

تولید مسیر برای روبات‌های افزونه صفحه ای با استفاده از اصل کنترل بهینه پونتريايگين

در اینجا بهینه سازی سینماتیکی مسیر در فضای مفصلی روبات افزونه صفحه ای انجام شده است. پاسخ بهینه مسیر هر یک از مفاصل، از طریق روابط سینماتیک معکوس در کل مسیر محاسبه شده است. با توجه به تعداد درجات افزونگی ربات، حدس اولیه ای از متغیرهای مفاصل در نظر گرفته شده و با استفاده از روابط سینماتیک معکوس، روش بهینه سازی پونتريايگين و تعیین نوع شرایط اولیه حاکم بر سیستم، حدس اولیه اصلاح و جواب بهینه برای هر یک از مفاصل در مسیر بهینه حاصل گردیده است. نتایج عددی برای مسیری نمونه در فضای کاری بوسیله الگوریتم سعی و خطای شلیک جهت دستیابی به حدس اولیه مناسب که مسئله مقدارمرزی کنترل بهینه را تا دقت قابل قبولی حل کند اجرا شده است.

DOI: 10.30506/ijmep.2020.90792.1441

عسل حقیقت پارس^۱

دانشجوی کارشناسی ارشد

کامبیز قائمی اسگوئی^۲

استادیار

فائزه فریور^۳

استادیار

واژه های راهنما: روبات افزونه، روبات صفحه ای، بهینه سازی سینماتیکی، افزونگی درجه آزادی، اصل مینیمم سازی پونتريايگين

۱- مقدمه

از منظر جبر خطی، ربات‌ها دارای عملکرد نگاشت فضای مفصلی به فضای کاری می‌باشند. بسته به تعداد پارامترهای مستقل هر فضا - بُعد فضا - نوع ربات از لحاظ درجه معینی بدست می‌آید. وقتی بُعد فضای کاری از بُعد فضای مفصلی کمتر باشد ربات افزونه خوانده می‌شود. ربات افزونه بازوی مکانیکی است که تعداد مفاصل آن از تعدادی که برای انجام یک مأموریت لازم است، بیشتر است. دنیای واقعی شامل انواع سازه‌هایی است که می‌توانند با ربات‌های افزونه مدل شوند، مثل اندام انسان اعم از دست و پا و یا سایر مخلوقات که به طور مشابه به حرکت درمی‌آیند. ربات‌های افزونه دارای پیکره‌های بی شمار در فضای مفصلی برای تعقیب مسیر مطلوب در فضای کاری می‌باشند.

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکاترونیک، واحد علوم تحقیقات، تهران، دانشگاه آزاد اسلامی تهران، ایران
assal_haghighatpars@yahoo.com

^۲ نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشکده فنی کاسپین، رضوانشهر، ایران
kambiz_osgoie@ut.ac.ir

^۳ استادیار، گروه مهندسی مکاترونیک، واحد علوم تحقیقات، تهران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد، تهران، ایران
Faezeh.farivar@gmail.com

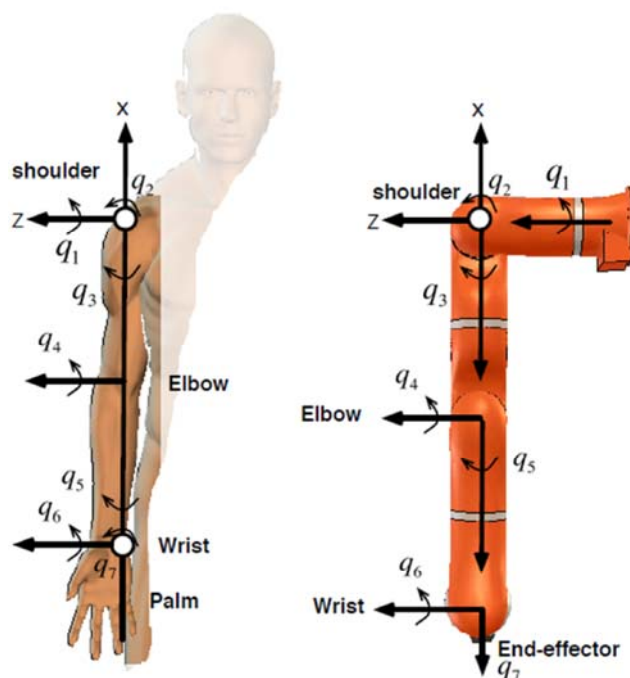
تاریخ دریافت: ۹۷/۰۵/۰۵، تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۸/۱۹

توانایی این نوع سیستم‌ها در انجام کارهایی که به لحاظ پیچیدگی، کارایی و یا دقت از عهده ربات‌های غیر افزونه خارج هستند، از طریق بکارگیری افزونگی درجات آزادی باعث ایجاد قابلیت‌های مفیدی، از قبیل افزایش تسلط و مهارت، و دوری جستن از نقاط منفرد در فضای کاری، مورد توجه محققان قرار گرفته است. لیکن از طرفی نامعینی سینماتیکی و دینامیکی این گونه سیستم‌ها، به کارگیری آنها را با مشکلاتی همراه می‌سازد. قضیه پونت‌ریاگین نتیجه اصل مینیمم سازی انرژی پتانسیل همیلتون در حرکت است که معادله لاگرانژ نیز از نتایج آن می‌باشد. این قضیه در اینجا از جنبه کنترل بهینه مورد توجه قرار گرفته است و برای بهینه سازی یک روبات صفحه ای چهار درجه آزادی با یک درجه افزونگی مورد استفاده می‌باشد. در دهه‌های اخیر، تحقیقات زیادی از قبیل بررسی سینماتیکی، بررسی دینامیکی، و کنترل و بهینه سازی مسیر بر روی ربات‌های همکار انجام شده است. سراکین و همکارانش [۱] توسعه چشمگیری از یک ربات موازی جدید با دو درجه آزادی فعال ارائه نموده اند. آنها این توسعه را بر روی بهینه سازی فضای کاری و میدان نیرو نشان دادند. همچنین گوسلین و همکارانش [۲] روشی برای تولید مسیر برای مکانیزم‌های موازی معلق توسط کابل ارائه کردند. برای این منظور آنها یک ربات دو درجه آزادی صفحه ای را مورد بررسی قرار دادند. لیو و همکارانش [۳] روشی برای تولید مسیر برای انگشتان یک ربات، بر اساس پیکربندی کنترل نقطه‌ها پیشنهاد کردند و از این روش برای بسته بندی صنعتی استفاده کردند.

مینگ و همکارانش [۴] هدفی برای تولید مسیر ربات‌های سریال- موازی هیبریدی با افزونگی درجه آزادی با بررسی بهترین عملکرد برای سفتی ارائه کرده اند. ویتنی و لجیس [۵و۶] با استفاده از شبه معکوس ماتریس ژاکوبین مفاصل، معادلات سینماتیک معکوس در سطح سرعت مفاصل را به دست آورده اند. یوچی یاما و همکارانش [۷] از چند جمله ای‌های محدود، به عنوان تقریبی برای زوایای مفاصل و تعیین ضرایب مجهول آن به وسیله اعداد تصادفی استفاده کرده اند. ناکورگا و ین [۸] برای تقریب مسیر با شرایط اولیه نامشخص، از مجموع چندجمله ای‌ها و تعداد محدودی از جملات سری فوریه بی- اسپیلاین استفاده کرده اند. کیو و ازاکی [۹] از تکنیک‌های درون یابی یکنواخت برای حل مسئله استفاده کرده اند. همچنین استفاده از تکنیک‌های بهینه سازی نیز مورد توجه می‌باشد. بر همین اساس چانگ [۱۰] برای حل معادلات، یک اندیس تعریف نمود و آن را هم زمان با قید معادلات سینماتیک، بهینه نمود. با توجه به نظریه حساب تغییرات و با به دست آوردن معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، به دست آوردن مقدار بهینه برای اندیس مورد نظر تبدیل به حل یک مسئله شرط مرزی می‌شود [۱۱-۱۳]. اندیس مورد نظر می‌تواند سینماتیکی یا دینامیکی باشد. در صورتی که پارامترهای وابسته به اندیس، سینماتیکی باشند و برای به دست آوردن مقادیر بهینه از روابط سینماتیکی استفاده شود، اندیس سینماتیکی نامیده می‌شود. اگر پارامترهای وابسته به اندیس، از نوع دینامیکی (از قبیل نیرو و گشتاور) باشند، اندیس دینامیکی نامیده می‌شود. اسگوی و همکاران [۱۴] با معرفی روبات دو بازویه موازی با قفل‌های بادامکی به ارائه روشی جهت یافتن پیکره بهینه آن در حالت استاتیکی برای اعمال نیروی حداکثر در نقطه ای از فضای کاری و در راستای از پیش تعریف شده پرداختند. جویباری و همکاران [۱۵] بهینه سازی سینماتیکی مسیر مفصلی روبات دو بازویه موازی با قفل‌های بادامکی در پیکربندی‌های مختلف، بهینه‌سازی سینماتیکی مسیر، در فضای مفصلی روبات دو بازویه موازی در پیکربندی‌های مختلف قفل شدن را به انجام رساندند.

آنها برای هر یک از حالت‌های پیکربندی یک مسیر در نظر گرفته و پاسخ بهینه مسیر هر یک از مفاصل را با مینیمم کردن یک تابع هدف در کل مسیر محاسبه نمودند. با توجه به تعداد افزونگی درجه آزادی در حالت‌های مختلف پیکربندی، حدس اولیه‌ای از متغیرها در نظر گرفته شده و با استفاده از اصل مینیمم سازی پونتریاگین و تعیین نوع شرایط اولیه حاکم بر سیستم، حدس اولیه اصلاح شده و جواب بهینه به دست می‌آید. با توجه به جواب بهینه به دست آمده، برای هر یک از مفاصل نیز مسیر بهینه به دست می‌آید. همچنین در هر یک از حالت‌های پیکربندی، اندیس عملکرد بهینه حاصل شده و همچنین معادلات سینماتیک مستقیم به عنوان قیدهای مسئله در نظر گرفته شده‌اند. در تحقیق مرتبط دیگری وانگ و همکارش [۱۶] روشی برای یافتن حالت بهینه ربات مدل دست انسان که دارای یک درجه افزونگی است ارائه نموده‌اند.

شکل (۱) نشان دهنده مقایسه بازوی روبات و انسان می‌باشد. افزونگی درجه آزادی باعث مهارت بالاتر دست انسان در دستیابی به نقاط مختلف فضای کاری دست می‌شود. در نتیجه این افزونگی می‌توان دسترسی به هر نقطه فضای کاری را با توجه به زمان دسترسی (سرعت)، نیروی تعاملی (گشتاور) و یا معیارهای دیگری بهینه نمود. این بهینه سازی بصورت تدریجی از زمان کودکی در ذهن و اعصاب دست انسان ذخیره شده است درحالیکه برای بهینه سازی حرکت روبات نیازمند تعریف معیارهای کاربردی با توجه به پارامترهای سینماتیکی هستیم. در [۱۶] صفحه شامل بازو، صفحه گردنده (swivel) بعنوان مبنا در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب با فرض حالات مختلف آن صفحه، مساله سینماتیک معکوس حل شده است. نهایتاً بهترین حالت بازو با توجه به سریعترین حالت حرکت پیدا شده است.

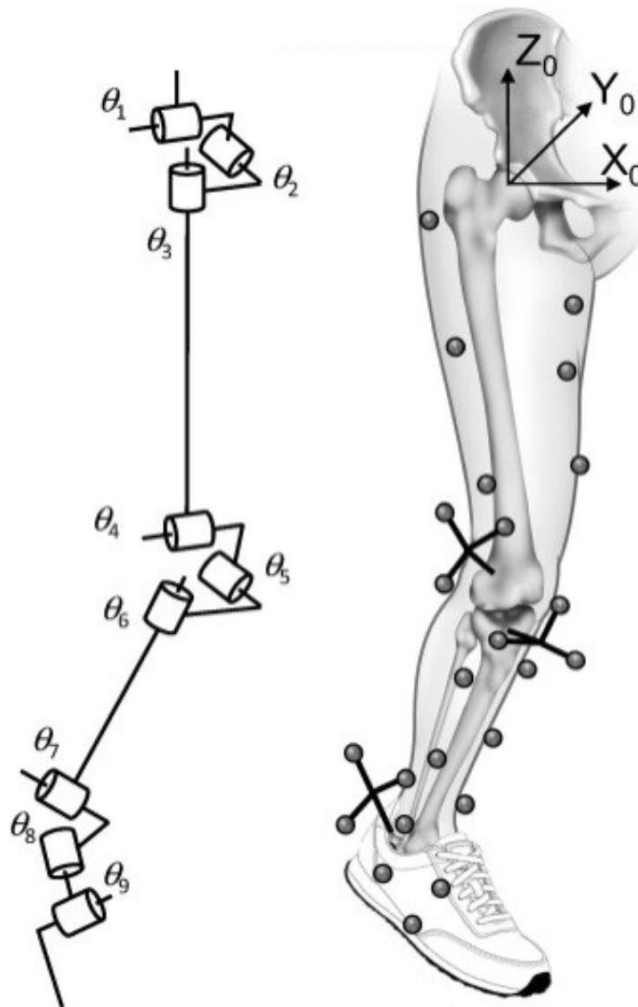


شکل ۱- مقایسه مدل سازی سینماتیکی بازوهای افزونه روبات و

انسان [۱۶]

علمداری و همکارش [۱۷] مدل‌سازی و تحلیل عددی اسکلت- ماهیچه‌ای پا و پایین تنه را به همراه ارائه نموده‌اند. آنها به مطالعه دیداری و غیردیداری راه رفتن پرداخته‌اند و سپس مدل‌هایی بر مبنای:

- (۱) ساختار اسکلتی که ماهیچه‌ها بصورت گشتاورهای وارد بر مفاصل مدل شده‌اند،
- (۲) ساختار اسکلت- ماهیچه که گروه‌های ماهیچه‌ای در دینامیک سیستم در نظر گرفته شده‌اند، و
- (۳) ساختار اسکلتی- عصبی که در آن حرکت‌های انسان بصورت دو سیستم جداگانه اسکلتی و ماهیچه‌ای و تحت کنترل سیستم اعصاب مرکزی، ارائه نموده‌اند. برای بدست آوردن مقدار نیروهای ماهیچه‌ای، آنها تحلیل افزونگی را با استفاده از مینیمم سازی مجموع مربعات نیروهای ماهیچه‌ای انجام داده‌اند. این روش که بر مبنای نرم اقلیدسی بردار نیروهای ماهیچه‌هاست، از روش‌های اولیه در بهینه سازی بردارها محسوب می‌شود. بونت و همکارانش [۱۸] به بررسی مدل ۹ درجه آزادی پا شامل ساق و ران پرداخته‌اند شکل (۲). آنها نیز برای تحلیل افزونگی از روش مینیمم سازی نرم اقلیدسی (حداقل سازی مجموع مربعات) استفاده نموده‌اند. معیار مورد استفاده در بهینه‌سازی سینماتیکی ترکیبی از سرعت و گشتاور مفاصل است.



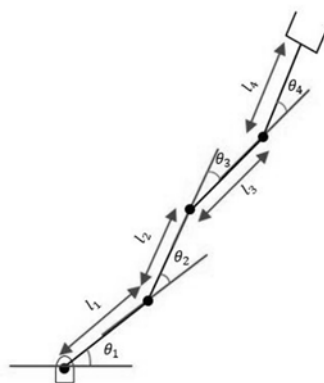
شکل ۲- مدل نه درجه آزادی پای انسان [۱۸]

در مقاله حاضر هدف تعیین مدلی برای پیکره بندی بهینه روبات افزونه چهار درجه آزادی صفحه‌ای است و چالش اصلی در این راه بدست آوردن مسیر مفصلی بهینه برای دنبال نمودن مسیری مفروض در فضای کاری می‌باشد. بدین منظور با حدس نقطه آغازین حرکت، و انتگرال‌گیری معادلات شخصی سازی شده کنترل بهینه پونتریاگین، مسیر فضای مفصلی محاسبه می‌شود و نهایتاً صحت آن با توجه به شرایط مرزی انتهایی مسیر سنجیده می‌شود. حدس اولیه تا رسیدن به مسیر بهینه و ارضای کلیه شرایط مرزی با استفاده از الگوریتم شلیک اصلاح می‌شود. نوآوری مطالعه ی پیش رو با استفاده از روش‌های بهینه سازی در طراحی مسیر ربات‌های افزونه بسیار مرسوم است. روش معرفی شده در این مقاله با الهام از اصل حداقل سازی انرژی پتانسیل همیلتون در تمام سیستم‌ها و کاربرد آن در کنترل بهینه، منجر به فرمولاسیون پونتریاگین می‌شود. همانند سایر نتایج اصل همیلتون، در اینجا نیز شرایط مرزی در هر دو انتهای مسیر بدست آمده‌اند. لکن برای محاسبه انتگرال ابر تابع (فانکشنال) از روش عددی و نیز به منظور اعمال شرایط مرزی در انتهای دیگر از روش شلیک استفاده شده است. با وجود اینکه محاسبه عددی این انتگرال راحت‌تر از محاسبه تحلیلی آن است لکن بنا به ماهیت همه روش‌های عددی، خطای محاسباتی بوجود آمده باید حداقل شود. بدین ترتیب کلیه مراحل کار مفصلاً بحث شده و برای یک نمونه عددی نیز محاسبات انجام پذیرفته است.

۲- سینماتیک مستقیم و ماتریس ژاکوبین بازوها

شکل (۳) ربات صفحه ای را با پارامترهای مختلف آن نشان می‌دهد. باتوجه به پیکربندی ربات، بردار عملگر نهائی در فضای کاری و بردار مفاصل زاویه‌های تعریف شده $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ و روابط سینماتیک سیستم ربات به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} + l_4 C_{1234} \\ y &= l_1 S_1 + l_2 S_{12} + l_3 S_{123} + l_4 S_{1234} \\ \alpha &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \end{aligned} \quad (1)$$



شکل ۳- بازو مکانیکی ماهر با چهار رابط

که متغیرهای استفاده شده در رابطه فوق به صورت زیر بیان شوند:

$$C_{1..i} = \text{Cos}(\theta_1 + \dots + \theta_i)$$

$$S_{1..i} = \text{Sin}(\theta_1 + \dots + \theta_i)$$

بازوی مکانیکی دارای تعداد n متغیر فضای مفصلی

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n]^T$$

و m متغیر فضای کاری

$$r = [X_1, X_2, X_3, \dots, X_m]^T$$

می‌باشد. ماتریس ژاکوبین یک ماتریس انتقال خطی است که یک بردار سرعت n بُعدی $(\dot{\theta})$ از فضای مفصلی را به یک بردار سرعت m بُعدی $(\dot{r})$ از فضای کاری می‌نگارد، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$r = J\theta \quad (۲)$$

یا به عبارتی:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (۳)$$

که متغیرهای استفاده شده در رابطه فوق به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$X_i = f_i(\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \dots \cdot \theta_n) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

معادله X_i بیان فشرده معادلات (۱) هستند.

۳- مدل سازی

۳-۱- طرح مسئله

بردار $\theta \in R^n$ نشان دهنده متغیر فضای مفصلی و بردار $r \in R^m$ نشانگر متغیرهای فضای کاری می‌باشند. سیستم دارای یک درجه افزونگی می‌باشد. زیرا به ازاء $n > m$ سیستم دارای $n - m$ درجه افزونگی است. در اینجا هدف پیدا کردن مسیر $\theta(t)$ در فضای مفاصل است. مجری نهائی از مختصات $x(t_0)$ شروع به حرکت کرده و مسیر $x(t)$ را می‌پیماید و در نهایت به مختصات $x(t_f)$ می‌رسد. t_0 بیانگر زمان اولیه و t_f زمان نهائی هستند.

معادله سینماتیکی بازو عبارتست از:

$$r(t) = f(\theta) \quad (۴)$$

اگر از رابطه فوق نسبت به زمان مشتق گرفته شود، معادله به فرم دیفرانسیلی تغییر پیدا می‌کند:

$$\dot{r}(t) = J(\theta)\dot{\theta} \quad (۵)$$

که $J(\theta) \in R^{m \times n}$ بیان کننده ماتریس ژاکوبین، $\dot{r} \in R^m$ سرعت عملگر نهائی در فضای کاری و $\dot{\theta} \in R^n$ سرعت مفاصل می‌باشند. پاسخ رابطه فوق عبارتست از:

$$\dot{\theta} = J^\# \dot{r}(t) + (I_n - J^\# J) \beta \quad (۶)$$

که در آن $J^\#(\theta) \in R^{n \times m}$ شبه وارون راست نام دارد و $I_n \in R^{n \times n}$ بیانگر ماتریس همانی است. $J^\#$ در حالت‌های غیر تکین به صورت رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$J^\# = J^T (J \cdot J^T)^{-1} \quad (۷)$$

$\beta \in R^n$ یک بردار دلخواه است. جمله نخست سمت راست معادله (۶) جواب خصوصی معادله (۵) است. جمله دوم آن بیانگر جواب عمومی معادله (۵) می‌باشد که $(I_n - J^\# J) \beta$ را توسط بردار دلخواه β ، در فضای پوچ ژاکوبین قرار می‌دهد و بیانگر پاسخ‌های متعدد فضای مفصلی می‌باشد. با تغییر بردار $\beta_{n \times 1}$ ، $\dot{\theta}_{n \times 1}$ های متفاوت بدست می‌آید که همگی در رابطه (۲) صدق می‌کنند. در نتیجه جواب عمومی بیانگر قابلیت افزونگی درجات آزادی سیستم است. هدف از حل این مسئله پیدا کردن مسیری در فضای مفصلی روبات است که در عین حال که عملگر نهایی را روی مسیر مفروض داده شده قرار می‌دهد، انرژی سینماتیکی روبات، یعنی

$$PI = \int_{t_0}^{t_f} \dot{\theta}^T \cdot \dot{\theta} dt \quad (۸)$$

را نیز حداقل می‌نماید.

۳-۲- اصل مینیمم سازی پونتریاگین

سیستم دینامیکی زیر مفروض است:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (۹)$$

که $x \in R^n$ متغیرهای حالت و $u \in R^m$ متغیرهای ورودی (کنترلی) هستند. $\dot{x}$ نشان دهنده مشتق بردار x نسبت به زمان است. هدف مسئله کنترل بهینه، یافتن $u(t)$ در بازه $t_0 \leq t \leq t_f$ می‌باشد که متغیرهای حالت را از مقادیر اولیه $x(t_0)$ به مقادیر نهائی $x(t_f)$ انتقال دهد به صورتی که کل مسیر، طبق رابطه فوق، تابع عملکرد:

$$PI = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u) dt \quad (10)$$

را مینیمم سازد.

همیلتونین سیستم، با در نظر گرفتن بردار الحاقی $\lambda \in R^n$ ، با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$H(\lambda, x, u) = -f_0 + \lambda^T f \quad (11)$$

مقادیر بهینه متغیرهای حالت x^* ، کنترلی u^* ، و الحاقی λ^* برای بازه زمانی $t_0 \leq t \leq t_f$ به صورت ذیل مربوط هستند:

$$\dot{x}^*(t) = \left(\frac{\partial H(\lambda^*, x^*, u^*)}{\partial \lambda} \right)^T \quad (12)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = \left(\frac{\partial H(\lambda^*, x^*, u^*)}{\partial x} \right)^T \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial H(\lambda^*, x^*, u^*)}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (14)$$

$$H(\lambda^*, x^*, u^*) \leq H(\lambda^*, x^*, u) \quad (15)$$

روابط بالا ترکیبی از معادلات جبری و دیفرانسیلی می‌باشند. بنابراین با حل m عدد معادله جبری (۱۴)، و محاسبه $u^*(t)$ و سپس با جایگذاری در رابطه‌های (۱۲) و (۱۳)، مسیر بهینه $\dot{x}(t)$ قابل محاسبه خواهد بود. روابط بالا شرط‌های لازم برای مینیمم کردن همیلتونین سیستم می‌باشند. رابطه (۱۴) فقط در شرایطی که همیلتونین نسبت به u خطی یا درجه دو باشد، دارای حل تحلیلی است، در غیر این صورت در هر مرحله باید به صورت انتگرال‌گیری عددی حل شود و این امر باعث می‌شود که حل آن شامل محاسبات سنگینی باشد.

۳-۳- روش بهینه سازی پونتریاگین

در اینجا انرژی مصرفی روبات در حین حرکت - معادله (۸) - بعنوان تابع عملکرد، با استفاده از روش بهینه سازی پونتریاگین، حداقل می‌شود. باتوجه به فرم سهموی آن نسبت به $\dot{\theta}$ و در نتیجه نسبت به β ، می‌توان نشان داد که حل معادلات (۱۲) تا (۱۵) برای β به شکل بسته ذیل منجر می‌شود:

$$\beta = -\frac{1}{2}(I_{4 \times 4} - J^{\#}J)\lambda \quad (16)$$

که با اعمال آنها برای روابط (۴) تا (۶) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= f \\ \dot{\lambda} &= \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^T (2f - \lambda) \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن f بردار چهار بُعدی است:

$$f = J^{\#}\dot{r} + \frac{1}{2}(I_{4 \times 4} - J^{\#}J)\lambda \quad (18)$$

و $\dot{r}_{3 \times 1}$ مشتق زمانی بردار مکان عملگر نهائی در فضای کاری می‌باشد. مولفه های بردار $\dot{r}$ به ترتیب $\dot{r}_1$ مولفه افقی سرعت، $\dot{r}_2$ مولفه عمودی سرعت و $\dot{r}_3$ مولفه دورانی سرعت هستند. بردار الحاقی است. $I_{4 \times 4}$ نیز ماتریس همانی است. با مشتق گیری بردار f نسبت به بردار θ ، ماتریس $\left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{4 \times 4}$ حاصل می‌شود. برای انتگرال گیری عددی معادلات (۱۷) از روش تفاضل محدود پیشرو، به شکل روابط زیر استفاده شده است:

$$\dot{\theta} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta t} \quad (19)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \dot{\theta} \cdot \Delta t$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\Delta t} \quad (20)$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^T (2f - \lambda) \right) \Delta t$$

برای رسیدن به این هدف باید ابتدا ماتریس ژاکوبین و ماتریس شبه معکوس آن $(J^{\#}_{4 \times 3})$ محاسبه شوند.

۳-۴- شرایط مرزی حاکم بر سیستم

معادلات $\dot{\theta}$ و $\dot{\lambda}$ فوق مجموعاً دارای $2n$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول هستند. بنابراین برای بدست آوردن حل بهینه سیستم، نیازمند $2n$ شرط اولیه یا مرزی می‌باشند. در لحظه $t = t_f$ در انتهای مسیر به دلیل وجود افزونگی درجه آزادی، θ_f به صورت آزاد است، لکن رابطه زیر برای لحظه $t = t_f$ باید برقرار باشد:

$$r(t_f) = f(\theta(t_f)) \quad (21)$$

معادله فوق m شرط را تعیین می‌کند. با توجه به مشخص بودن زمان پایانی مسیر و نیز با توجه به معادلات حاکم بر سیستم، این مسئله از نوع حالت نهائی آزاد با زمان معلوم است. در این مورد داریم:

$$\lambda(t_f) = 0 \quad (22)$$

رابطه فوق تعداد n شرط را در انتهای مسیر بیان می‌کند. از دو رابطه اخیر در مجموع تعداد $n + m$ شرط در زمان انتهایی مسیر معلوم می‌گردند. تعداد $n - m$ شرط باقی مانده، از شرط تعامد λ بر معادلات سینماتیک مستقیم در ابتدای مسیر استفاده می‌شوند. این شرط براساس این رابطه ضرب داخلی بیان می‌شود:

$$[I_n - J^{\#}(\theta(t_0))J(\theta(t_0))] \cdot \lambda(t_0) = 0 \quad (23)$$

رابطه فوق تعداد $n - m$ شرط را زمان شروع تعیین می‌کند و هر سه معادله اخیر در مجموع $2n$ شرط مرزی لازم را تعیین می‌نمایند. با توجه به شرایط مرزی موجود، تعیین مسیر بهینه نیازمند به حل مسئله مقدار مرزی است. بدین منظور روش شلیک از جمله راه حل‌های این نوع مسائل به شمار می‌آید.

۴- روش شلیک

روش شلیک روشی برای حل عددی مسائل مقدار مرزی توسط کاهش در جواب از مسئله مقدار اولیه است. نحوه حل در روش شلیک بدین صورت می‌باشد که در ابتدا فرض اولیه ای در یک بازه انتگرال‌گیری در نظر گرفته می‌شود تا شرایط مرزی در یک بازه کامل شود. سپس انتگرال‌گیری انجام می‌شود و مقادیر در طرف دیگر بازه بدست می‌آیند. مقادیر به دست آمده در طرف دیگر بازه با شرایط مرزی مربوطه مقایسه می‌شوند. با توجه به مقدار خطا، فرض اولیه اصلاح شده و انتگرال‌گیری دوباره انجام می‌شود. این کار تا زمانی که خطا صفر شود و مسئله به جواب واقعی خود همگرا شود تکرار می‌شود. همانطور که بیان شد، $2n$ شرط مرزی در بازه انتگرال‌گیری معلوم هستند. از این شرط‌ها تعداد $n - m$ شرط در $t = t_0$ و تعداد $n + m$ شرط در $t = t_f$ می‌باشند. اینجا در الگوریتم شلیک برای $\theta(t_f)$ (انتهای مسیر) شرط $r(t_f) = f(\theta(t_f))$ در نظر گرفته شده است. در نتیجه تعداد شرایط مرزی معلوم در $t = t_f$ در مجموع $n + m$ می‌شود و فقط $n - m$ فرض (به تعداد عدد افزونگی روبات) انجام می‌شود. در نهایت شرایط مرزی موجود مطابق روابط ذیل بیان می‌گردند:

$$r(t_f) = f(\theta(t_f)) \quad (24-1)$$

$$\lambda(t_f) = 0 \quad (24-2)$$

$$e = \{I_n - J^{\#}(\theta(t_0))J(t(t_0))\} \cdot \lambda(t_0) \quad (24-3)$$

پس با توجه به شرایط مرزی موجود در $t = t_f$ انتگرال‌گیری بصورت پیشرو انجام و مقادیر θ در $t = t_0$ به دست می‌آیند. حال اگر شرط تعامد معادله فوق برقرار نبود، فرض‌های اولیه باید طوری تصحیح شوند که شرط تعامد برقرار شده و خطای مربوطه $e = 0$ شود.

۵- مسئله نمونه

همانطور که ذکر شد در این مقاله هدف بررسی و بدست آوردن مسیر بهینه برای ربات صفحه ای چهار درجه آزادی در دنبال نمودن مسیری از پیش تعیین شده است.

۵-۱- پیکربندی اولیه

موقعیت مجری نهائی (متغیرهای فضای کاری) در صفحه $r(\theta) = [x(\theta) \ y(\theta) \ \alpha(\theta)]^T$ می باشد. ابعاد فضاهای مفصلی و کاری به ترتیب ۴ و ۳ هستند. در نتیجه این ربات دارای $n-m=4-3=1$ درجه افزونگی است. حدس های اولیه در نظر گرفته شده برای مفاصل ربات θ_{01} و θ_{02} در لحظه $t=t_f$ است. با در نظر گرفتن این فرض ها از طریق روابط سینماتیک معکوس مابقی متغیرهای فضای مفصلی براساس متغیرهای فرضی به دست می آیند. پروسه بهینه سازی مسیر بر همین اساس شروع می گردد و در هر گام متغیرهای فرضی اصلاح می شوند و دوباره مقادیر اصلاح شده در روابط سینماتیک معکوس قرار می گیرند و مقادیر جدیدی برای دیگر متغیرهای مفصلی حاصل می شوند، این کار تا زمان رسیدن به دقت مورد نظر ادامه پیدا می کند.

۵-۲- مثال نتایج عددی بهینه سازی

براساس مطالب ذکر شده، بهینه سازی برای دنبال نمودن مسیر در فضای کاری انجام شده است. به عنوان مثال عددی، مجری نهائی باید مسیری که توسط رابطه زیر بیان می شود را طی کند:

$$r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 + 0.15(1 - \cos \pi t) \\ 1.5x(t) \\ \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \quad (25)$$

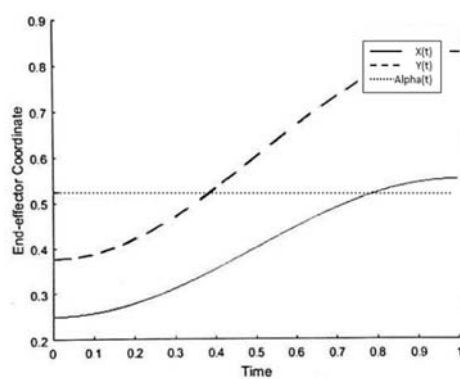
به صورتی که t متعلق به بازه بسته $t \in [0,1]$ می باشد.

شکل های (۴) تا (۹) فضای کاری عملگر نهائی، سرعت فضای کاری عملگر نهائی، پیکربندی ابتدایی و انتهایی ربات، مسیر مفاصل $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ انرژی مصرفی و مسیر بهینه حاصل از این مسیر را نشان می دهند.

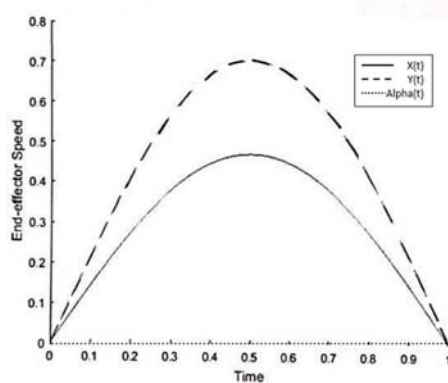
حدس اولیه انجام شده برای پیکره ربات در زمان انتهایی، جهت آغاز فرآیند الگوریتم شلیک

شلیک مورد استفاده قرار می گیرد. سپس با انجام فرضیات مربوطه برای شرایط اولیه (۱-۲۴) و (۲-۲۴) شلیک

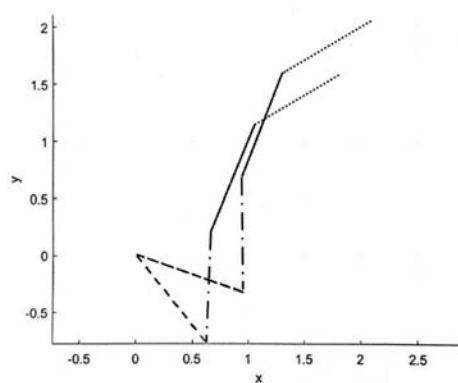
انتگرال گیری از (۱۹) و (۲۰) انجام می شود. نتیجه حاصله، نزدیکترین پیکره ربات به حالتی که عملگر نهایی روی مسیر قرار گرفته شود، حاصل می گردد شکل (۷).



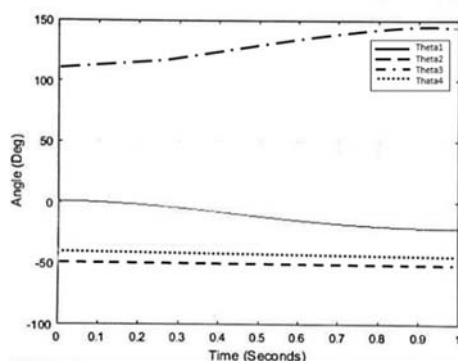
شکل ۴ - نمودار مسیر عملگر نهایی در فضای کاری



شکل ۵ - نمودار سرعت عملگر نهایی در فضای کاری



شکل ۶ - پیکربندی ابتدایی و انتهایی ربات برای دنبال نمودن بهینه مسیر فضای کاری



شکل ۷ - مسیر بدست آمده برای ربات در حدس اولیه

$$\theta_{01} = \left[\frac{\pi}{10} \quad -\frac{\pi}{10} \quad \frac{\pi}{10} \quad \frac{\pi}{10} \right]^T$$

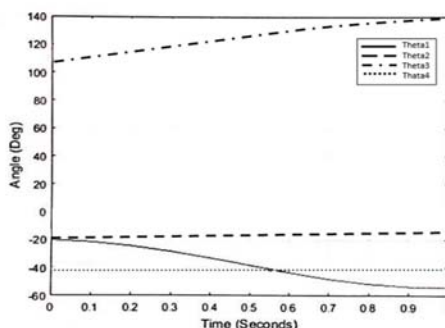
حدس اولیه بعدی $\theta_{02} = \left[\frac{\pi}{5} \quad -\frac{\pi}{5} \quad \frac{\pi}{5} \quad \frac{\pi}{5} \right]^T$ می‌باشد. مجدداً فرآیند انتگرال گیری انجام شده و مسیر حاصله در شکل (۸) نشان داده شده است. حدس‌های بعدی با استفاده از درونیابی بدست می‌آیند. بدین صورت که اگر بردار θ به عنوان بردار حدس اولیه در نظر گرفته شود، برای تصحیح این بردار در هر تکرار به ازای $e \neq 0$ از بسط تیلور استفاده می‌شود:

$$\theta_{\text{Next}} = \theta_{\text{Current}} - \left(\frac{\partial e}{\partial \theta} \right)^{-1} \bigg|_{\text{Current}} \cdot e_{\text{Current}} \quad (26)$$

تا زمانی که دقت مورد نظر ارضا نشود، بردار θ توسط رابطه بازگشتی فوق تصحیح می‌شود و حدس‌های اولیه جدید تولید و استفاده می‌شوند. نهایتاً برای دقت 10^{-4} مقادیر بدست آمده برای زوایای ربات عبارتند از:

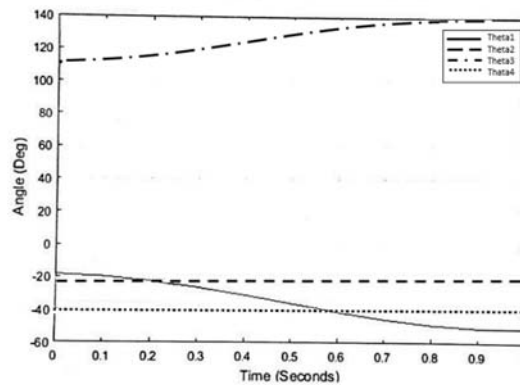
$$\theta_1 = -0.3206, \theta_2 = 1.9030, \theta_3 = -0.3973, \theta_4 = -0.6614$$

و مسیر بهینه مربوطه در شکل (۹) نشان داده شده است.



شکل ۸ - مسیر بدست آمده برای ربات در حدس اولیه

$$\theta_{02} = \left[\frac{\pi}{5} \quad -\frac{\pi}{5} \quad \frac{\pi}{5} \quad \frac{\pi}{5} \right]^T$$



شکل ۹ - مسیر بهینه ربات برای مسیر فضای کاری
مطلوب (۲۵)

جدول ۱ - جزئیات بهینه سازی

-۰/۳۲۰۶	θ_1	مقادیر بهینه مفاصل (rad)
۱/۹۰۳۰	θ_2	
-۰/۳۹۷۳	θ_3	
-۰/۶۶۱۴	θ_4	
۰/۶۲۸۸۷	Energy	به ازای حدس اول
۰/۰۰۴۵۱۶۵	Error	
۰/۷۵۲۰۵	Energy	به ازای حدس دوم
۰/۰۰۵۸۷۷۲	Error	
۰/۷۴۸۳۳	Energy	مقادیر بهینه انرژی و خطا
$۱/۳۵۸ \times ۱۰^{-۱۲}$	Error	

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، بهینه سازی سینماتیکی مسیر برای روبات ۴ درجه آزادی صفحه ای با در نظر گرفتن افزونگی درجه آزادی انجام شده است. فضای کاری ربات صفحه ای دارای سه بُعد، شامل (X: طول، Y: عرض، α : چرخش) می باشد. هدف، بدست آوردن مسیر مفصلی جهت دنبال نمودن مسیری از پیش تعیین شده در فضای کاری ربات است. بدین منظور با قرار دادن عملگر نهایی در نقطه انتهایی مسیر، یک حدس اولیه برای درجه آزادی افزونه ربات در نظر گرفته می شود. سپس روابط سینماتیک معکوس اعمال می گردند تا پیکره مربوط به آن حدس اولیه محاسبه شود.

با استفاده از قانون پونترباگین در کنترل بهینه روش محاسباتی جهت حداقل سازی مقدار انرژی سینماتیکی مصرفی ایجاد شده و با انجام انتگرال گیری از آن، مسیر مربوط به آن حدس اولیه محاسبه شده است. سپس حدس اولیه، با مقایسه شرایط مرزی در سوی دیگر مسیر بروز رسانی می شود و در نتیجه با استفاده از الگوریتم شلیک، حدس اولیه و مسیر مربوط به آن به سمت مسیر بهینه همگرا می شود. برای مسیر بهینه مقدار انرژی مصرفی محاسبه شده و نشان داده شده است که از انرژی مصرفی برای سایر مسیرها کمتر است.

مراجع

- [1] Serracin, J.R., Puglisi, L.J., Saltaren, R., Ejarque, G., Sabater-Navvaro, J.M., and Aracil, R., "Kinematic Analysis of a Novel 2-DOF Orientation Device", *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 60, Issue. 6, pp. 852-861, (2012).
- [2] Gosselin, C., Ping, R., and Foucalt, S., "Dynamic Trajectory Planning of a Two-DOF Cable-suspended Parallel Robot", *IEEE International Conference on Robotic and Automation*, pp. 1476-1481, Saint Paul, MN, USA, May 14-18, (2012).
- [3] Liu, H., and Dai, J., "An Approach to Carton-folding Trajectory Planning using Dual Robotic Fingers", *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 42, Issue. 1, pp. 47-63, (2003).
- [4] Ming, L., Huapeng, W., and Handroos, H., "Stiffness-maximum Trajectory Planning of a Hybrid Kinematic-redundant Robot Machine", *37th IEEE Annual Conference on Electronics Society*, Melbourne, pp. 283-288, VIC, Australia, November 7-12, (2011).
- [5] Liegeois, A., "Automatic Supervisory Control of the Configuration and Behavior of Multi-body Mechanisms", *IEEE Transaction Systems, Man and Cybernetic*, Vol. 7, No. 12, pp. 868-871, (1977).
- [6] Whitney, D.E., "Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses", *IEEE Transaction Man-Machine Systems*, Vol. 10, No. 2, pp. 47-53, (1969).
- [7] Ushiyama, M., Shimizu, K., and Hakomori, K., "Performance Evaluation of Manipulators using the Jacobian and its Application to Trajectory Planning", *Robotics Research*, Vol. 2, pp. 447-454, (1985).
- [8] Nagurka, M.L., and Yen, V., "Optimal Design of Robotic Manipulator Trajectories", *Technical Report CMU-RI-TR-87-12*, the Robotic Institute, Carnegie Mellon University, PA 15213, (1987).
- [9] Qiu, H., and Ozaki, H., "Expression and Optimization of Joint Trajectory of Manipulator using Uniform B-Spline", *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Intelligent Systems for the 21st Century*, Vol. 2, pp. 1267-1272, Vancouver, BC, Canada, October 22-25, (1995).

- [10] Chang, P.H., "A Closed Form Solution for Inverse Kinematics of Robot Manipulators with Redundancy", IEEE Journal Robotics Automation, Vol. 3, No. 5, pp. 393-403, (1987).
- [11] Hemmerle, J.S., and Prinz, F.B., "Optimal Path Placement for Kinematically Redundant Manipulators", IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 2, pp. 1234-1244, Sacramento, CA, USA, April 9-11, (1991).
- [12] Agrawal, O.P., and Xu, Y., "On the Global Optimum Path Planning for Redundant Space Manipulator", IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 24, No. 9, pp. 1306-1316, (1994).
- [13] Gotlih, K., "The use and Comparison of a Special Global Optimal Control Algorithm with a Local Optimal Control Solution for Redundant Mechanisms", IEEE International Symposium on Industrial Electronics", Vol. 2, pp. 872-876, (1999).
- [14] Osgouie, K.G., Meghdari, A., and Sohrabpour, S., "Optimal Configuration of Dual-arm Cam-lock Robot Based on Task-space Manipulability", Robotica, Vol. 27, No. 1, pp. 13-18, (2009).
- [15] Rezaiean, B., Osgouie, K.G., and Meghdari, A., "Optimization of Kinematic Redundancy and Workspace Analysis of Dual-Arm Com-Lock Robot", Robotica, Vol. 34, pp. 1-20, (2016).
- [16] Wang, Y., and Artemiadis, P., "Closed-form Inverse Kinematic Solution for Anthropomorphic Motion in Redundant Robot Arms", Advances in Robotics and Automation, Vol. 2, Issue. 110, pp. 1-7, (2013).
- [17] Alamdari, A., and Venkat, N. K., "A Review of Computational Musculoskeletal Analysis of Human Lower Extremities", Human Modelling for Bio-Inspired Robotics, Elsevier, pp. 37-73, (2016).
- [18] Bonnet, V., Richard, V., Camomilla, V., Venture, G., Cappozzo, A., and Dumas, R., "Joint Kinematics Estimation using a Multi-body Kinematics Optimization and an Extend Kalman Filter, and Embedding a Soft Tissue Artefact Model", Journal of Biomechanics, Vol. 62, pp. 148-155, (2017).

Abstract

In this paper, the joint space kinematic optimization of a redundant planar robot is performed. The aim is to follow a desired task space path. Considering the redundancy of the robot, an initial guess is made for the excessive degrees of freedom of the robot. Definitely due to the redundancy of the robot, several admissible joint-space configurations exist and one of them is randomly selected as the initial guess. Afterwards, the inverse kinematic equations are applied together with Pontryagin's principles in optimal control theory. By performing a back-integration, the whole joint space path is calculated. This way the possible joint space path is calculated but the end conditions are to be satisfied. According to the error occurred at the other end of the path, the initial guess is updated. The relation is assumed to be linear and applied through a Taylor expansion equation. A try-error process using shooting method is then performed, and the optimal initial guess is converged. Its corresponding joint space trajectory is also obtained. This is the admissible joint space trajectory on which the consumed energy is optimized. As a numerical evaluation, a sample task space desired path is considered and using the proposed method the proper joint space trajectory and its corresponding kinetic energy is obtained.