\partial r}(r_0)=g_2\end{cases} \quad (۲۵)$$

با دو بار انتگرال‌گیری از قست دوم معادله‌ی (۲۴) تابع T_s به‌دست آمده و با اعمال شرایط مرزی (۲۵) ثابت‌های C_1 و C_2 به‌دست می‌آیند.

$$C_1=\frac{g_1c_{21}-g_2c_{11}}{c_{11}c_{21}r_1^{-n_1}-r_0^{-n_1}+n_1c_{22}c_{11}r_0^{-n_1-1}-c_{12}c_{21}r_i^{-n_1-1}}$$
$$C_2=\frac{g_1-c_1c_{11}r_i^{-n_1}-c_{12}n_1r_i^{-n_1-1}}{c_{11}} \quad (۲۶)$$

شرایط مرزی و اولیّه‌ی مربوط به تابع T_h به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases} c_{11}T_h(r_i,t) + c_{12}\dfrac{\partial T_h}{\partial r}(r_i,t) = 0 \\ c_{21}T_h(r_0,t) + c_{12}\dfrac{\partial T_h}{\partial r}(r_0,t) = 0 \end{cases}$$
$$T_h(r,0) = T_i(r) - T_s(r) \qquad (۲۷)$$

قسمت اوّل معادله‌ی (۲۴) با استفاده از قوانین جداسازی متغیّر به‌صورت زیر قابل حل می‌باشد.

$$T_h(r,t) = f(r)g(t) \qquad (۲۸)$$

$$\frac{1}{g(t)}\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \frac{1}{\rho c}\left(\frac{k}{f(r)}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{k}{r}\right)\frac{1}{f(r)}\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right) \qquad (۲۹)$$

$$\begin{cases} K\dfrac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \left(\dfrac{\partial k}{\partial r} + \dfrac{k}{r}\right)\dfrac{\partial f(r)}{\partial r} + S^2\rho c f(r) = 0 \\ \dfrac{\partial g(t)}{\partial t} + S^2 g(t) = 0 \end{cases} \qquad (۳۰)$$

در نهایت تابع $T_h(r,t)$ به شکل زیر به‌دست می‌آید.

$$T_h(r,t) := r^{-p}\left[d_1 J_{\frac{q}{x}}(0) + d_2 Y_{\frac{q}{x}}(0)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-p}\left[A_n J_{\frac{q}{x}}\left(s'^{r^x}\right) + B_n Y_{\frac{q}{x}}\left(s'^{r^x}\right)\right] e^{-s_n^2 t} \qquad (۳۱)$$

که:

$$q = \sqrt{p^2 - \beta^2} = p \qquad (۳۲)$$

$$\frac{\alpha}{x} = s' \qquad (۳۳)$$

$$p = q = \frac{n_1}{2} \qquad (۳۴)$$

$$x = \frac{2 - n_1 + n_2 + n_3}{2} \qquad (۳۵)$$

$$s'_n = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{r_1^{n_1-n_2-n_3} s_n^2 \rho_1 c_1}{k_1}} \qquad (۳۶)$$

با اعمال شرایط مرزی (۳۰) بر روی معادله‌ی $T_h(r,t)$ معادله‌ی مشخصه‌ی مربوط به یک مسأله‌ی مقدار ویژه به دست می‌آید.

$$c_{22} x s'_n r_0^{x-1} f_{\frac{q}{x}+1}(s'_n, r_0^x) - c_{21} f_{\frac{q}{x}}(s'_n, r_0^x) = 0$$
$$f_{\frac{q}{x}}(s'_n, r^x) = J_{\frac{q}{x}}(s'_n, r^x)\left[c_{11} Y_{\frac{q}{x}}(s'_n r_i^x) - c_{12} s'_n x r_i^{x-1} Y_{\frac{q}{x}+1}(s'_n r_i^x)\right] \qquad (۳۷)$$
$$- Y_{\frac{q}{x}} s'_n r^x\left[c_{11} J_{\frac{q}{x}}(s'_n r_i^x) - c_{12} s'_n x r_i^{x-1} J_{\frac{q}{x}+1}(s'_n r_i^x)\right]$$

در نتیجه می‌توان تابع $T_h(r,t)$ را به‌صورت زیر تعریف نمود که ضریب ثابت A_nرا می‌توان از بسط تابع ویژه و قانون اشتورم-لیوویل به‌دست آورد.

$$T_h(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-p} f_{\frac{q}{x}}(s'_n, r^x) e^{-s_n^2 t} \qquad (۳۸)$$

در نهایت تابع توزیع انتقال حرارت گذرای $\mathrm{T}(\mathrm{r},\mathrm{t})$ به‌دست می‌آید.

$$T(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-p} f_{\frac{q}{x}}\ (s_n', r^x)\, e^{-s_n^2 t}+c_1 r^{-n_1}+c_2 \tag{۳۹}$$

با توجه به اینکه در معادله‌ی کرنش حرارتی، عبارت توزیع اختلاف دما ظاهر می‌شود بنابراین توزیع اختلاف دما به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\Delta T(z,t)=T(z,t)-T_\infty \tag{۴۰}$$

معادلات (۹) در حقیقت یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی می‌باشند که برای حلّ آن باید نیروها و لنگرها را به منتجّه‌های تنش و با جایگذاری در روابط ساختاری به مولفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۸) بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی نوشت. در نهایت یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به‌دست می‌آید که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت.

$$[A]\frac{d^2}{dx^2}\{y\}+[B]\frac{d}{dx}\{y\}+[C]\{y\}=\{F\} \tag{۴۱}$$

که در آن بردار مجهول y شامل مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی به‌صورت رابطه‌ی زیر می‌باشد.

$$\{y\}=\{\phi_0\ \phi_1\ \psi_0\ \psi_1\}^T \tag{۴۲}$$

همچنین قسمت ناهمگن دستگاه معادلات به‌صورت بردار نیروی$\{F\}$ به‌صورت زیر نشان داده شده است.

$$\{F\}=\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_i \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{2n} \Delta T(z,t)(1+v)dz \\ -\alpha_i \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{2n} \Delta T(z,t)(1+v)(R+2z)dz \end{matrix}\right\} \tag{۴۳}$$

جملات مربوط به بارگذاری حرارتی با توجه به روابط ساختاری (۱۱) و درنظر گرفتن کرنش‌های حرارتی، در عبارت انرژی کرنشی وارد شده که نهایتاً در مؤلفه‌های سوم و چهارم قسمت ناهمگن دستگاه معادلات در نقش نیروی حجمی ظاهر می‌شوند. در دستگاه معادلات (۴۱) ماتریس‌های$[A]_{4\times4}$ و$[C]_{4\times4}$ متقارن و $[B]_{4\times4}$ پادمتقارن هستند که در ادامه درایه‌های مربوط به آن‌ها آورده شده است.

$$A_{11}=R(1-v)\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n\left(1+\frac{z}{R}\right)dz \tag{۴۴}$$

$$A_{12}=R(1-v)\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n\left(1+\frac{z}{R}\right)zdz=A_{21} \tag{۴۵}$$

$$A_{22} = R(1-v) \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left(1+\frac{z}{R}\right) z^2 dz \tag{۴۶}$$

$$A_{33} = R\mu(1-v) \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left(1+\frac{z}{R}\right) dz \tag{۴۷}$$

$$A_{34} = R\mu(1-v) \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left(1+\frac{z}{R}\right) zdz = A_{43} \tag{۴۸}$$

$$A_{44} = R\mu(1-v) \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left(1+\frac{z}{R}\right) z^2 dz \tag{۴۹}$$

$$A_{13} = A_{14} = A_{23} = A_{24} = A_{31} = A_{32} = A_{41} = A_{42} = 0 \tag{۵۰}$$

$$B_{13} = v \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n dz = -B_{31} \tag{۵۱}$$

$$B_{14} = v \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n (R+2z)dz = -B_{41} \tag{۵۲}$$

$$B_{23} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n [(v-\mu)z - R\mu]dz = -B_{32} \tag{۵۳}$$

$$B_{24} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n [R(v-\mu) + z(2v-\mu)]zdz = -B_{42} \tag{۵۴}$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{21} = B_{22} = B_{33} = B_{34} = B_{43} = B_{44} = 0 \tag{۵۵}$$

$$C_{22} = -R\mu \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left(1+\frac{z}{R}\right) dz \tag{۵۶}$$

$$C_{33} = -v \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right) / (R+z) dz \tag{۵۷}$$

$$C_{34} = -v \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n dz - (1-v) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left(\frac{z}{R+z}\right) dz = C_{43} \tag{۵۸}$$

$$C_{44} = -2v \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n z dz - (1-v) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left(\frac{z^2}{R+z}\right) dz - R(1-v) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left(1+\frac{z}{R}\right) dz \tag{۵۹}$$

$$C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{21} = C_{23} = C_{24} = C_{31} = C_{32} = C_{41} = C_{42} = 0 \tag{۶۰}$$

که در روابط فوق μ به صورت رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود و K ضریب تصحیح برشی است که برای استوانه برابر با $\frac{5}{6}$ می‌باشد.

$$\mu = \frac{K}{2}(1-2v) \tag{۶۱}$$

۲-۴- حل ترموالاستیک استوانه تحت بارگذاری حرارتی

همانطور که توضیح داده شد، دستگاه معادله‌ی (۴۱) یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت می‌باشد که اگر این دستگاه معادلات را به‌صورت رابطه‌ی (۶۱) نوشته شود دستگاه شامل حلّ خصوصی و حلّ عمومی می‌باشد.

$$A\{y''\} + B\{y'\} + C\{y\} = \{F\} \tag{۶۲}$$

$$\{y\} = \{y\}_g + \{y\}_p \tag{۶۳}$$

برای حلّ عمومی دستگاه فوق مقدار $\{y\} = \{\xi\}e^{mx}$ در سمت چپ معادله‌ی (۶۲) به عنوان حل پیشنهادی قرار داده می‌شود.

$$e^{mx}[m^2A_1 + mA_2 + A_3]\{\xi\} = \{0\} \tag{۶۴}$$

با توجه به اینکه $e^{mx} \neq 0$ می‌توان نوشت:

$$|m^2A_1 + mA_2 + A_3| = 0 \tag{۶۵}$$

از حلّ معادله‌ی فوق، مقادیر ویژه‌ی m_i محاسبه شده که به‌صورت سه جفت ریشه‌ی مزدوج غیر صفر می‌باشند. از این سه جفت ریشه، یک جفت آن عدد حقیقی و دو جفت دیگر آن نیز اعداد مختلط مزدوج می‌باشند. با قرار دادن مقادیر ویژه‌ی حاصل در معادله‌ی (۶۲)، بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه به‌دست می‌آیند. درنهایت حلّ عمومی به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^{6} C_i\{\xi\}_i e^{m_i x} \tag{۶۶}$$

برای حلّ خصوصی، قسمت ناهمگن معادله‌ی (۶۲) یعنی بردار نیروی $\{F\}$ برای یک استوانه‌ی متقارن محوری ناهمگن با ضخامت ثابت و تحت بار حرارتی گذرا، مقدار ثابتی است لذا جواب خصوصی تابعی از x نمی‌باشد؛ بنابراین می‌توان با معکوس کردن ماتریس طبق معادله‌ی زیر جواب خصوصی را به‌دست آورد.

$$[C]\{y\} = \{F\} \Rightarrow \{y\} = [C]^{-1}\{F\} \tag{۶۷}$$

بنابراین با حل دستگاه معادلات فوق به‌صورت مطالعه‌ی موردی می‌توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را به‌دست آورد. شرایط مرزی توسط رابطه‌ی (۱۴) بیان می‌شوند.

به عبارتی مقادیر $\{N_x, M_x, N_{xz}, M_{xz}\}$ و $\{\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1\}$ در دو انتهای استوانه طوری در نظر گرفته می‌شوند که همواره رابطه‌ی (۱۴) برابر صفر باشد. با داشتن شش ثابت مجهول در جواب عمومی و دو ثابت مجهول در جواب خصوصی، می‌توان با اعمال شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه شامل چهار شرط مرزی در هر سمت، هشت ثابت مجهول را محاسبه کرد. در نهایت با به‌دست آوردن ثوابت مجهول، بردار مجهول $\{y\}$ که شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی است، برحسب متغیرهای x ,z ,t به‌دست می‌آیند.

۳-بررسی نتایج

برای شرایط مرزی دوسر گیردار با توجه به رابطه‌ی (۱۴) داریم:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \phi_0 = 0, \phi_1 = 0, \psi_1 = 0, \psi_1 = 0 \\ x = L \Rightarrow \phi_0 = 0, \phi_1 = 0, \psi_1 = 0, \psi_1 = 0 \end{cases} \tag{۶۸}$$

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نتایج حلّ عددی با حلّ تحلیلی، یک استوانه با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است [۱۱]. برای تحلیل عددی این پژوهش از نرم‌افزار المان محدود ABAQUS استفاده شده است. برای المان‌بندی استوانه از المان CAX8T[1] از خانواده CoupleTemperature and Displacement استفاده شده است که هر المان از این تحلیل دارای ۸ گره می باشد. شرایط مرزی دمایی در دو لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه مدل شده است.

---

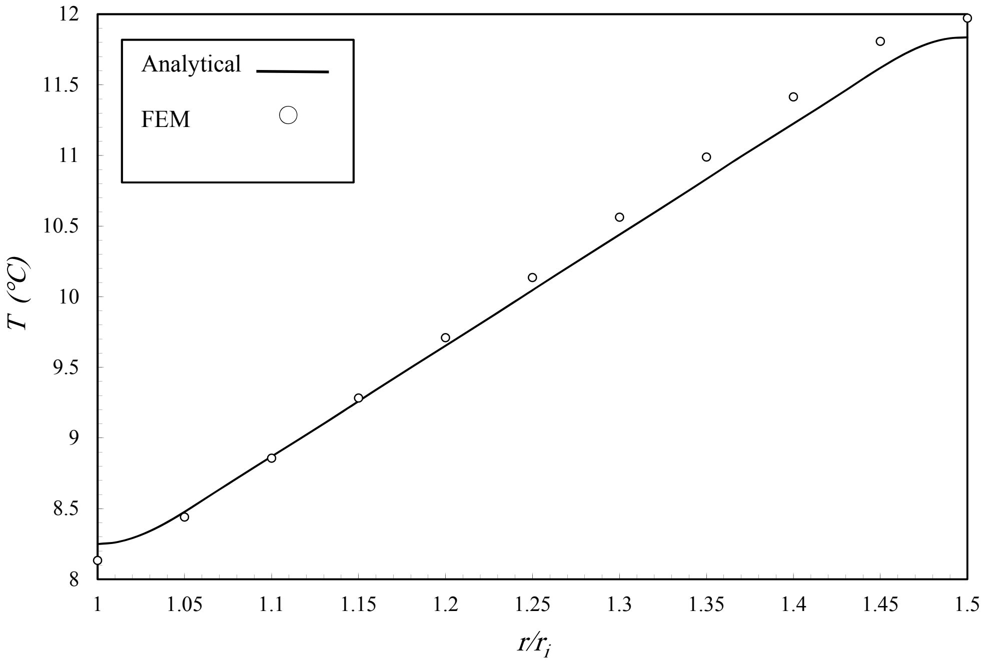
[1] A 8-node axisymmetric thermally coupled quadrilateral, bilinear displacement and temperature.

جدول ۱– مقادیر عددی مطالعه‌ی موردی استفاده شده

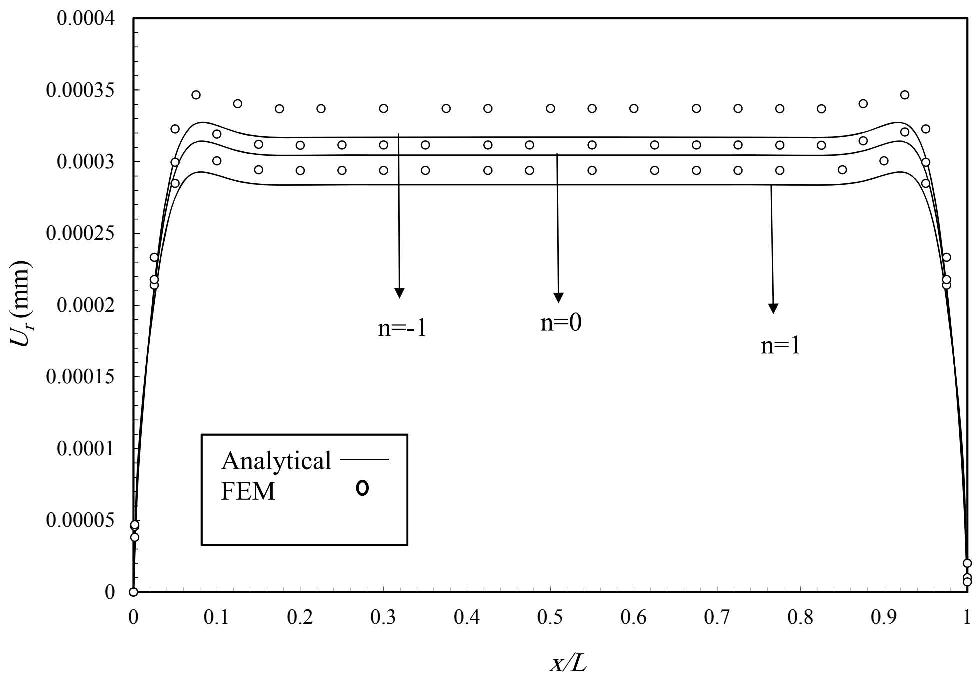
کمیت	**مقدار**
شعاع داخلی	$r_i = 0.4m$
شعاع خارجی	$r_o = 0.6m$
طول	$L = 8m$
مدول کشسانی برای جدار داخلی	$E_i = 200Gpa$
نسبت پواسون	$\nu = 0.3$
چگالی برای جدار داخلی	$\rho_i = 7854\, kg/m^3$
ضریب پخش حرارتی	$\alpha_i = 12(10^{-6})\, 1/°K$
حرارت مخصوص	$c_i = 434\, j/kg°K$
ضریب انتقال حرارت هدایتی	$k_i = 60.5\, w/m°K$
ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی لایه‌ی داخلی	$C_{11} = 6W\ /m^2K$
ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی لایه‌ی خارجی	$C_{21} = 25W/m^2K$
دمای سیال داخلی	$T_{\infty 1} = 280.15°K$
دمای سیال خارجی	$T_{\infty 2} = 9°K$

شرایط مرزی دو سر گیردار نیز با مقید کردن دو سر استوانه و بستن تمامی درجات آزادی دو سر استوانه مدل شده است. برای ایجاد خواص ناهمگنی که به‌صورت شعاعی در پوسته‌ی استوانه‌ای در نظر گرفته شده است، با تقسیم جداره‌ی استوانه به تعداد ۲۰ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مدول الاستیسیته، چگالی، حرارت مخصوص، ضریب انتقال حرارت و ضریب پخش حرارتی در هرلایه بسته به فاصله‌ی مرکز هر لایه از لایه‌ی داخلی به‌صورت تابع توانی، نهایتاً پوسته‌ی استوانه‌ای مورد نظر از ۲۰ استوانه‌ی همگن و همسانگرد به‌هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محلّ اتصال به هم پیوسته‌اند و خواص در محلّ اتصال لایه‌ها، حد میانگین چپ و راست مرز دو لایه در نظر گرفته می‌شود.

شکل (۴) و (۵) مقایسه نتایج حاصل از دو روش تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با درنظرگرفتن اثر کرنش عمودی عرضی و روش المان محدود را نشان می‌دهد؛ که از تطابق خوبی برخوردار می‌باشد. با توجه به شکل (۴) و (۵) می توان دریافت که حداکثر میزان خطای نسبی دمای حاصل از حل دقیق و حل عددی انتقال حرارت کمتر از ۰/۷ درصد و خطای نسبی جابه‌جایی حل تحلیلی و عددی کمتر از ۴ درصد می باشد که مربوط به nهای منفی است.

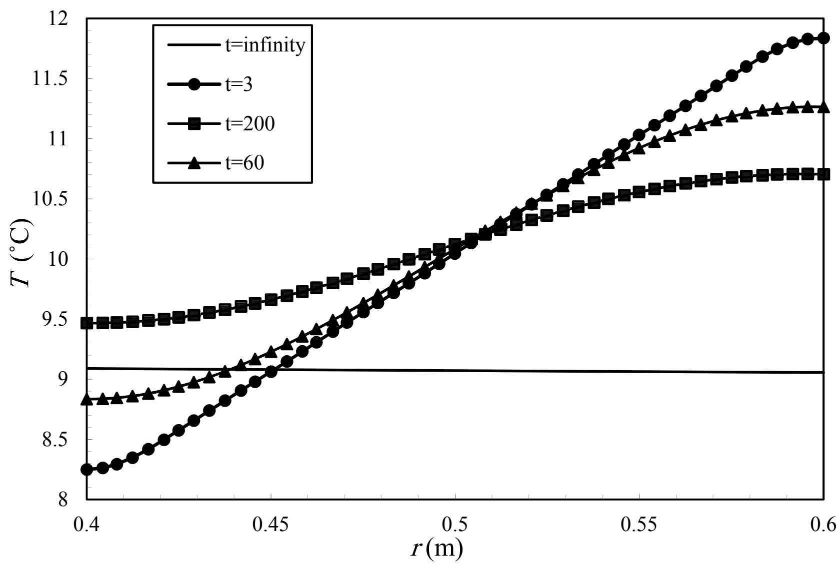


شکل ۴- مقایسه توزیع دما برای زمان t=3 s, n=0

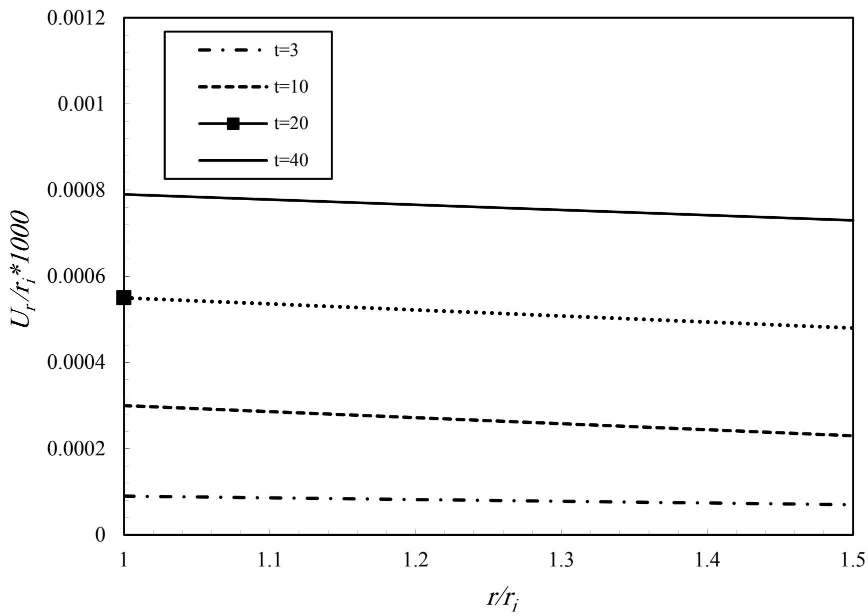


شکل ۵- مقایسه‌ی جابه‌جایی شعاعی در z=0 و t=40 s

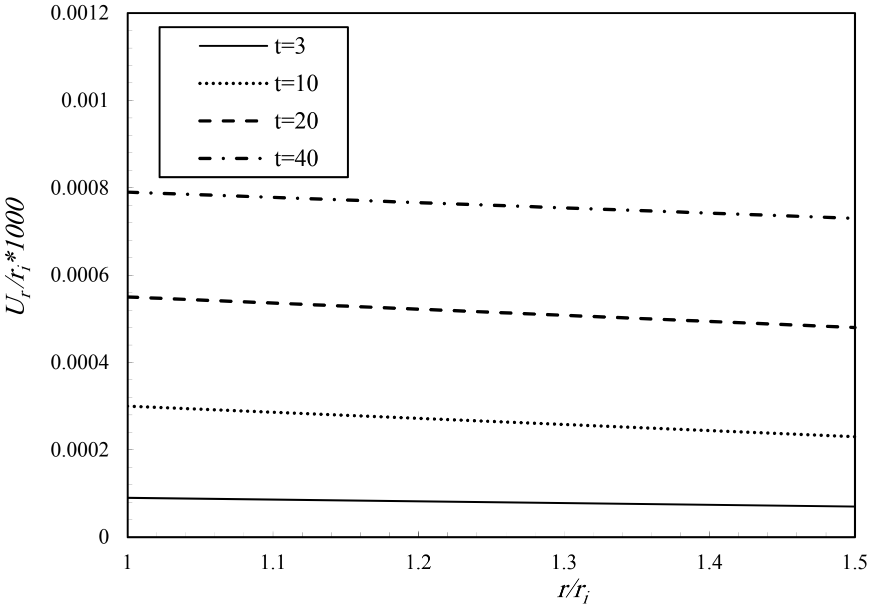
شکل (۶) توزیع دمای استوانه‌ی همگن برای زمان‌های مختلف را نشان می‌دهد. شکل (۷) و (۸) توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه را برای مادّه‌ی همگن به ازای زمان‌های مختلف و برای مادّه‌ی ناهمگن به ازای ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد. شکل (۹) توزیع بی‌بعد تنش محیطی در راستای ضخامت استوانه را برای ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد. شکل (۱۳-۱۰) جابه‌جایی شعاعی، محوری، تنش محیطی و تنش برشی را به ازای ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد. شکل (۱۴) توزیع تنش محیطی را به ازای $n=1$ برای لایه‌های مختلف استوانه نشان می‌دهد. شکل (۱۵) و (۱۶) توزیع جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی را بر اساس زمان برای ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد. شکل (۱۷) توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای طولی را برای زمان و ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



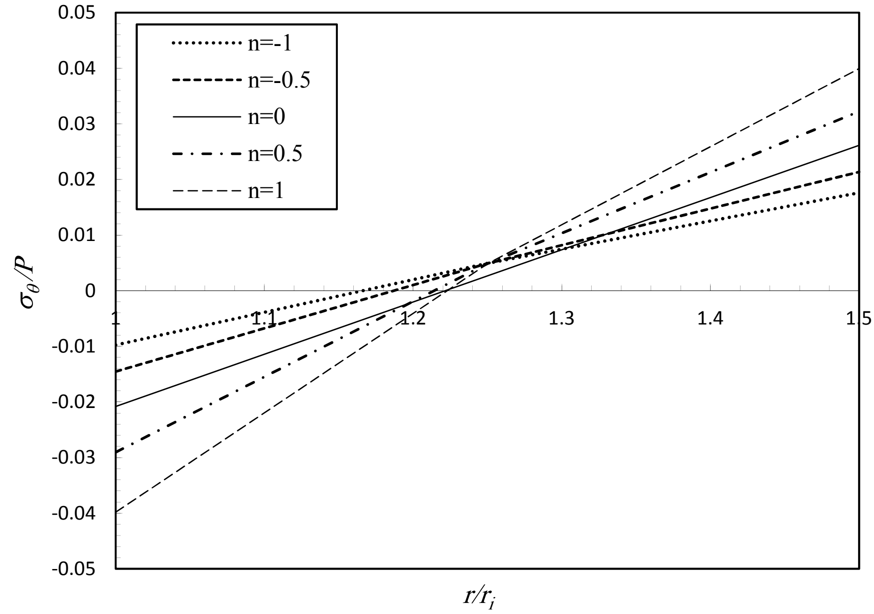
شکل ۶- مقایسه‌ی توزیع دما برای زمان‌های مختلف



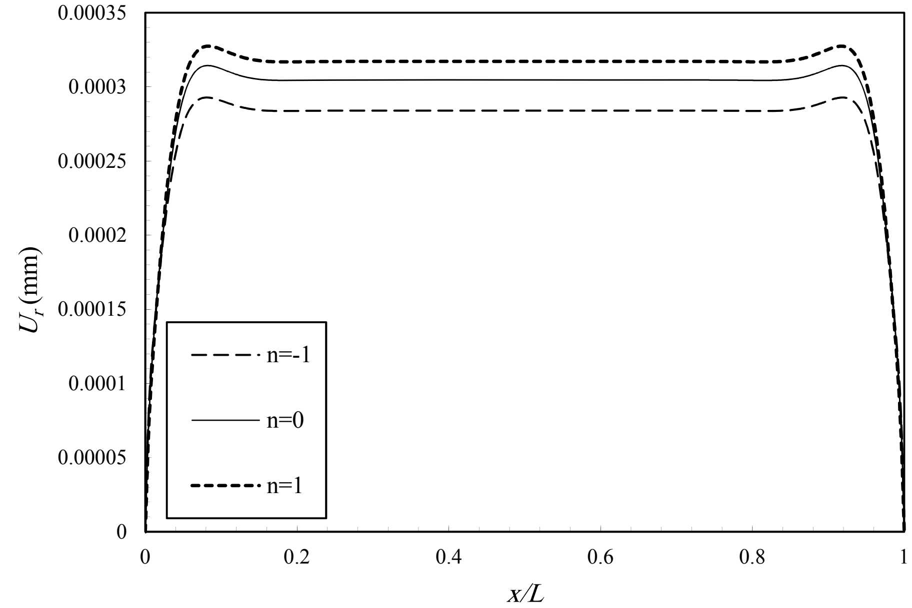
شکل ۷- توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی همگن در x=L/2



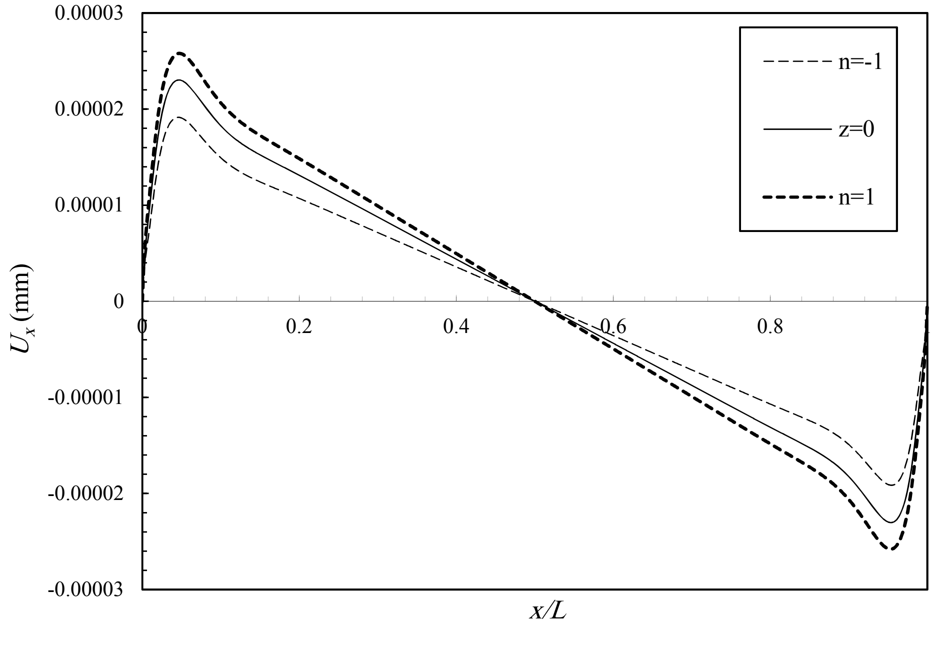
شکل ۸- توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی ناهمگن در x=L/2 و t=40 s



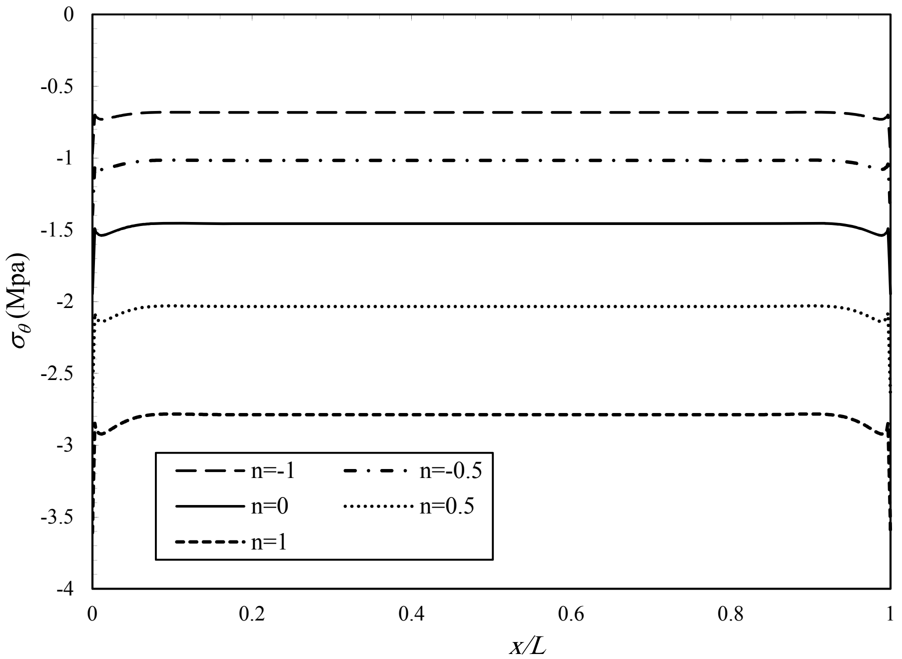
شکل ۹- توزیع تنش محیطی استوانه‌ی FGM در x=L/2 و t=40 s



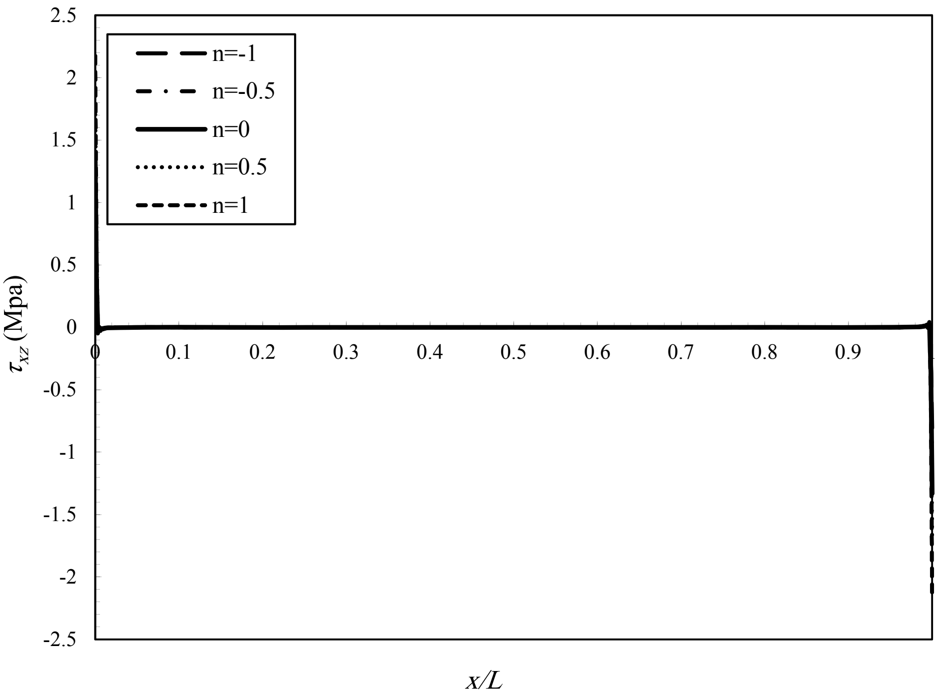
شکل ۱۰- توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن z=0 و t=40 s



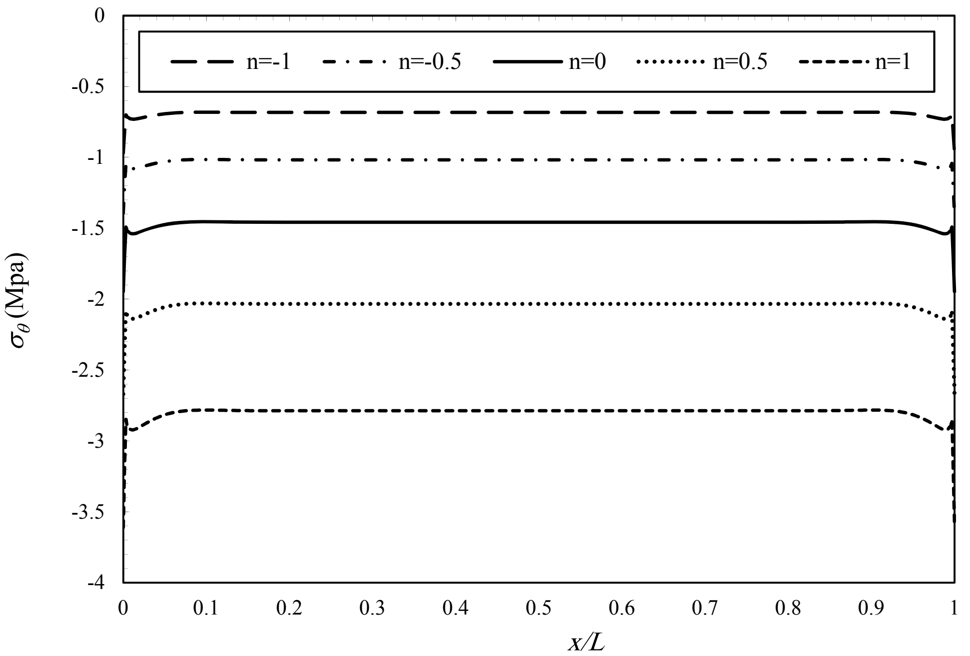
شکل ۱۱- توزیع جابه‌جایی محوری در z=0 و t=40 s



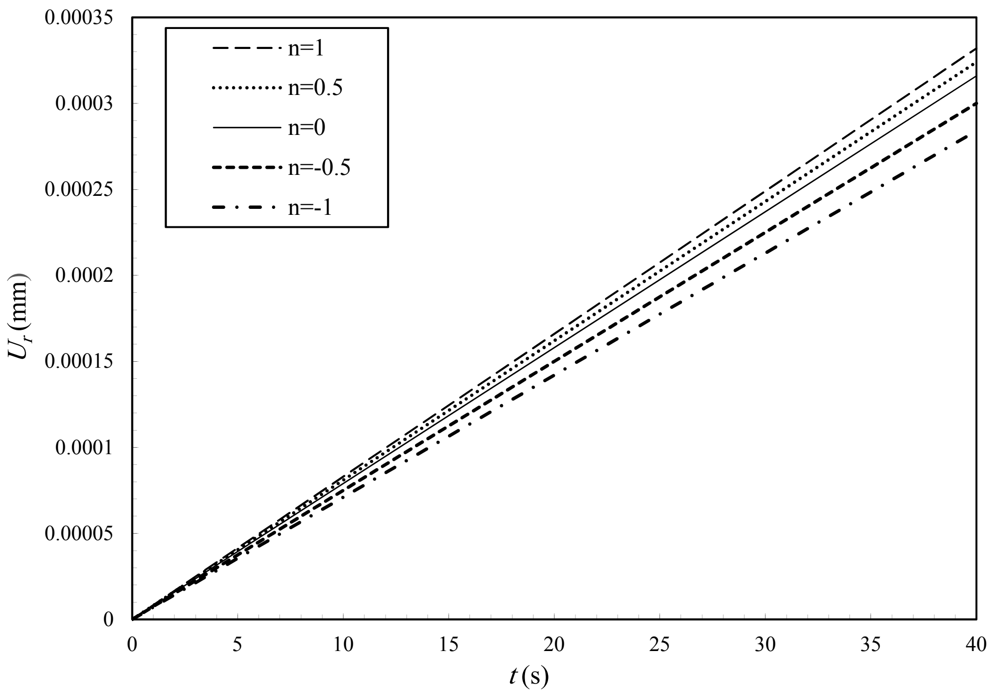
شکل ۱۲- توزیع تنش محیطی در t=40 s و z=-h/2



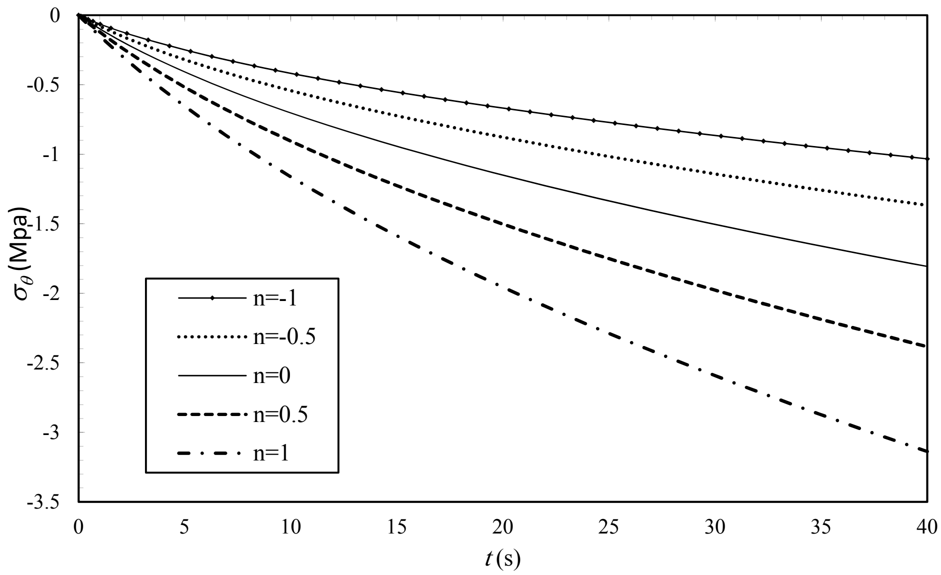
شکل ۱۳- توزیع تنش برشی در Z=0 و t=40 s



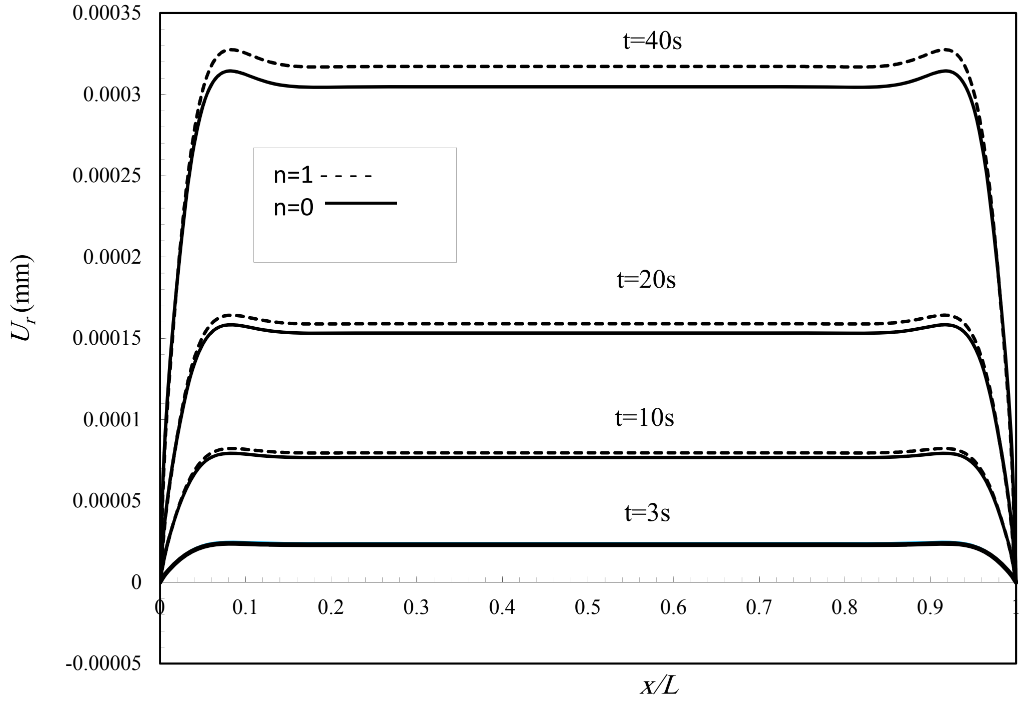
شکل ۱۴- مقایسه توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف به ازای n=1 در t=40 s



شکل ۱۵- توزیع جابه‌جایی شعاعی بر اساس زمان در x=L/2 و z=0



شکل ۱۶– توزیع تنش محیطی بر اساس زمان در x=L/2 و z=-h/2



شکل ۱۷- مقایسه‌ی توزیع جابه‌جایی شعاعی در زمان و ثابت ناهمگنی مختلف در z=0

۴-نتیجه‌گیری

با توجّه به نمودارهای به‌دست‌آمده در قسمت قبل می‌توان دریافت که به ازای n های مثبت مقادیر جابه‌جایی در مقایسه با حالت همگن مقادیر بیشتر و به ازای n های منفی مقادیر کمتری را دارا می‌باشد. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که به ازای n های مثبت یا منفی، تنش بیشینه در یک نیمه‌ی جداره استوانه، کاهش و در نیمه‌ی دیگر جداره، افزایش می‌یابد.

هرچقدر n بزرگ‌تر باشد، کاهش یا افزایش تنش یا جابه‌جایی استوانه‌ی ناهمگن نسبت به استوانه‌ی همگن بیشتر می‌شود؛ بنابراین بهتر است n بزرگ نباشد. مقادیر تنش برشی در این بارگذاری در ابتدا و انتهای استوانه مقادیری را به خود اختصاص داده است که با دور شدن از دو انتهای استوانه این مقادیر به صفر می‌رسند. دلیل این مهم شرایط مرزی دو انتهای استوانه می‌باشد. با افزایش زمان مقادیر جابه‌جایی و تنش افزایش می‌یابد، اما پس از گذشت زمان این مقادیر ثابت شده و به مقدار ثابتی میل می‌کنند. مقادیر جابه‌جایی در زمان‌های کم را می‌توان به‌صورت خطی در نظر گرفت.

مراجع

[1] Sugano, Y., "An Expression for Transient Thermal Stress in a Nonhomogeneous Plate with Temperature Variation Through Thickness", Ingenieur-Archiv, Vol. 57, No. 2, pp. 147-156, (1987).

[2] Ootao, Y., Tanigawa, Y., and Fukuda, T., "Axisymmetric Transient Thermal Stress Analysis of a Multilayered Composite Hollow Cylinder", Journal of Thermal Stresses, Vol. 14, No. 2, pp. 201-213, (1991).

[3] Jabbari, M., Sohrabpour, S., and Eslami, M., "Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder Due to Radially Symmetric Loads", International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 79, No. 7, pp. 493-497, (2002).

[4] Jabbari, M., Sohrabpour, S., and Eslami, M., "General Solution for Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder Due to Nonaxisymmetric Steady-state Loads", Trans. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 70, No. 1, pp. 111-118, (2003).

[5] Ootao, Y., and Tanigawa, Y., "Three-dimensional Solution for Transient Thermal Stresses of Functionally Graded Rectangular Plate Due to Nonuniform Heat Supply", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 47, No. 11, pp. 1769-1788, (2005).

[6] Hosseini, S. M., and Akhlaghi, M., "Analytical Solution in Transient Thermo-elasticity of Functionally Graded Thick Hollow Cylinders (Pseudo-Dynamic Analysis)", Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 32, No. 15, pp. 2019-2034, (2009).

[7] Asgari, M., Akhlaghi, M., "Transient Heat Conduction in Two-dimensional Functionally Graded Hollow Cylinder with Finite Length", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 45, No. 11, pp. 1383-1392, (2009).

[8] Ghannad, M., and Nejad, M. Z., "Elastic Analysis of Pressurized Thick Hollow Cylindrical Shells with Clamped-clamped Ends", Mechanika, Vol. 5, No. 85, pp. 11-18, (2010).

[9] Ghannad, M., and Zamani Nejad, M., "Elastic Analysis of Heterogeneous Thick Cylinders Subjected to Internal or External Pressure using Shear Deformation Theory", Acta Polytechnica Hungarica, Vol. 9, No. 6, (2012).

[10] Rahmati Nezhad, Y., Asemi, K., and Akhlaghi, M., "Transient Solution of Temperature Field in Functionally Graded Hollow Cylinder with Finite Length using Multi Layered Approach", International Journal of Mechanics and Materials in Design, Vol. 7, No. 1, pp. 71-82, (2011).

[11] Zamani Nejad, M., and Afshin, A.,"Thermoelastic Transient Response of Rotating Thick Cylindrical Shells under General Boundary Conditions", International Research Journal of Applied and Basic Sciences, Vol. 4, No. 9, pp. 2796-2809, (2013).

[12] Norouzi, M., Rahmani, H., Birjandi, A. K., and Joneidi, A. A., "A General Exact Analytical Solution for Anisotropic Non-axisymmetric Heat Conduction in Composite Cylindrical Shells", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 93, pp. 41-56, (2016).

[13] Gharooni, H., Ghannad, M., and Nejad, M. Z., "Thermoelastic Analysis of Clamped-Clamped Thick FGM Cylinders by using Third-Order Shear Deformation Theory", Latin American Journal of Solids and Structures, Vol. 13, No. 4, pp. 750-774, (2016).

[14] Ghannad, M., and Parhizkar Yaghoobi, M., “2D Thermo Elastic Behavior of a FG Cylinder under Thermomechanical Loads using a First Order Temperature Theory“, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 149, pp. 75-92, (2017).

[15] Mirsky, I., and Hermann, G., "Axially Motions of Thick Cylindrical Shells", Journal of Applied Mechanics., Vol. 25, pp. 97-102, (1958).

[16] Eipakchi, H.R., Rahimi, G.H., and Esmaeilzadeh, K., "Closed Form Solution for Displacements of Thick Cylinders with Varying Thickness Subjected to Non-uniform Internal Pressure", Structural Engineering and Mechanics, Vol. 16, pp. 731-748, (2003).

[17] Afshin, A., Zamani Nejad, M., and Dastani, K., "Transient Thermoelastic Analysis of FGM Rotating Thick Cylindrical Pressure Vessels under Arbitrary Boundary and Initial Conditions", Journal of Computational Applied Mechanics, Vol. 48, pp. 15-26, (2017).

فهرست نمادهای انگلیسی

u,ϕ: مولفه‌های جابه‌جایی محوری در FSDT

w,ψ: مولفه‌های جابه‌جایی شعاعی در FSDT

E: مدول کشسانی

ν: نسبت پواسون

ρ: چگالی

K: ضریب هدایت حرارتی

α: ضریب انبساط حرارتی

q: شار حرارتی

C: حرارت مخصوص

$h_{i,o}$: ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی

T_∞: دمای مرجع

T: دما

$\Delta T(r,t)$: توزیع اختلاف دما

t: زمان

J: تابع بسل نوع اوّل

Y: تابع بسل نوع دوم

n_i: ثابت ناهمگنی مادّه

μ, λ: ثوابت لامه

ω: سرعت دورانی

N_x, N_θ, N_z نیروهای محوری

M_x, M_θ, M_z لنگرهای خمشی

N_{xz}: نیروی برشی

M_{xz}: لنگر پیچشی

U: انرژی کرنشی

U^*: چگالی انرژی کرنشی

W: کار نیروهای خارجی

$\overline{r}$: نسبت شعاع به شعاع داخلی

h: ضخامت پوسته

L: طول استوانه

R: شعاع صفحه‌ی میانی استوانه

z: فاصله‌ی هر نقطه استوانه از صفحه میانی

k: ضریب تصحیح برشی

Abstract

In this article, analytical formulation of axisymmetric FGM thick-walled cylinders with power varying of mechanical and thermal properties under transient heating using first order shear deformation theory is presented. Equilibrium equations are derived by virtual work principles and energy method. Also, transient heat transfer equation is solved by separation of variables, generalized Bessel function and Eigen function method. General thermal boundary condition involving conduction and convection without heat source is considered.

At the end the results of analytical solution are compared with finite element method, for this aim cylinder is modeled in ABAQUS. The effects of time varying on stress and displacement distribution has been studied in this paper. According to results increasing time lead to increase the stress and displacement, by the way after a moment the stress and displacement are time independent and they become constant. The boundary condition of two ends and thermal boundary condition play a significant role in results.