

## بررسی عددی لایه های مرزی آشفته مافوق صوت تشکیل شده بر روی صفحات صیقلی و زبر

در این مقاله دقت مدل های آشفته  $K-\varepsilon$  و  $K-\omega$  در تسخیر فیزیک لایه مرزی مافوق صوت تشکیل شده بر روی صفحات تخت صیقلی و زبر بررسی شده است. برای صفحات صیقلی حساسیت سنجی جامعی مشتمل بر تغییر در نوع مدل، تغییر در تراکم شبکه ( و به تبع آن اندازه  $\gamma^+$  المان های مجاور دیواره ) و تغییر در اندازه ضریب  $C_{\mu}$  ( برای مدل آشفته  $K-\varepsilon$  ) و برای صفحات زبر مشتمل بر تغییر ثابت زبری  $C_{Ks}$  و نیز وابستگی نتایج به اندازه  $K_s^+$  ( به عنوان عدد بدون بعد متناظر با ارتفاع زبری در صفحات زبر ) انجام شده است. همچنین تاثیرات تراکم پذیری جریان بر روی پدیده آرام سازی مجدد یک لایه مرزی آشفته و در نهایت دقت این دو مدل در تسخیر  $C_f/C_{f0}$  در اعداد ماخ زیر 5 مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصله حاکی از دقت قابل توجه مدل آشفته  $SST K-\omega$  و در رتبه بعد، مدل آشفته  $K-\varepsilon$  در تسخیر فیزیک لایه های مرزی مافوق صوت آشفته است. در این میان وابستگی قابل توجه نتایج به ثابت زبری  $C_{Ks}$  و نیز  $K_s^+$  در صفحات زبر به خوبی مشهود است.

مهدي صنيعي نژاد<sup>۱</sup>

کارشناس ارشد

محمود ماني<sup>۲</sup>

استاد

واژه‌های راهنما: مدل آشفته، صفحه تخت صیقلی و زبر، لایه مرزی آشفته مافوق صوت

### ۱- مقدمه

دقت مدل های آشفته مرتبه اول RANS عمدتاً متأثر از برخی از پارامترها و ضرایب ذاتی به کار گرفته شده در روند توسعه این نوع مدل هاست و مقدار آنها عمدتاً با استفاده از تطبیق نتایج این مدل ها بر روی طیف گسترده ای از نتایج تجربی موجود برای نواحی مشخصی از یک میدان جریان به دست آمده است. لیکن با توجه به اینکه شرایط جریانی مورد استفاده برای تنظیم و کالیبراسیون ضرایب این مدل ها عمدتاً غیر از شرایط جریانی مورد نظر کاربران معمول اینگونه مدل ها می باشند، این ضرایب نمی توانند همیشه و برای هر نوع جریانی و حتی برای تمامی نقاط یک میدان جریان مشخص، دقت مورد نظر کاربر را برآورده سازند. بنابراین برخی از محققین همواره به دنبال توسعه روشی جهت نزدیک نمودن نتایج به دست آمده از این مدل ها به نتایج تجربی مورد نظر خود و دیگر محققین می باشند.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، گرایش تبدیل انرژی، شرکت دانش صنعت امین، تهران

CFD\_Group@Yahoo.Com

<sup>۲</sup> استاد، دانشکده مهندسی هوافضا، گرایش آیرودینامیک، دانشکده هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

به طور کلی اصلاح نتایج به دست آمده از یک مدل آشفته و نزدیک نمودن این نتایج به نتایج تجربی موجود از یک رژیم جریانی مورد نظر به دو روش امکانپذیر می باشد [۱]:

- اضافه نمودن جملاتی به عنوان ترم منبع به سمت راست معادلات آشفته مرتبه اول با هدف دخیل نمودن و یا اصلاح اثراتی که در جریان تجربی پایه مورد توجه قرار نگرفته اند.
- تغییر دادن و یا تنظیم مجدد ( کالیبراسیون ) مقادیر ضرایب بستگی یا Closure Constant مورد استفاده در مدل آشفته مزبور تا بتوان نتایج عددی به دست آمده را بر روی نتایج تجربی موجود تطبیق داد.

در این مقاله به بررسی جامع دقت مدل های آشفته  $K-\epsilon$  و  $K-\omega$  در تسخیر فیزیک لایه مرزی تشکیل شده بر روی صفحات تخت صیقلی و زبر در رژیم تراکم پذیر مافوق صوت پرداخته شده است. در این تحلیل ها، سعی شده است تا پس از انجام برخی حساسیت سنجی های مرسوم، مشتمل بر تغییر در نوع مدل، تغییر در تراکم شبکه ( و به تبع آن اندازه  $y^+$  المان های مجاور دیواره )، تغییر ضریب  $C_{\mu}$  مورد استفاده در مدل آشفته  $K-\epsilon$  ( به عنوان یکی از رایجترین مدل های آشفته ) برای لایه مرزی تشکیل شده بر روی صفحات صیقلی، تغییر ضریب ثابت زبری  $C_{K_s}$  و نیز تغییر در اندازه  $K_s^+$  ( به عنوان عدد بدون بعد متناظر با ارتفاع زبری برای صفحات زبر ) در لایه های مرزی مافوق صوت تشکیل شده بر روی صفحات زبر، نسبت به بررسی اثرات تراکم پذیری جریان بر روی پدیده آرام سازی مجدد لایه مرزی یا Re-Laminarization در شدت های مختلف آشفته اقدام شده است. در این میان خصوصیات فیزیکی میدان جریان در داخل لایه های مرزی تحلیل شده ( از قبیل پروفیل انرژی جنبشی آشفته، پروفیل نرخ اضمحلال آشفته و پروفیل ویسکوزیته آشفته ) در عرض ضخامت لایه مرزی تراکم پذیر مورد بررسی جامع و دقیق قرار گرفته است تا عامل اصلی میرایی نوسانات آشفته و به تبع آن آرام شدن جریان آشفته مشخص گردد. در انتهای این مقاله نیز دقت هر یک از این دو مدل در تسخیر نسبت  $Cf/Cf_0$  (نسبت میان ضریب پسای اصطکاکی تراکم پذیر به همین ضریب در جریان تراکم ناپذیر اما با همان عدد رینولدز) برای اعداد ماخ کمتر از ۵ مورد بررسی دقیق قرار گرفته است.

برای آنکه نتایج به دست آمده از اعتبار مناسبی برخوردار بوده و استنتاج های به عمل آمده از روی نتایج، معتبر باشند، از تعداد زیادی نتایج تجربی و عددی منتشره در مقالات معتبر استفاده شده و با استفاده از نتایج بیش از دویست تحلیل عددی مختلف که تماماً توسط نویسندۀ مقاله و با استفاده از روش های معتبر به انجام رسیده است، اقدام به بازسازی و در حد امکان ارتقای بازۀ نتایج مندرج در مقالات مرجع شده است. در مقاله پیش رو، برای اولین بار سعی شده است تا قابلیت مدل های آشفته دو معادله ای  $K-\epsilon$  و  $K-\omega$  در تسخیر لایه های مرزی آشفته مافوق صوت تشکیل شده بر روی صفحات تخت صیقلی و زبر به ازای تغییراتی در ضریب  $C_{\mu}$  (برای صفحات تخت صیقلی) و ثابت زبری  $C_{K_s}$  (برای صفحات تخت زبر) در اعداد رینولدز بسیار بالا (بیش از ۱۰ میلیون) مورد توجه قرار گیرد. اگرچه در کنار این حساسیت سنجی ها، حساسیت پاسخ این مدل ها نسبت به تغییر در تراکم شبکه های محاسباتی ایجاد شده نیز مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله همچنین با بررسی های به عمل آمده در پروفیل کمیت های فیزیکی لایه مرزی (نظیر پروفیل انرژی جنبشی آشفته، پروفیل نرخ اضمحلال آشفته و پروفیل ویسکوزیته آشفته) نکات فنی بسیار

جالبی در مورد فیزیک لایه های مرزی تراکم پذیر مافوق صوت و بالاخص دلایل میرایی آشفتگی در اینگونه لایه های مرزی کسب شده است. همچنین سعی شده است تا دقت هر یک از این دو مدل آشفتگی در تسخیر نسبت  $Cf/Cf_0$  که در واقع بیانگر نسبت میان ضریب پسای اصطکاکی تراکم پذیر به همین ضریب در جریان تراکم ناپذیر اما با همان عدد رینولدز می باشد، برای کلیه اعداد ماخ کمتر از ۵ مورد ارزیابی دقیق قرار گیرد.

## ۲- مروری بر برخی تحقیقات پیشینیان

در این قسمت به بررسی برخی از تحقیقات تجربی یا عددی انجام شده توسط محققین در حوزه لایه های مرزی تراکم پذیر تشکیل شده بر روی صفحات تخت صیقلی و زیر خواهیم پرداخت.

در سال ۱۹۹۱، هنین و کورتا [۲] اثرات تراکم پذیری را بر روی عملکرد برخی مدل های آشفتگی مورد بررسی قرار دادند. در تحلیل های این دو محقق، نسخه های مختلفی از مدل  $K-\epsilon$  (بدون استفاده از هر گونه تصحیحات تراکم پذیری) و نیز مدل  $K-\omega^2$  (ارائه شده توسط ویلکوکس و روبرین که برای جریان های تراکم پذیر توسعه یافته است) مورد استفاده قرار گرفته است.

در سال ۱۹۹۲، لی، سوچلاو و لبلانک [۳] اقدام به بررسی عددی لایه های مرزی گذر صوت (با عدد ماخ کمتر از ۱) و مافوق صوت بر روی دیواره های به شدت گرم شده در اعداد رینولدز نه چندان بالا (کمتر از ۱۰ میلیون) پرداختند.

در سال ۱۹۹۵، فرر، کرووز و پلگرینی [۴] تاثیرات انتقال حرارت و انتقال جرم را بر روی پروفیل سرعت و پروفیل دما در لایه های مرزی مافوق صوتی با عدد ماخ بین ۲ الی ۵ تشکیل شده بر روی صفحات تختی با عدد رینولدز  $Re_0 < 12000$  را مورد بررسی قرار داده و رابطه جدیدی برای تابع دیواره ارائه نمودند.

در سال ۲۰۰۴، خو و مارتین [۵] تاثیرات استفاده از شرایط مرزی مختلف را بر روی لایه های مرزی تراکم پذیر و به سه روش DNS و TDNS و ETDNS مورد بررسی قرار دادند. همچنین در این مقاله، روش Rescaling جدیدی برای شبیه سازی لایه های مرزی تماماً آشفتۀ تراکم پذیر ارائه شده است.

در سال ۲۰۰۵، کرچتینیکف و لیپاتوف [۶] اقدام به بررسی تجربی اثرات اغتشاشات سه بعدی موجود در جریان آزاد بالادستی بر روی لایه های مرزی مافوق صوت تشکیل شده بر روی اجسام مختلف (با گرادبان فشار مثبت و منفی) در حضور دمش جریان از داخل دیواره و نیز سرمایش دیواره ای پرداختند.

در سال ۲۰۰۷، شریف و گو [۷] تاثیر زبری سطح بر روی خصوصیات آشفتگی و نیز جریان متوسط مربوط به لایه مرزی تشکیل شده مافوق صوتی (با عدد ماخ ۲/۷ و عدد رینولدز ۲۰ میلیون بر واحد طول) بر روی یک صفحه تخت را با استفاده از مدل های  $K-\omega$  و  $Stress-\omega$  مورد بررسی قرار دادند.

در سال ۲۰۰۸، چوئی، ادواردز و بورل [۸] با استفاده از روش پیوندی LES/RANS اقدام به بررسی توزیع خصوصیات فیزیکی میدان جریان بر روی لایه های مرزی تراکم پذیر در اعداد رینولدز تا یک میلیون پرداختند و نتایج خود را با نتایج تئوریک و تجربی موجود مقایسه نمودند.

در سال ۲۰۰۹، ساهو، شولتز و اسمیت [۹] اقدام به بررسی تاثیرات زبری بر روی لایه مرزی آشفتۀ در رژیم ماوراء صوت  $M=7.2$  و اعداد رینولدز پایین  $Re_0=3600$  با استفاده از روش تجربی PIV پرداختند. در این

تحقیق، تاثیرات تراکم پذیری بر روی نوسانات نرمالایز شده سرعت در راستای جریان مورد بررسی دقیق قرار گرفته است. و بالاخره در سال ۲۰۱۱، لاقا، کیم، الدرچ و ژونگ [۱۰] با استفاده از روش DNS اقدام به بررسی لایه های مرزی تماماً آشفته با عدد ماخ بین ۲/۵ الی ۲۰ نمودند.

### ۳- معرفی معادلات RANS حاکم بر میدان جریان و شرایط مرزی به کار رفته

معادلات RANS حاکم بر یک میدان جریان، به ترتیب معادله پیوستگی، و معادلات ناویر استوکس متوسط گیری شده و معادلات مربوط به آشفته گی موجود در میدان جریان می باشند که در یک جریان تراکم پذیر، معادله انرژی و معادله حالت نیز به این معادلات افزوده می گردند :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{u'_i u'_j}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial[u_i(\rho E + p)]}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( k + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} + u_i (\tau_{ij})_{eff} \right] \quad (3)$$

$$p = \rho RT \quad (4)$$

ترم تنش رینولدز  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  موجود در سمت راست معادله (۲) با استفاده از تقریب بوزینسک به گرادیان های سرعت موجود در میدان جریان متوسط مرتبط می شود [۱]. در معادله (۳)،  $k$  بیانگر ضریب هدایت حرارتی،  $E$  بیانگر انرژی کل و  $(\tau_{ij})_{eff}$  بیانگر تانسور تنش Deviatoric بوده و به صورت رابطه (۵) تعریف می گردد:

$$(\tau_{ij})_{eff} = \mu_{eff} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu_{eff} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \quad (5)$$

با توجه به اینکه دستگاه معادلات حاکم هنوز بسته نشده است ( یعنی هنوز تعداد معلومات از تعداد مجهولات کمتر می باشد ) از انواع مختلف مدل های آشفته گی اعم از :

- 1- Spalart Allmaras
- 2- K-ε Standard, K-ε RNG
- 3- K-ω Shear Stress Transport (SST)

جهت بسته نمودن معادلات استفاده شده است.

### ۴- معرفی معادلات حاکم بر مدل های آشفته گی

در ادامه به بررسی معادلات حاکم بر مدل های مختلف آشفته گی استفاده شده در این مقاله پرداخته شده است. در این میان ابتدا شرحی در مورد تقریب بوزینسک و نقش آن در بسته نمودن دستگاه معادلات حاکم بر یک مدل سازی آشفته گی ارائه می گردد.

#### ۴-۱- تقریب بوزینسک Boussinesq Approximation

همانطور که پیش از این گفته شد، در یک مدل سازی آشفتگی نیازمند آن هستیم تا ترم تنش رینولدز  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  موجود در سمت راست معادله (۲) را به نحوی مدل نماییم. یکی از رایجترین روش های مدل نمودن این تنش، استفاده از تقریب بوزینسک است که در آن اندازه این تنش  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  به نحوی به گرادیان های سرعت موجود در " میدان جریان متوسط " مرتبط می گردد. این تقریب به صورت رابطه (۶) بیان می گردد [۱]:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \rho K + \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} \quad (6)$$

که در آن  $K$  بیانگر انرژی جنبشی آشفتگی ( جمع مولفه های قطری تانسور تنش رینولدز ) می باشد. برای محاسبه ویسکوزیته آشفته  $\mu_t$  ( یا معادل آن  $\nu_t \equiv \mu_t / \rho$  ) نیازمند استفاده از مدل های آشفتگی مختلف می باشیم که در ادامه به جزئیات هر یک از این مدل ها اشاره می گردد.

#### ۴-۲- مدل K-ε استاندارد

مدل  $K-\epsilon$  استاندارد، یک مدل نیمه تجربی می باشد که بر مبنای معادلات انتقالی مدل شده انرژی جنبشی آشفتگی  $K$  و نرخ اضمحلال آن،  $\epsilon$ ، بیان شده است. معادله انتقالی مدل شده  $K$  از روی یک معادله صریح با پایه و اساس کاملاً ریاضیاتی به دست آمده است، حال آنکه معادله انتقالی مدل شده  $\epsilon$  تنها با استفاده از استدلال فیزیکی به دست آمده است و از این بابت شباهت اندکی با معادله صریح و تماماً ریاضیاتی ارائه شده برای  $K$  دارد. در مسیر توسعه مدل  $K-\epsilon$  استاندارد، فرض بر این است که جریان تماماً آشفته می باشد و از تاثیرات ویسکوزیته مولکولی چشم پوشی شده است. بنابراین مدل  $K-\epsilon$  استاندارد تنها برای جریان های تماماً آشفته کاملاً معتبر می باشد و در سایر نواحی بالاخص نواحی رینولدز پایین جریان با خطای محاسباتی مواجه است ( مگر آنکه با داخل نمودن جملات منبع جدید به سمت راست معادلات فوق، اصلاحات لازم جهت تسخیر اثرات عدد رینولدز پایین جریان در این مدل صورت گرفته باشد [۱۱-۱۳].

معادله انتقالی مدل شده انرژی جنبشی آشفتگی  $K$  و نرخ اضمحلال آن،  $\epsilon$ ، به صورت دو معادله انتقالی (۷) و (۸) بیان می گردند ( همان مراجع ):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho K u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right\} + G_K + G_b - \rho \epsilon - Y_M \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right\} + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} (G_K + C_{\epsilon 3} G_b) - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{K} \quad (8)$$

در این معادلات،  $G_K$  بیانگر تولید انرژی جنبشی آشفتگی  $K$  تحت تاثیر گرادیان سرعت متوسط می باشد.  $G_b$  نیز بیانگر تولید انرژی جنبشی آشفتگی  $K$  تحت تاثیر بویانسی می باشد.  $Y_M$  نیز بیانگر سهم Dilatation نوسانی در آشفتگی تراکم پذیر از نرخ اضمحلال کلی می باشد.  $C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, C_{\epsilon 3}$  نیز در زمره ثوابت بسته نمودن این مدل محسوب می شوند.  $\sigma_K$  و  $\sigma_\epsilon$  نیز به ترتیب بیانگر اعداد پرانتل آشفته  $K$  و  $\epsilon$  می باشند. این ثوابت و ضرایب آخر به ترتیب دارای مقادیر زیر می باشند ( همان مراجع ):

$$C_{\epsilon 1} = 1.44, C_{\epsilon 2} = 1.92, C_{\epsilon 3} = 0.09, \sigma_K = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3 \quad (9)$$

### ۳-۴- مدل RNG K-ε

مدل  $RNG K-\varepsilon$  با استفاده از معادلات لحظه ای ناویر استوکس و کمک گرفتن از روشی که اصطلاحاً Renormalization Group نامیده می شود، به دست آمده است. روش جدیدی که در مسیر توسعه این مدل مورد استفاده قرار گرفته است، منجر به آن شده است که اولاً توابع جدیدی به معادلات انتقالی  $K$  و  $\varepsilon$  افزوده گردد و ثانیاً ضرایب این مدل کاملاً متفاوت از ضرایب مدل  $K-\varepsilon$  استاندارد دربیاید [۱۴]. معادلات انتقالی مدل آشفته  $RNG K-\varepsilon$  شباهت زیادی به معادلات انتقالی مدل آشفته  $K-\varepsilon$  استاندارد دارد [۱۴]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho K u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \alpha_K \mu_{eff} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right\} + G_K + G_b - \rho \varepsilon - Y_M \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \alpha_\varepsilon \mu_{eff} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} (G_K + C_{\varepsilon 3} G_b) - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{K} - R_\varepsilon \quad (11)$$

در این معادلات نیز  $G_K$  بیانگر تولید انرژی جنبشی آشفته  $K$  تحت تاثیر گرادیان سرعت متوسط می باشد.  $G_b$  نیز بیانگر تولید انرژی جنبشی آشفته  $K$  تحت تاثیر بویانسی می باشد.  $Y_M$  نیز بیانگر سهم Dilatation نوسانی در آشفتهگی تراکم پذیر از نرخ اضمحلال کلی می باشد.  $C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 3}$  نیز در زمره ثوابت بسته نمودن این مدل محسوب می شوند.  $\sigma_K$  و  $\sigma_\varepsilon$  نیز به ترتیب بیانگر اعداد پرانتل آشفته  $K$  و  $\varepsilon$  می باشند. تنها تفاوت میان مدل آشفته  $RNG K-\varepsilon$  و مدل آشفته  $K-\varepsilon$  استاندارد، حضور ترم جدیدی در معادله انتقالی  $\varepsilon$  یعنی  $R_\varepsilon$  است. این ترم بدین صورت رابطه (۱۲) محاسبه می گردد:

$$R_\varepsilon = \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta/\eta_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{K} \quad (12)$$

که در آن،  $\eta \equiv SK/\varepsilon$ ،  $\eta_0 = 4.38$ ،  $\beta = 0.012$ ،  $S \equiv \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$  و  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j - \partial u_j/\partial x_i)$  می باشد. ضرایب این مدل به صورت  $C_{\varepsilon 1} = 1.42$  و  $C_{\varepsilon 1} = 1.68$  محاسبه می گردند.

### ۴-۴- مدل K-ω استاندارد و مدل SST K-ω

معادلات انتقالی حاکم بر مدل آشفتهگی  $K-\omega$  استاندارد به صورت معادلات انتقالی (۱۳) بیان می گردند [۱۵]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho K u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \Gamma_K \frac{\partial K}{\partial x_j} \right\} + G_K - Y_K \quad (1-13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right\} + G_\omega - Y_\omega \quad (2-13)$$

در این معادلات نیز،  $G_K$  بیانگر تولید انرژی جنبشی آشفتهگی تحت تاثیر گرادیان سرعت متوسط و  $G_\omega$  بیانگر تولید  $\omega$  می باشد.  $\Gamma_K$  و  $\Gamma_\omega$  نیز به ترتیب بیانگر پخش موثر  $K$  و  $\omega$ ،  $Y_K$  و  $Y_\omega$  نیز به ترتیب بیانگر اضمحلال آشفتهگی  $K$  و  $\omega$  می باشند. تفاوت اصلی موجود میان مدل آشفتهگی  $SST K-\omega$  و مدل Standard  $K-\omega$  را می توان در موارد ذیل برشمرد [۱۶، ۱۵]:

۱- تغییرات تدریجی از نسخه رینولدز پایین مدل K- $\omega$  استاندارد در نواحی داخلی لایه مرزی آشفته ( نواحی لزج نزدیک به دیواره ) به نسخه رینولدز بالای مدل K- $\epsilon$  در نواحی خارجی لایه مرزی ( نواحی دور از دیواره ).

۲- فرمولاسیون اصلاح شده ویسکوزیته آشفته به منظور در نظر گرفتن اثرات انتقالی تنش های برشی اصلی آشفتهگی.

این دو خصوصیت منجر به آن شده است که مدل آشفتهگی SST K- $\omega$  نسبت به هر دو مدل Standard K- $\omega$  و Standard K- $\epsilon$  از قابلیت های بالاتری برخوردار باشد؛ مدل SST K- $\omega$  در زمره مدل های بسیار قدرتمند از بابت تسخیر فیزیک جریان در هر دو ناحیه رینولدز بالای دور از دیواره و رینولدز پایین نزدیک به دیواره محسوب شده و نسبت به مدل های کلاسیک آشفتهگی ( نظیر مدل Standard K- $\epsilon$  که از جامعیت بالایی در میان کاربران برخوردار است ) از مزایای قابل توجهی برخوردار است.

به طور خلاصه در این مدل از مزایای هر دو مدل K- $\omega$  و K- $\epsilon$  به صورت همزمان استفاده شده است تا بتوان به مدلی با فرمولاسیون بهینه برای استفاده در طیف وسیعی از کاربردهای مهندسی دست یافت. بدین منظور در این مدل از یک تابع اختلاطی  $F_1$  استفاده می شود که مقدار آن در نزدیکی سطح دیواره برابر واحد و در نواحی دور از دیواره برابر صفر بوده و وظیفه آن سوئیچ نمودن از مدل K- $\omega$  در نزدیکی دیواره به مدل K- $\epsilon$  در فواصل به اندازه کافی دور از دیواره می باشد. با استفاده از این تابع اختلاطی می توان مدل K- $\omega$  را در نزدیکی دیواره و مدل K- $\epsilon$  را در مابقی نقاط دامنه محاسباتی فعال نمود. با این کار می توان از مزایای قابل توجه مدل K- $\omega$  در نزدیکی دیواره بدون توجه به خطاهای رایج این مدل در نواحی دور از دیواره - که ناشی از حساسیت این مدل به پارامترهای جریان آزاد است - استفاده نمود. همچنین در مدل SST، اصلاح جدیدی بر روی تعریف ویسکوزیته آشفته صورت گرفته است و آن استفاده از یک ضریب  $C_{\mu}$  متغیر در داخل دامنه محاسباتی ( به جای استفاده از یک مقدار ثابت برای  $C_{\mu}$  در مدل K- $\epsilon$  ) می باشد. استفاده از این ضریب متغیر برای تعیین دقیق نقطه وقوع جدایش جریان تحت تاثیر گرادیان فشارهای مختلف ضروری می باشد [۱۵].

معادلات انتقالی حاکم بر انرژی جنبشی آشفتهگی، K، و نیز فرکانس آشفتهگی،  $\omega$ ، به این صورت بیان می گردند:

$$\frac{\partial \rho K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_j K) = P_K - D_K + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_K \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_j \omega) = \frac{\gamma}{\nu_t} P_K - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + (1 - F_1) 2 \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (15)$$

که در آن جمله تولید  $P_K$  و تخریب  $D_K$  به صورت روابط ذیل تعریف می گردند:

$$P_K = \min(\mu_t S^2, 10 D_K) \quad (16)$$

$$D_K = \beta^* \rho \omega K \quad (17)$$

و تابع اختلاطی  $F_1$  نیز بدین صورت محاسبه می گردد:

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (18)$$

$$\arg_1 = \min\left(\max\left(\frac{\sqrt{K}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{\omega y^2}\right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}K}{CD_{K\omega}y^2}\right) \quad (19)$$

$$CD_{K\omega} = \max\left(2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 1.e^{-10}\right) \quad (20)$$

در اینصورت ویسکوزیته آشفته  $\mu_t$  توسط رابطه (۲۱) محاسبه خواهد شد:

$$\mu_t = \min\left(\frac{\rho K}{\omega}, \frac{a_1 \rho K}{SF_2}\right) \quad (21)$$

که در آن ثابت  $a_1 = 0.31$  بوده و تابع اختلاطی  $F_2$  نیز بدین صورت به دست می آید:

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2) \quad (22)$$

$$\arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{K}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{\omega y^2}\right) \quad (23)$$

ضرایب مورد استفاده در این مدل نیز که آنها را با استفاده از نماد  $\varphi$  نشان می دهیم، تماماً تابعی از تابع اختلاطی  $F_1$  بوده و به صورت  $\varphi = F_1\varphi_1 + (1-F_1)\varphi_2$  به دست می آیند که در آن  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  به ترتیب ضرایب مربوط به مدل های  $K-\omega$  و  $K-\varepsilon$  می باشند:

$$\sigma_{K1} = 1.176, \sigma_{\omega 1} = 2.0, \kappa = 0.41, \gamma_1 = 0.5532, \beta_1 = 0.075, \beta^* = 0.09, c_1 = 10 \quad (24)$$

$$\sigma_{K2} = 1.0, \sigma_{\omega 2} = 1.168, \kappa = 0.41, \gamma_2 = 0.4403, \beta_2 = 0.0828, \beta^* = 0.09 \quad (25)$$

به وابستگی رابطه (۱۹) به فاصله متعامد از دیواره ( که در اینجا با  $y$  نشان داده شده است ) توجه شود؛ همانطور که مشاهده می گردد، این امر منجر به آن شده است که در سوئیچ نمودن از مدل  $K-\omega$  در نزدیکی دیواره به مدل  $K-\varepsilon$  در فواصل به اندازه کافی دور از دیواره، فاصله از دیواره به خوبی لحاظ شده باشد.

## ۵- روش حل معادلات

برای حل معادلات استفاده شده در این مقاله از روش حجم کنترل استفاده شده است که توالی استفاده شده در این فرآیند به صورت زیر بیان می گردد:

- تقسیم دامنه محاسباتی به حجم کنترل های مجزای سازمان یافته یا در اصطلاح Structured ( نظیر آنچه که در شکل ۱ نشان داده شده است ).
- انتگرال گیری از معادلات حاکم بر روی هر یک از این حجم کنترل ها برای تشکیل یک دستگاه معادلات جبری که مجهولات آن متغیرهایی نظیر سرعت، فشار، دما و ... می باشند.
- خطی سازی معادلات حاکم به روش Implicit و حل دستگاه معادلات خطی حاصله برای رسیدن به مقادیر به روز شده متغیرهای وابسته.

با توجه به دقت بالای روش Coupled Implicit در رژیم تراکم پذیر، برای حل معادلات استفاده شده در این مقاله از این روش استفاده شده است. در این روش، معادلات حاکم بر بقای جرم، بقای ممنتوم و نیز بقای

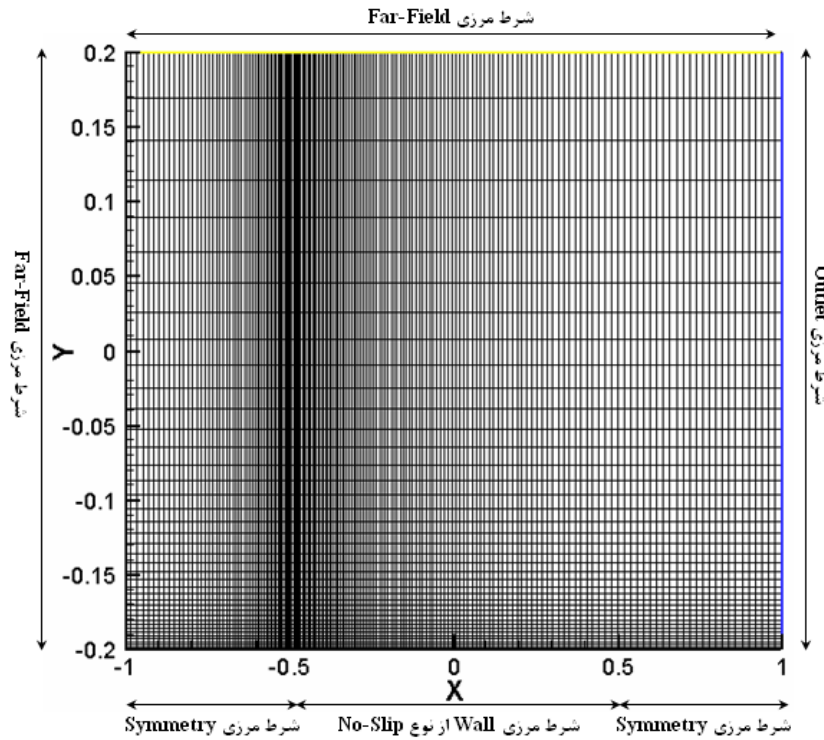


انرژی به صورت همزمان با یکدیگر حل می شوند. معادلات انتقالی حاکم بر اسکالره‌های آشفتگی به صورت مجزا از دیگر معادلات پیش گفته حل می شوند. با توجه به اینکه معادلات حاکم غیرخطی و Coupled می باشند، به تعداد زیادی تکرار برای رسیدن به یک جواب همگرا شده احتیاج می باشد و از همینرو روش مورد استفاده در مقایسه با روش Segregated از زمانبری قابل توجهی برخوردار است.

در فرآیند حل معادلات به روش Coupled، هر یک از معادلات غیرخطی بایستی به نحوی خطی سازی شوند تا به یک دستگاه معادلات از متغیرهای وابسته در هر سلول محاسباتی دست بیابیم. آنگاه دستگاه معادلات خطی حاصله حل می شود تا مقادیر متغیرها در تمام نقاط دامنه محاسباتی به روز گردند. در روش خطی سازی Implicit مقدار مجهول یک متغیر در هر سلول محاسباتی با استفاده از مقادیر معلوم و مجهول همین متغیر در سلول های همسایه محاسبه می گردد. بنابراین هر متغیر مجهول در بیش از یک معادله از دستگاه معادلات ظاهر می گردد و این معادلات بایستی به صورت همزمان حل شوند تا مقادیر مجهولات به دست آیند. خطی سازی معادلات به این روش منجر به تشکیل یک دستگاه معادلات خطی با  $N$  معادله برای هر سلول می گردد که در آن  $N$  بیانگر تعداد معادلات Coupled شده می باشد. برای حل دستگاه معادلات  $N$  معادله ای ایجاد شده برای هر سلول از روش Gauss-Seidel به همراه روش Algebraic-Multi-Grid استفاده شده است [۱۷، ۱۸].

## ۶- شرحی بر دامنه محاسباتی و شرایط مرزی انتخاب شده بر روی آن

شماتیکی از ابعاد و اندازه دامنه محاسباتی و نیز شرایط مرزی به کار گرفته شده در شکل (۱) نشان داده شده است. همانطور که در این شکل مشاهده می گردد، جهت تسخیر هر چه بهتر خصوصیات میدان جریان بالاخص در لبه حمله صفحه مورد نظر ( که محل تشکیل شوک بوده و دارای بیشترین اندازه تنش برشی در این ناحیه می باشد ) شبکه سازمان یافته تولید شده از تراکم مناسبی در هر دو راستا ( هم متمرکز شده به سمت لبه حمله صفحه و هم متمرکز شده به سمت دیواره ) برخوردار است.



شکل ۱- شماتیکی از شبکه تولیدی و شرایط مرزی انتخاب شده

در شرط مرزی دیواره Wall که همان شرط مرزی عدم لغزش فاقد جریان تزریقی یا مکشی جنبی است، هیچ کمیتی جزء شرط مرزی حرارتی دیواره ( برای جریان تراکم پذیر ) و نیز ارتفاع زبری تعریف نخواهد شد. شرط مرزی تقارن یا در اصطلاح Symmetry نیز به صورت  $\partial\phi/\partial n = 0$  تعریف می شود که در آن  $\phi$  بیانگر هر خاصیت فیزیکی دلخواه از جریان و  $n$  نیز بیانگر راستای عمود بر راستای این شرط مرزی است. در شرط مرزی دوردست یا در اصطلاح Far-Field نیز مقادیر سرعت (یا عدد ماخ) مربوط به جریان آزاد و کمیت های مربوط به آشفتگی و دمای جریان آزاد تعریف می گردند.

اگرچه در بسیاری از تحلیل های عددی از " توابع دیواره استاندارد یا در اصطلاح SWF " به عنوان شرط مرزی جهت تسخیر خصوصیات فیزیکی میدان جریان در نزدیکی دیواره استفاده شده است، لیکن در برخی از تحلیل ها نیز با استفاده از شرط مرزی " ارزیابی دقیق دیواره یا در اصطلاح EWT " و امتداد دادن تولید شبکه تا نواحی زیرلایه لزج VSL و استفاده از نسخه های رینولدز پایین مدل آشفتگی معتبر برای نواحی رینولدز پایین و لزج نزدیک به دیواره در این نواحی، تخمین مناسب و دقیقی از کمیت های میدان جریان تا مجاور دیواره به عمل آمده است.

در شرط مرزی تابع دیواره استاندارد از شکل رایج توابع دیواره به عنوان شرط مرزی تعیین خصوصیات آشفتگی میدان جریان در نزدیکی دیواره ( برای مقادیر  $y^+ < 30$  ) استفاده شده است و لذا در این شرط مرزی نیازی به استفاده از شبکه های ریز جهت تسخیر خصوصیات میدان جریان در داخل زیرلایه لزج و ناحیه Buffer نمی باشد و وظیفه تسخیر خصوصیات میدان جریان تماماً بر عهده تابع دیواره استفاده شده گذاشته می شود. در شکل استاندارد تابع دیواره، برای ناحیه حدی زیرلایه لزج، با مقدار  $v \ll v_1$ ، از شرط مرزی (۲۶) استفاده می شود [۱]:

$$u^+ = y^+ \quad (26)$$

و برای ناحیه حدی تماماً آشفته از شرط مرزی (۲۷) استفاده می شود [۱]:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (27)$$

ضرایب  $\kappa, B, E$  در سمت راست معادله (۲۷) ضرایب عمومی بوده و مقادیر آنها برای جریان های عبوری از روی صفحات تخت صاف ( و نه زبر ) و در اعداد رینولدز بالا به صورت مقادیر (۲۸) بیان می گردند:

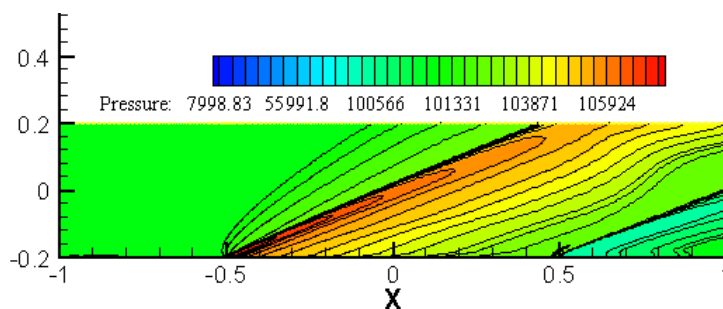
$$\kappa = 0.41, B = 5.5, E = 9.8 \quad (28)$$

افزایش زبری دیواره می تواند باعث کاهش مقدار  $B$  گردد. " شلیختینگ " در سال ۱۹۶۸ نشان داد که برای جریان های آشفته عبوری از داخل لوله ها و کانال ها و برای محدوده  $30 < y^+ < 1000$  مقدار  $B = 4.9$  به دست خواهد آمد.

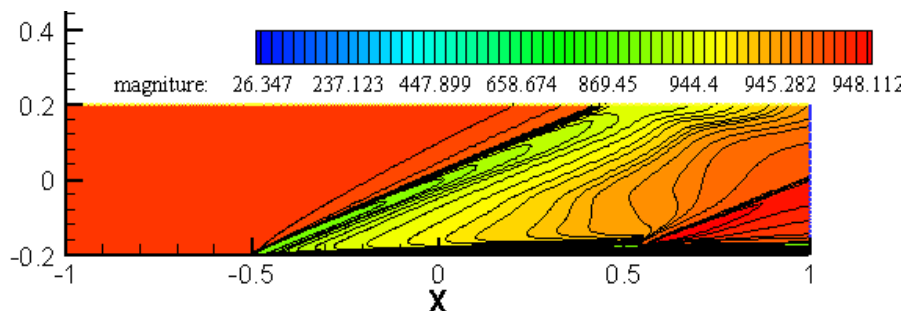
در مورد شرایط مرزی مربوط به معادله انرژی بایستی خاطرنشان نمود که در تحلیل های عددی انجام شده، بسته به اینکه در مرجع مورد استفاده از شرط مرزی دیرپچله یا نیومان برای توزیع دما یا انتقال حرارت بر روی صفحه تخت مورد نظر استفاده شده باشد، دقیقاً از همان شرط مرزی در تحلیل های عددی انجام شده در این مقاله استفاده شده است.

## ۷- نمونه کانتورهایی از تحلیل های انجام شده

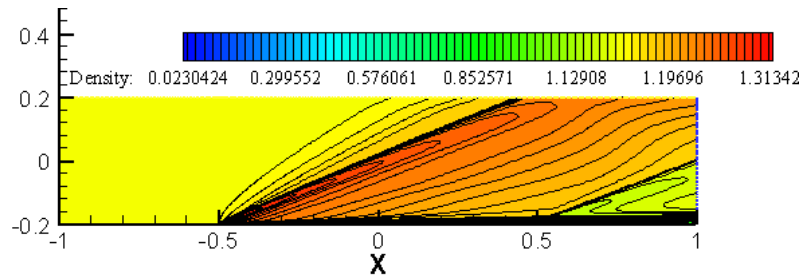
نمونه ای از نتایج حاصل از تحلیل این میدان جریان مافوق صوت تماماً آشفته در عدد ماخ ۲/۷۳ و عدد رینولدز ۲۰ میلیون و دمای دیواره ۲۷۳ کلوین و  $K^+ = 241$  در شکل های (۲) الی (۴) ارائه شده اند.



شکل ۲- کانتور توزیع فشار استاتیکی؛ تشکیل یک شوک مایل و افزایش فشار در پایین دست این شوک مشهود است.



شکل ۳- کانتور توزیع اندازه سرعت؛ کاهش سرعت جریان آزاد در پایین دست شوک مشهود است.



شکل ۴- کانتور توزیع چگالی؛ افزایش چگالی جریان ناشی از اثرات تراکم پذیری جریان در پایین دست شوک مشهود است.

در ادامه نتایج حاصل از تحلیل جریان مافوق صوت بر روی یک صفحه تخت به تفکیک شرایط هر بخش ارائه شده اند.

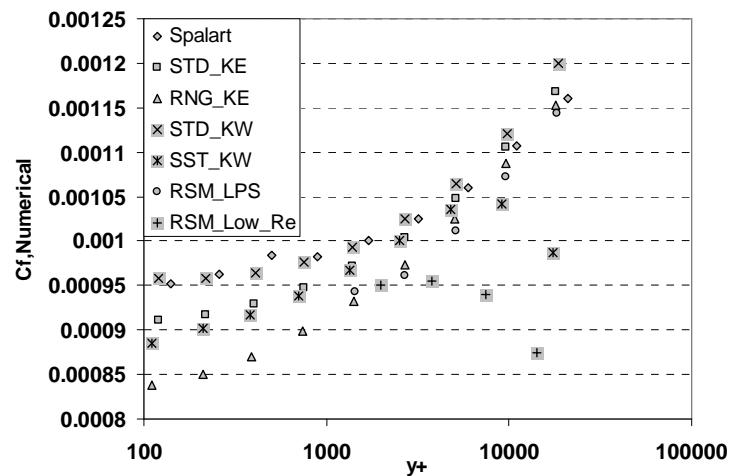
### بخش اول: نتایج عددی مربوط به لایه مرزی مافوق صوت تماماً آشفتۀ بر روی یک صفحه تخت صیقلی با دیواره های عایق

در این قسمت قصد داریم تا به بررسی دقت مدل های آشفتگی در یک لایه مرزی مافوق صوت تشکیل شده بر روی یک دیواره عایق بپردازیم. شرایط جریان لایه مرزی مافوق صوت مرجع مورد استفاده در این قسمت بر روی جدول (۱) نشان داده شده است [۱۹].

جدول ۱- شرایط جریان لایه مرزی مافوق صوت استفاده شده به عنوان مرجع [۱۹]

Mach	Re	$C_{f,Exp.}$	$q_{Wall}$
2.831	8.27E+08	0.0009	0

ابتدا نتایج حاصل از استفاده از مدل های آشفتگی مختلف برای لایه مرزی مافوق صوت تشکیل شده بر روی صفحه مزبور در مقادیر مختلف  $y^+$  (به ازای تراکم های مختلف شبکه محاسباتی تولید شده) به دست آمده است. این نتایج در نمودار شکل (۵) ترسیم شده اند.



شکل ۵- نتایج حاصل از تحلیل لایه مرزی مافوق صوت در عدد رینولدز ۸۲۷ میلیون و عدد ماخ ۲/۸۳۱

از بررسی نتایج شکل (۵) نتایج ذیل به دست خواهد آمد :

- ۱- غیر از مدل آشفتگی SST K- $\omega$ ، در بقیه مدل های آشفتگی، شبکه های درشتی که دارای  $y^+$  در مرتبه ۱۰۰۰۰ می باشند، بین ۲۰ تا ۳۰ درصد خطا در اندازه پسای اصطکاکی را به دنبال خواهند داشت. لیکن در همین شرایط خطای مدل آشفتگی SST K- $\omega$  کمتر از ۱۰ درصد است.
- ۲- چنانچه اندازه  $y^+$  به نزدیکی و یا کمتر از ۱۰۰۰ کاهش یابد، در اینصورت می توان انتظار داشت تا اندازه خطای عمده مدل های آشفتگی تحلیل شده در شکل (۵) به زیر ۱۰ درصد کاهش یابد. بدیهی است که هر چه شبکه محاسباتی از تراکم بیشتری برخوردار باشد و المان های ریز در نزدیکی دیواره متراکم شده باشند، تا زمانی که از شرط مرزی تابع دیواره استاندارد استفاده شده باشد، بر دقت مدل مزبور افزوده خواهد شد.
- ۳- در بین مدل های آشفتگی تحلیل شده، مدل آشفتگی SST K- $\omega$  از دقت بالایی در تسخیر فیزیک لایه مرزی مافوق صوت برخوردار است، به نحوی که با کاهش اندازه المان ها و به تبع آن کاهش اندازه  $y^+$  به محدوده کمتر از ۵۰۰، اندازه خطای محاسباتی این مدل در تسخیر فیزیک پسای اصطکاکی دیواره به ۱ درصد و کمتر از آن خواهد رسید که دقت قابل توجهی برای یک مدل آشفتگی در میان مدل های آشفتگی دو معادله ای محسوب می گردد.
- ۴- پس از مدل آشفتگی SST K- $\omega$ ، مدل آشفتگی K- $\epsilon$  استاندارد قرار داشته که با خطای کمتر از ۵ درصد به ازای محدوده  $y^+$  کمتر از ۵۰۰، در رتبه دوم دقیقترین مدل های آشفتگی قرار دارد.
- ۵- نکته جالب در اینجاست که در مدل K- $\epsilon$  نسخه RNG، با افزایش تراکم المان های ریز در نزدیکی دیواره و به تبع آن با کاهش اندازه  $y^+$ ، علی رغم نزدیک شدن جواب عددی به جواب تجربی به ازای برخی مقادیر  $y^+$ ، لیکن با تداوم فرآیند ریز شدن شبکه، دور شدن از جواب تجربی را شاهد هستیم.
- ۶- نسخه رینولدز پایین مدل آشفتگی RSM اگرچه از دقت مناسبی در تسخیر فیزیک جریان های لزج (حتی برای مقادیر قابل توجه  $y^+$ ) برخوردار است، لیکن با ریزتر شدن المان ها، این مدل با مشکلات ناپایداری مواجه شده و جواب های نادرست و کاملاً غیرفیزیکی را به دنبال خواهد داشت. به همین دلیل نتایج مربوط به این مدل در مقادیر کوچک  $y^+$  در نمودار شکل (۵) ارائه نشده اند. نظیر همین مشکل در نسخه LPS همین مدل مشاهده می گردد.

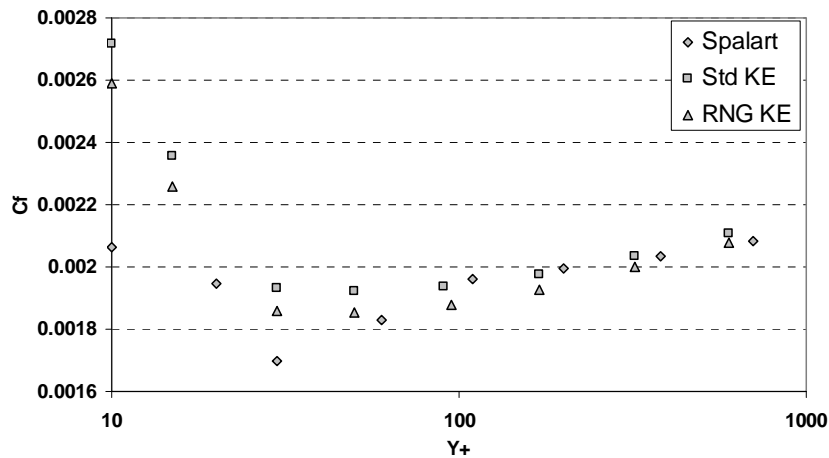
**بخش دوم: نتایج عددی مربوط به لایه مرزی مافوق صوت تماماً آشفته بر روی یک صفحه تخت صیقلی با دیواره های دما ثابت**

شرایط جریان لایه مرزی مافوق صوت مورد استفاده در این قسمت بر روی جدول (۲) نشان داده شده است [۲۰].

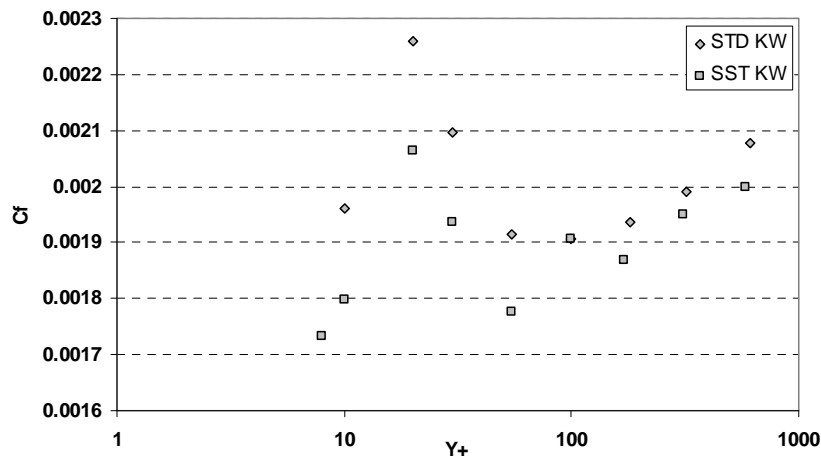
**جدول ۲- شرایط جریان لایه مرزی مافوق صوت تشکیل شده بر روی یک صفحه تخت [۲۰]**

Mach	Re	Twall(K)	Cf,Exp.	Roughness Height
2.75	2.00E+07	276	0.0016	0.00E+00

نتایج عددی به دست آمده در شبکه های مختلف و در مقادیر مختلفی از  $y^+$  در قالب نمودارهای مناسب شکل های (۶) و (۷) ترسیم شده اند.



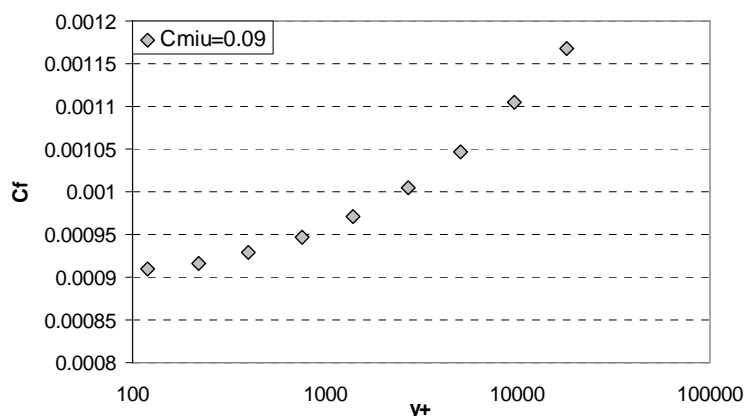
شکل ۶- تغییرات  $C_f$  بر حسب  $y^+$  در مدل های آشفتگی مختلف ( ترسیم شده در نمودار نیمه لگاریتمی )



شکل ۷- تغییرات  $C_f$  بر حسب  $y^+$  به دست آمده توسط مدل های آشفتگی  $K-\omega$  ( ترسیم شده در نمودار نیمه لگاریتمی )

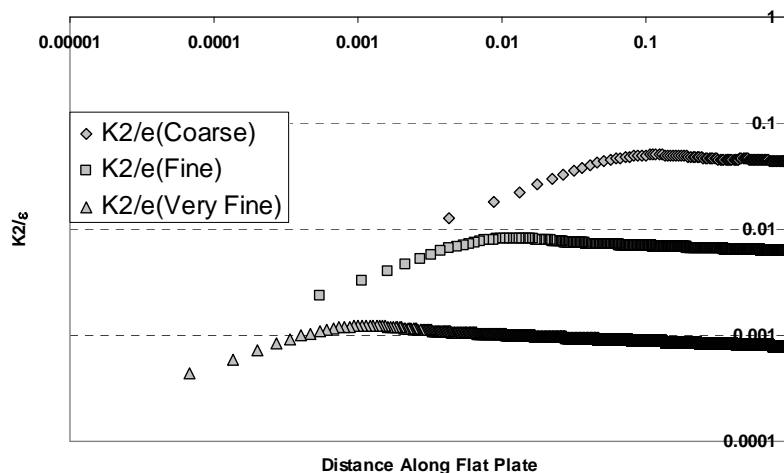
همانطور که در نمودار شکل های (۶) و (۷) مشاهده می شود برای مدل هایی که برای اعداد رینولدز بالا توسعه یافته اند (نمودارهای شکل ۶)، با ریزتر شدن شبکه، به یک نقطه حدی با بهترین دقت می رسیم و پس از آن با کاهش بیشتر اندازه المان ها و به تبع آن ورود به ناحیه لزج نزدیک به دیواره ( به عنوان نواحی رینولدز پایین جریان )، با کاهش دقت و افزایش خطا مواجه خواهیم شد. اما در مقابل برای مدل های  $K-\omega$  استاندارد و  $SST K-\omega$ ، با نزدیک شدن به دیواره دقت مدل به طور ناگهانی افزایش می یابد. و این افزایش دقت برای مدل  $SST K-\omega$  مشهودتر است به طوری که اندازه خطا به کمتر از ۱۰ درصد کاهش می یابد ( نظیر همین نتایج برای شرایط دیگری از عدد ماخ و عدد رینولدز در نتایج شکل ۵ به دست آمده است).

بخش سوم: بررسی عددی وابستگی دقت نتایج به دست آمده از مدل K-ε استاندارد ( با تابع دیواره استاندارد ) نسبت به تغییر مقدار ضریب  $C_{\mu}$  در تسخیر لایه مرزی مافوق صوت با دیواره عایق بدین منظور ابتدا میزان وابستگی نتایج مدل K-ε استاندارد در مقدار  $C_{\mu}=0.09$  ( به عنوان مقدار عددی رایج برای این ضریب ) به مقدار  $y^+$  برای جریان با شرایط مندرج در جدول (۱) بررسی می گردد. همانطور که مشاهده می گردد، در مقدار  $C_{\mu}$  ثابت، با افزایش تراکم المان ها در نزدیکی دیواره و به تبع آن کاهش  $y^+$  به مقدار تجربی ضریب اصطکاک  $0.0009$  نزدیک می گردیم.



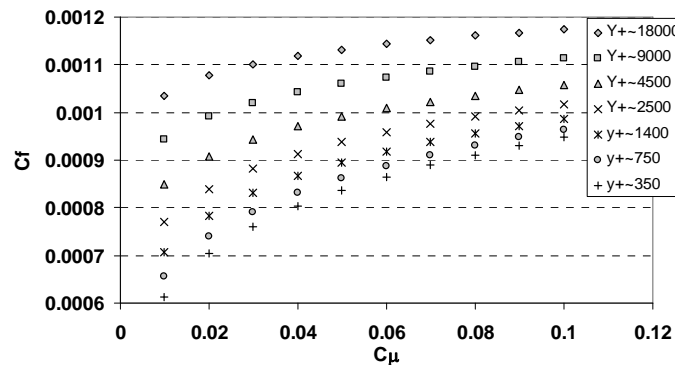
شکل ۸- وابستگی نتایج مدل K-ε استاندارد ( مجهز به تابع دیواره استاندارد ) به مقدار عددی  $y^+$  در  $C_{\mu}=0.09$

حال به بررسی دقیقتر نقش ضریب  $C_{\mu}$  در نتایج عددی به دست آمده و بالاخص تاثیرات این پارامتر بر روی ضریب پسای اصطکاکی پوسته ای خواهیم پرداخت؛ با توجه به اینکه ضریب  $C_{\mu}$  به عنوان مضربی از نسبت  $K^2/\epsilon$  در معادلات آشفتگی ظاهر می شود، لذا بدیهی است که به طور متقابل  $K^2/\epsilon$  نیز به عنوان یک ضریب در کنار ضریب  $C_{\mu}$  ظاهر شده و هر دو می توانند به طور مشابهی بر روی اندازه ضریب پسای اصطکاک پوسته ای نقش مستقیم داشته باشند. از همین رو بایستی به بررسی تغییرات نسبت  $K^2/\epsilon$  در شبکه های درشت و همچنین شبکه های متراکم بپردازیم تا نحوه تاثیرگذاری تغییرات ضریب  $C_{\mu}$  بر روی نتایج به دست آمده بهتر مشخص گردد. این تغییرات در شکل (۹) نشان داده شده است.



شکل ۹- تغییرات نسبت  $K^2/\epsilon$  بر حسب فاصله از ابتدای صفحه در یک نمودار تماماً لگاریتمی

با نگاهی به نتایج نشان داده شده در شکل (۹) اینطور می توان دریافت که در شبکه های درشت با توجه به اینکه اندازه نسبت  $K^2/\varepsilon$  بسیار بزرگتر از اندازه همین کمیت در شبکه های ریز محاسبه شده است، لذا در شبکه های درشت تنها در صورتی می توان امید داشت که به نتایج تجربی دست یافت که از مقادیر کوچک ضریب  $C_{\mu}$  استفاده شده باشد تا به نوعی مقادیر بزرگ محاسبه شده برای نسبت  $K^2/\varepsilon$  به نوعی بالانس گردند. به عکس در شبکه های ریز انتظار بر این است که در مقادیر بزرگتری از  $C_{\mu}$  بتوان به نتایج تجربی دست یافت. دقیقاً همین اتفاق در نتایج ترسیم شده در شکل (۱۰) مشاهده شده است. در شکل (۱۰) میزان وابستگی دقت مدل  $K-\varepsilon$  به مقدار عددی  $C_{\mu}$  در مقادیر مختلف  $y^+$  مشاهده می گردد. همانطور که در این شکل مشاهده می گردد، در شبکه های درشت، کمترین خطا نسبت به مقدار تجربی با مقدار  $C_f=0.0009$ ، به ازای مقادیر کوچک  $C_{\mu}$  به دست آمده است و با ریز شدن شبکه، مقدار  $C_{\mu}$  متناظر با نتایج تجربی به سمت مقادیر بزرگتر میل نموده است. همچنین با نگاهی به تغییرات  $C_{\mu}$  مشخص می شود که با ریز شدن شبکه، با تغییر در مقدار  $C_{\mu}$ ، محدوده تغییرات خطا گسترده تر شده و مثلاً از محدوده تغییر ۱۸ درصدی (در شبکه های درشت) به حوالی ۳۵ درصد و بیشتر از آن (در شبکه های ریز) افزایش می یابد.



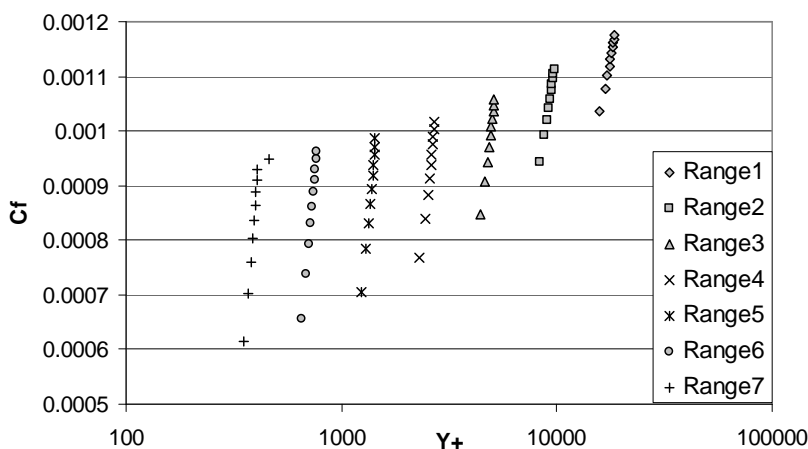
شکل ۱۰- تغییرات  $C_f$  بر حسب تغییرات  $C_{\mu}$  به ازای مقادیر مختلف  $y^+$

همانطور که در شکل (۱۰) مشاهده می گردد، با افزایش مقدار  $C_{\mu}$  از مقدار ۰/۰۱ به ۰/۱، اندازه ضریب پسای اصطکاکی افزایش می یابد. این مساله هم در شبکه های درشت (با مقدار عددی  $y^+$  بزرگ) و هم در شبکه های ریز (با مقدار عددی  $y^+$  کوچک) برقرار می باشد. چنانچه داده های مربوط به نمودار شکل (۱۰) به صورتی که در نمودار شکل (۱۱) نشان داده شده است، ترسیم گردند، دید بهتری نسبت به این حساسیت ایجاد می شود.

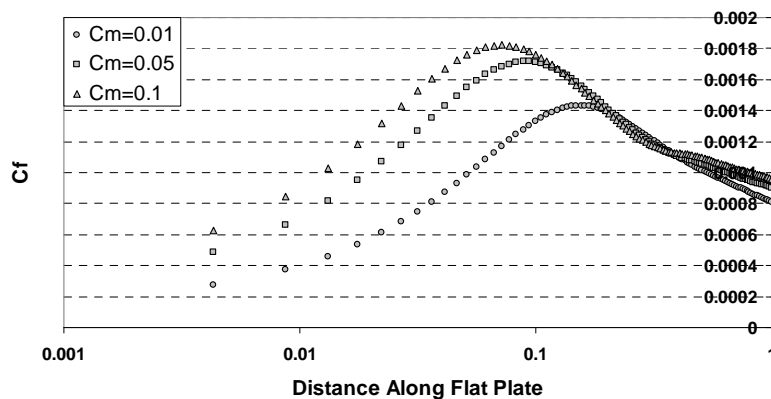
همانطور که در شکل (۱۱) مشاهده می گردد، با هر چه متراکم تر شدن شبکه (و به تبع آن کاهش اندازه  $y^+$ )، اگرچه به مقدار  $C_{\mu}=0.09$  متناظر با نتایج تجربی نزدیکتر می گردیم، لیکن حساسیت نتایج  $C_f$  به اندازه  $C_{\mu}$  به طرز قابل توجهی افزایش می یابد. به طوری که با کاهش اندازه  $y^+$ ، به مقادیری در حدود ۰/۰۰۰۶ برای ضریب پسای پوسته ای خواهیم رسید که مقدار کوچکی در مقایسه با مقدار تجربی ۰/۰۰۰۹ محسوب می گردد.



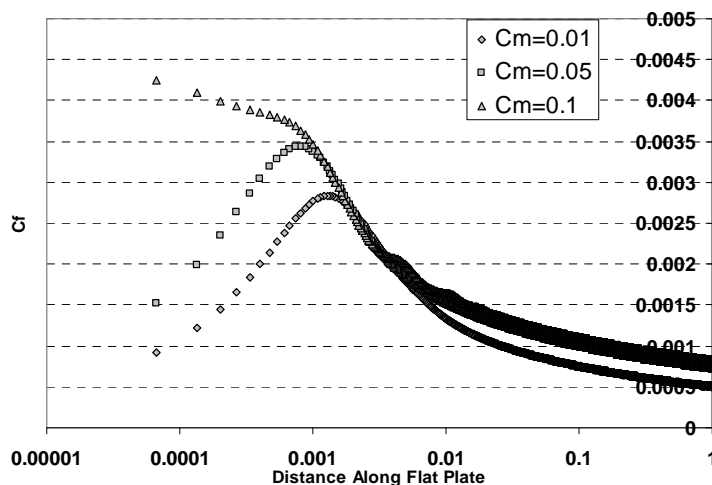
جهت بررسی علت افزایش حساسیت به مقدار عددی  $C_{\mu}$  در شبکه های عددی ریز، مناسب دیده شد تا تغییرات اندازه ضریب پسای اصطکاکی موضعی را در طول صفحه و برای مقادیر مختلف  $C_{\mu}$  در یک شبکه درشت و همچنین در یک شبکه ریز ترسیم نماییم. این نتایج در شکل های (۱۲) و (۱۳) ترسیم شده اند.



شکل ۱۱- تغییرات  $C_f$  بر حسب تغییرات  $y^+$  به ازای مقادیر مختلف  $C_{\mu}$ ؛ در هر دسته نمودار، مقدار  $C_{\mu}$  از نقاط تحتانی به سمت نقاط فوقانی، از مقدار ۰/۰۱ تا ۰/۱ افزایش یافته است.



شکل ۱۲- تغییرات  $C_f$  بر حسب فاصله از ابتدای صفحه برای شبکه محاسباتی درشت ( ترسیم شده در نمودار نیمه لگاریتمی )

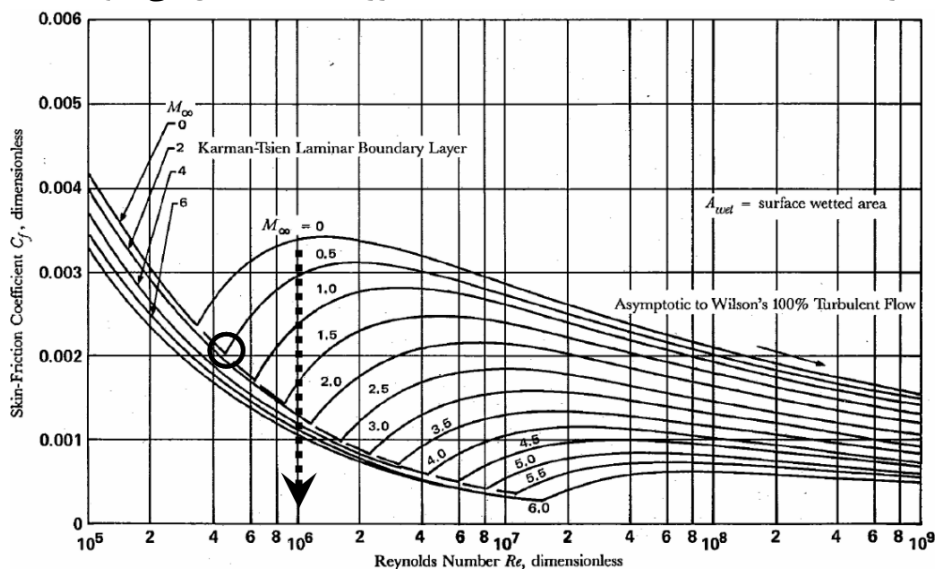


شکل ۱۳- تغییرات  $C_f$  بر حسب فاصله از ابتدای صفحه برای شبکه محاسباتی ریز ( ترسیم شده در نمودار نیمه لگاریتمی )

با مقایسه میان نتایج مندرج در شکل های (۱۲) و (۱۳) مشاهده می گردد که برای شبکه های درشت و به ازای مقادیر بزرگ اندازه  $y^+$  حساسیت مقدار ضریب پسای اصطکاکی موضعی به مقدار  $C_{\mu}$  بالاخص برای نواحی ابتدایی صفحه نسبتاً مشهود است، اما با ریز شدن شبکه و کاهش اندازه  $y^+$  این حساسیت به طرز قابل توجهی افزایش می یابد؛ به طوری که به ازای  $C_{\mu}=0.01$ ، اندازه  $C_{f,x}$  دارای مقداری بیشتر از  $0.004$  است، در حالی که همین کمیت به ازای  $C_{\mu}=0.1$  به کمتر از  $0.001$  کاهش می یابد.

### بخش چهارم: بررسی نقش تراکم پذیری جریان در Re-laminarization یک لایه مرزی آشفته

همانطور که بارها در مراجع مختلف نشان داده شده است [۱] و در شکل (۱۴) نیز نشان داده شده است، در یک عدد رینولدز ثابت، با افزایش عدد ماخ جریان آزاد ( افزایش میزان تراکم پذیری جریان ) به سمت میرا شدن نوسانات آشفتگی و به تبع آن به سمت آرام شدن لایه مرزی آشفته پیش می رویم که به این پدیده در اصطلاح آرام سازی مجدد یا Re-Laminarization یک لایه مرزی آشفته اطلاق می شود.

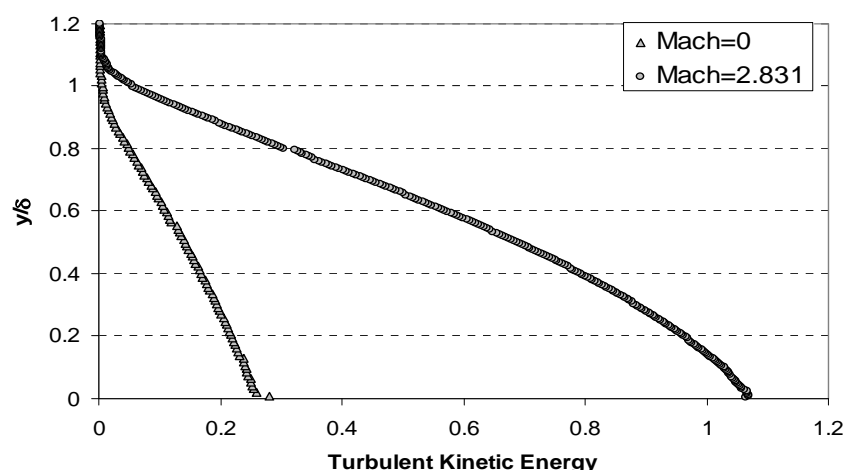


شکل ۱۴- نمودار تجربی ضریب پسا بر حسب رینولدز در اعداد ماخ مختلف ( شکل برگرفته از مرجع [۱] )

در این قسمت به بررسی دقیق عددی نقش تراکم پذیری در میراسازی انرژی جنبشی آشفتگی و به تبع آن در آرام سازی لایه مرزی پرداخته شده است. همانطور که در بند (۴) بخش اول از نتایج این مقاله نیز گفته شد، برای تحلیل های دارای  $y^+ < 500$ ، مدل K-ε استاندارد از دقت قابل توجهی برخوردار است. لذا به منظور بررسی عددی نقش تراکم پذیری ( نقش عدد ماخ ) در آرام سازی مجدد جریان، دو تحلیل عددی در عدد رینولدز  $8.27E+8$  یکی در عدد ماخ صفر ( جریان تراکم ناپذیر ) و دیگری در عدد ماخ مافوق صوت  $2/831$  با استفاده از مدل K-ε استاندارد انجام شد تا عامل اصلی آرام سازی مجدد لایه مرزی آشفته به صورت عددی مشخص گردد. نتایج حاصل از این تحلیل در شکل های (۱۵) الی (۱۷) نشان داده شده است. در عدد ماخ  $2/831$ ، مقدار  $y^+$  برابر  $405$  و اندازه ضریب اصطکاک پوسته ای برابر  $0.000928$  است، در حالی که در عدد ماخ صفر ( جریان تراکم ناپذیر ) برای مقدار  $y^+$  در همین حدود ( برابر  $450$  ) اندازه ضریب اصطکاک پوسته ای برابر  $0.0016$  ( بزرگتر از همین مقدار در جریان مافوق صوت ) به دست آمده است.

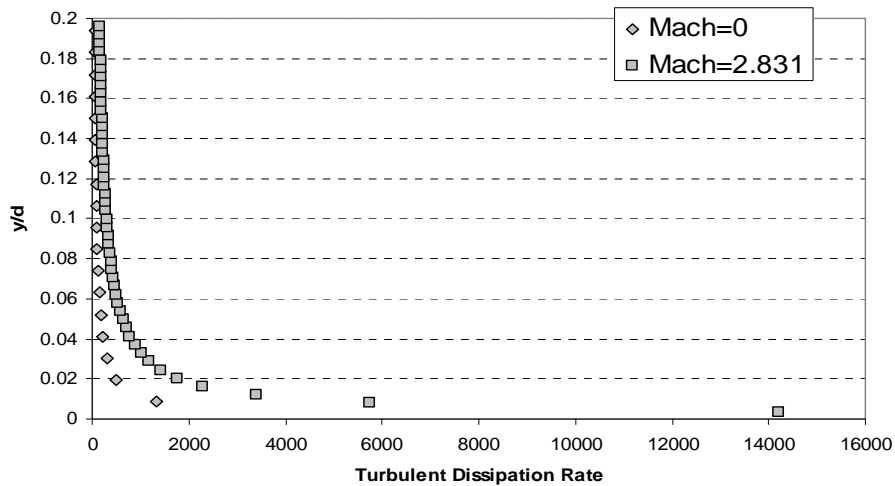
جالب اینجاست که نتایج عددی به دست آمده از انطباق خوبی بر نتایج تجربی مندرج در شکل (۱۴) برخوردار است که این امر حاکی از دقت تحلیل عددی انجام شده چه در جریان تراکم ناپذیر و چه در جریان مافوق صوت مورد نظر است.

همانطور که در شکل (۱۵) مشاهده می گردد، در یک  $y/\delta$  ثابت، اندازه انرژی جنبشی آشفتگی در عدد ماخ  $2/831$  به مراتب ( تقریباً ۵ برابر ) بزرگتر از همین کمیت در عدد ماخ صفر ( جریان تراکم ناپذیر ) در عدد رینولدز یکسان از ابتدای صفحه است.

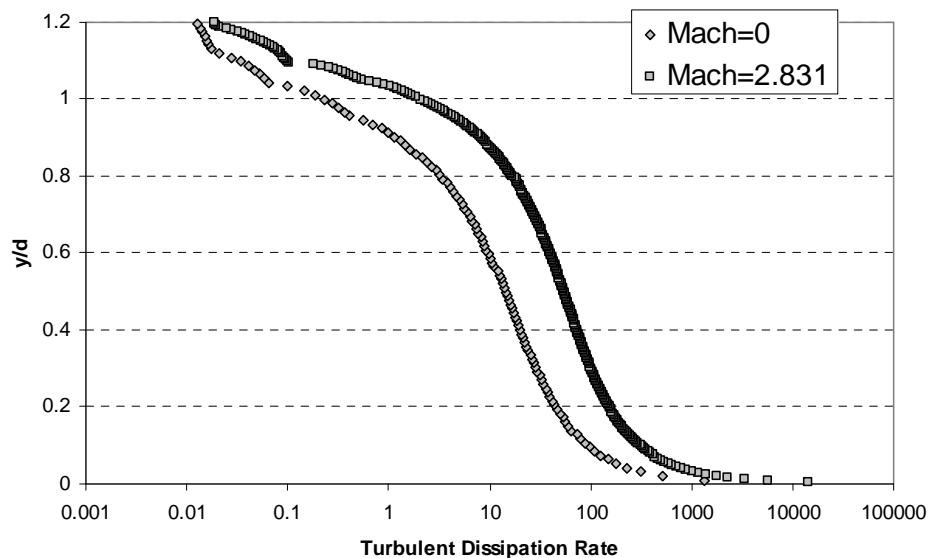


**شکل ۱۵-** پروفیل انرژی جنبشی آشفتگی در عرض ضخامت لایه مرزی برای دو جریان تراکم ناپذیر و تراکم پذیر مافوق صوت در عدد رینولدز یکسان از ابتدای صفحه

همانطور که در شکل های (۱۵-۱۷) مشاهده می گردد، در عدد ماخ  $2/831$ ، شدت اضمحلال انرژی جنبشی آشفتگی بیش از ۱۰ برابر بیشتر از همین کمیت در عدد ماخ صفر ( جریان تراکم ناپذیر ) است. با توجه به اینکه وظیفه میرا نمودن نوسانات آشفتگی در یک میدان عددی بر عهده ترم اضمحلال انرژی جنبشی آشفتگی است، بالاتر بودن شدت نرخ اضمحلال در جریان مافوق صوت را می توان اصلی ترین عامل آرام شدن مجدد جریان در مقایسه با جریان تراکم ناپذیر در همان عدد رینولدز محسوب نمود. فراموش نشود که در نسخه های RANS مدل های آشفتگی، از انرژی جنبشی آشفتگی به عنوان معیاری از نوسانات آشفتگی متوسط گیری شده استفاده می گردد و لذا هر جا این ترم به سمت کاهش میل می نماید، در واقع به سمت میرا شدن نوسانات آشفتگی و به عبارتی به سمت لایه ای شدن ( آرام شدن ) لایه مرزی حرکت شده است.



شکل ۱۶- نمای نزدیکی از پروفیل نرخ اضمحلال آشفتگی در عرض ضخامت لایه مرزی برای دو جریان تراکم ناپذیر و تراکم پذیر مافوق صوت در عدد رینولدز یکسان از ابتدای صفحه



شکل ۱۷- نمودار نیمه لگاریتمی مربوط به پروفیل نرخ اضمحلال آشفتگی در عرض ضخامت لایه مرزی برای دو جریان تراکم ناپذیر و تراکم پذیر مافوق صوت در عدد رینولدز یکسان

### بخش پنجم: حساسیت نتایج به دست آمده به اثرات زبری (ثابت زبری $C_{K_s}$ و $K_s^+$ ) برای لایه مرزی مافوق صوت تماماً آشفتۀ بر روی یک صفحه تخت زبر

در این قسمت قصد داریم تا به بررسی دقت مدل آشفتگی SST  $k-\omega$  در یک جریان لایه مرزی مافوق صوت تشکیل شده بر روی یک صفحه تخت زبر بپردازیم. پیش از ارائه نتایج عددی به دست آمده، مناسبتر آن است که توضیحاتی در مورد نقش کمیت هایی نظیر  $C_{K_s}$  و  $K_s^+$  در لایه های مرزی تشکیل شده بر روی صفحات زبر ارائه شود.

آزمایشات تجربی انجام شده بر روی لوله ها و کانال های زبر نشان داده است که توزیع سرعت متوسط در نزدیکی دیواره های زبر (زمانی که بر حسب معمول در مقیاس نیمه لگاریتمی ترسیم می گردد) دارای شیب

یکسان  $1/\kappa$  است، ولی به طور همزمان دارای یک ثابت اضافی  $B$  در قانون لگاریتمی تابع دیواره است؛ بنابراین قانون تابع دیواره اصلاح شده برای سطوح زیر دارای رابطه (۲۹) می باشد [۱]:

$$\frac{u_p u^*}{\tau_w / \rho} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( E \frac{\rho u^* y_p}{\mu} \right) - \Delta B \quad (29)$$

که در آن  $u_p$  بیانگر اندازه سرعت در نقطه  $p$  (مرکز اولین المان محاسباتی مجاور به دیواره) و  $y_p$  نیز بیانگر فاصله نقطه  $p$  از دیواره زیر مورد نظر بوده و اندازه سرعت  $u^*$  نیز برابر  $u^* = C_{\mu}^{1/4} K^{1/2}$  می باشد. همچنین  $\Delta B$  یک تابع زبری بوده که جابجایی معادله تابع دیواره را به واسطه اثرات زبری بیان می کند. به طور کلی  $\Delta B$  تابعی از نوع زبری (اعم از شن یکنواخت، Rivets, Threads, Ribs, Mesh-Wire و غیره) و نیز اندازه زبری دیواره است. هیچ نوع تابع دیواره عمومی را نمی توان یافت که برای تمام انواع زبری معتبر باشد. لیکن برای یک زبری Sand-Grain و انواع مشابهی از عناصر زبری یکنواخت، تابع زبری  $\Delta B$  را می توان ارائه نمود که با ارتفاع زبری بدون بعد،  $K_s^+ = \rho K_s u^* / \mu$  به خوبی همبسته شده است که در آن  $K_s$  بیانگر ارتفاع فیزیکی زبری و  $u^* = C_{\mu}^{1/4} K^{1/2}$  می باشد. تحلیل نتایج تجربی حاکی از این حقیقت مهم است که تابع زبری  $\Delta B$  یک تابع یکتا از  $K_s^+$  نبوده، ولی بسته به مقدار  $K_s^+$  دارای شکل های مختلفی می باشد. آنچه که در عمل مشاهده شده است آن است که سه رژیم مجزا از یکدیگر برای یک صفحه زبر وجود دارد:

۱- رژیم صیقلی (از لحاظ هیدرودینامیکی) با مقدار  $3 < K_s^+ < 5$

۲- رژیم گذار با مقدار  $3 < K_s^+ < 70 \sim 90$

۳- رژیم تماماً زبر با مقدار  $K_s^+ > 70 \sim 90$

بسته به نتایج تجربی موجود، در حالتی که با رژیم صیقلی سروکار داریم، اثرات زبری قابل چشم پوشی می باشند؛ ولی همین اثرات در رژیم های گذار اهمیت قابل توجهی پیدا می نمایند و در حالتی که با صفحات زبر سروکار داریم، تمام اثرات زبری بر روی دیواره و کمیت های فیزیکی مرتبط با آن ظاهر می گردند. در تحلیل عددی انجام شده نیز رژیم زبری به سه رژیم تقسیم شده و از فرمول های ارائه شده توسط Bradshaw و Cebeci (که بر مبنای اطلاعات ارائه شده توسط نیکورادزه به دست آمده اند و در مقاله مرجع [۲۰] ارائه شده است) جهت محاسبه تابع زبری  $\Delta B$  برای هر رژیم استفاده شده است. همانطور که انتظار می رود، برای رژیم صیقلی (با مقدار زبری بدون بعد  $K_s^+ < 2.25$ ) از مقدار  $\Delta B = 0$  استفاده شده است. برای رژیم گذار با مقدار  $2.25 < K_s^+ < 90$ ، از تابع زبری (۳۰) استفاده شده است:

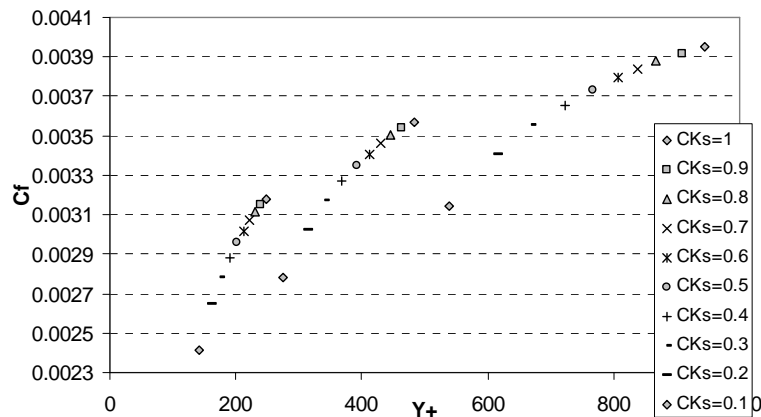
$$\Delta B = \frac{1}{\kappa} \ln \left[ \frac{K_s^+ - 2.25}{87.75} + C_{K_s} K_s^+ \right] \times \sin [0.4258 (\ln K_s^+ - 0.811)] \quad (30)$$

که در آن  $C_{K_s}$  بیانگر ثابت زبری بوده و وابسته به نوع زبری می باشد. در رژیم تماماً آشفته (با مقدار زبری  $K_s^+ > 90$ ) از تابع زبری (۳۱) استفاده می گردد:

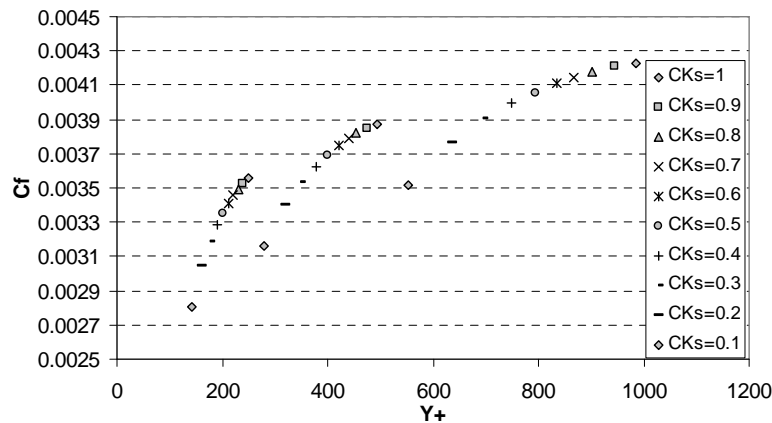
$$\Delta B = \frac{1}{\kappa} \ln (1 + C_{K_s} K_s^+) \quad (31)$$

با توجه به اینکه مقدار پیش فرض برای ثابت زبری برابر  $0.5$  در نظر گرفته می شود، در تحلیل های بعدی انجام شده، حساسیت مقادیر ضریب پسای اصطکاکی برای یک جریان تماماً آشفته تراکم پذیر سرعت بالا با عدد ماخ  $2/73$  و مقدار  $K_s^+ = 104$  (مقادیر مندرج در جدول ۴) نسبت به مقادیر دو پارامتر تراکم شبکه در

نزدیکی دیواره ( با معیار  $y^+$  ) و نیز ثابت زبری  $C_{Ks}$  مورد بررسی قرار گرفته است. به واسطه سابقه مدل آشفتهگی K- $\omega$  SST در کسب نتایجی با دقت بالا، در این تحلیل ها از این مدل آشفتهگی استفاده شده است.



شکل ۱۸- تغییرات  $C_f$  بر حسب  $y^+$  ( به دست آمده از مدل آشفتهگی K- $\omega$  SST ) برای لایه مرزی با عدد ماخ جریان آزاد برابر  $2/73$  و عدد رینولدز  $20$  میلیون و دمای دیواره  $273$  کلین و  $K_s^+=104$



شکل ۱۹- تغییرات  $C_f$  بر حسب  $y^+$  ( به دست آمده از مدل آشفتهگی K- $\omega$  SST ) برای لایه مرزی با عدد ماخ جریان آزاد برابر  $2/7$  و عدد رینولدز  $20$  میلیون و دمای دیواره  $273$  کلین و  $K_s^+=571$

- با توجه به نتایج مندرج در شکل های (۱۸) و (۱۹) می توان به موارد ذیل اشاره نمود:
- با نگاهی به تغییرات  $y^+$  بر حسب مقدار  $C_{Ks}$ ، به نظر می رسد که همان نقشی را که ریز شدن شبکه در کاهش  $y^+$  ایفاء می نماید، کاهش  $C_{Ks}$  نیز می تواند در مقادیر  $C_f$  تغییر ایجاد نماید.
  - با لحاظ نمودن این نکته که مقدار پیش فرض برای ثابت زبری برابر  $0/5$  در نظر گرفته می شود، به نظر می رسد که با افزایش مقدار  $K^+$  از مقداری در مرتبه  $100$  به مرتبه  $500$ ، از قابلیت مدل K- $\omega$  SST در تسخیر فیزیک جریان کاسته می گردد. به زبان ساده تر، با افزایش تداخل میان عنصر زبری و لایه Buffer Layer و Outer Region ( نفوذ اثرات زبری به لایه های دورتر از دیواره با اندازه رینولدز موضعی بالاتر ) از میزان دقت مدل K- $\omega$  SST کاسته می گردد.
  - با توجه به اینکه روابط ارائه شده توسط Cebeci و Bradshaw تماماً برای جریان های تراکم ناپذیر به دست آمده اند، بدیهی است که استفاده از شکل رایج این روابط می تواند در مقادیر عددی حاصله

خطا ایجاد نماید. از همینرو اولاً بایستی در معیارهای تشخیص رژیم صیقلی، رژیم گذار و رژیم تماماً زیر و حدود بالا و پایین آنها تجدید نظر اساسی صورت گیرد و ثانیاً روابط ارائه شده توسط آنها مورد بازنگری قرار گیرد.

در ادامه نگاهی به نتایج تجربی مندرج در مرجع [۲۱] انداخته شده تا دید بهتری نسبت به مقادیر عددی به دست آمده برای یک لایه مرزی تراکم پذیر تشکیل شده بر روی یک صفحه تخت کسب گردد. این نتایج به ترتیب در جداول (۳) و (۴) درج شده اند. لازم به ذکر است از همین نتایج تجربی به عنوان مرجع مقایسه داده های عددی استفاده شده است. در این نتایج ارتفاع زبری بدون بعد به صورت  $K_s^+ = \rho K_s u^* / \mu$  تعریف می گردد که در آن  $K_s$  بیانگر اندازه ارتفاع زبری صفحه می باشد.

**جدول ۳-** خلاصه ای از نتایج تجربی اندازه گیری شده بر روی یک صفحه تخت صیقلی و زبر

Roughness Condition	$K_s$ (mm)	$T_w$ (K)	$Mach_{\infty}$
Smooth	0	276	2.75
2D	1.09	274	2.73
3D	0.91	273	2.73
80 Grit	0.44	273	2.73
36 Grit	1.42	273	2.72
20 Grit	1.98	273	2.70

**جدول ۴-** خلاصه ای از نتایج تجربی اندازه گیری شده بر روی یک صفحه تخت صیقلی و زبر (اندازه گیری شده در  $x=0.56m$  از ابتدای صفحه)

Roughness Condition	$K_s^+$	$\delta$ (mm)	$\theta$ (mm)	$C_f$
Smooth	0	12.4	0.8	0.0016
2D	289	16.8	1.32	0.0038
3D	241	15.8	1.29	0.0037
80 Grit	104	14.7	1.11	0.0030
36 Grit	395	18.0	1.43	0.0040
20 Grit	571	17.7	1.45	0.0041

با نگاهی به نتایج مندرج در جداول (۳) و (۴) نکات زیر قابل ذکر است:

- با توجه به جواب های به دست آمده، مقدار ضریب پسای عددی به دست آمده برای صفحه صیقلی دارای خطای بزرگی نسبت به مقدار تجربی نظیر خود است، حال آنکه ضریب پسای عددی به دست آمده برای صفحه زبر دارای خطای کمتر و به تبع آن انطباق بیشتری بر نتایج تجربی نظیر است؛ لذا به نظر می رسد که دقت مدل های آشفتگی هر چه که به شرایط صفحات واقعی نزدیکتر می شود (شرایطی که در آن زبری هر چند به میزان اندک وجود دارد) بالاتر است؛ چرا که ضرایب بسته نمودن این مدل ها قاعدتاً با همبسته شدن با نتایج تجربی که در به دست آوردن آنها از صفحاتی نه لزوماً صیقلی استفاده شده است، به دست آمده است.

- حتی در نتایج تجربی نیز با اضافه شدن زبری به میزان ۱ میلی متر، اندازه پسا به میزان بیش از دو برابر افزایش می یابد و این امر حاکی از حساسیت بالای ضریب پسای اصطکاک پوسته ای ( و دیگر کمیت های نظیر با آن در مسائل مربوط به انتقال حرارت ) به اندازه زبری صفحه است. در ادامه مقدار ضخامت لایۀ مرزی  $\delta$  و ضخامت ممنتوم  $\theta$  به دست آمده توسط مدل K- $\omega$  SST با مقادیر تجربی مندرج در جدول (۴) مقایسه شده و در جدول (۵) این مقایسه ارائه شده است.

**جدول ۵-** خلاصه ای از نتایج عددی به دست آمده از مدل K- $\omega$  SST مربوط به  $y^+=8$  برای لایۀ مرزی با ماخ جریان آزاد ۲/۷۵ و رینولدز ۲۰ میلیون در مقایسه با نتایج تجربی اندازه گیری شده بر روی صفحه تخت صیقلی ( اندازه گیری شده در  $x=0.56m$  )

خطای عددی نسبت به تجربی %	ضخامت ممنتوم عددی	خطای عددی نسبت به تجربی %	ضخامت لایۀ مرزی عددی	معیار ضخامت لایۀ مرزی
9.62	0.723	-37.3	7.77	$U/U_{inf}=99\%$
8.75	0.730	-29.67	8.72	$U/U_{inf}=99.5\%$
8.12	0.735	-10	11.16	$U/U_{inf}=99.9\%$

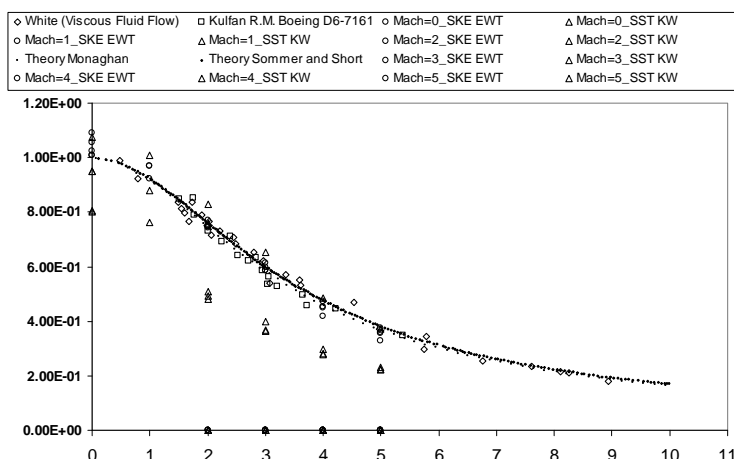
با نگاهی به نتایج مندرج در شکل (۷) و نیز نتایج مندرج در جدول (۵) مشاهده می گردد که اندازه ضریب پسای اصطکاک در ریزترین شبکه محاسباتی با کمتر از ۱۰ درصد خطا نسبت به نتایج تجربی به دست آمده و اندازه ضخامت لایۀ مرزی با احتساب معیار ۹۹/۹ درصدی نیز با ۱۰ درصد خطا نسبت به نتایج تجربی به دست آمده است. همچنین اندازه ضخامت ممنتوم نیز ۸ درصد خطا را نشان می دهد.

### بخش ششم: بررسی دقت مدل های آشفتگی K- $\epsilon$ استاندارد و K- $\omega$ SST در محاسبۀ نسبت $C_f/C_{f0}$ در اعداد ماخ مختلف

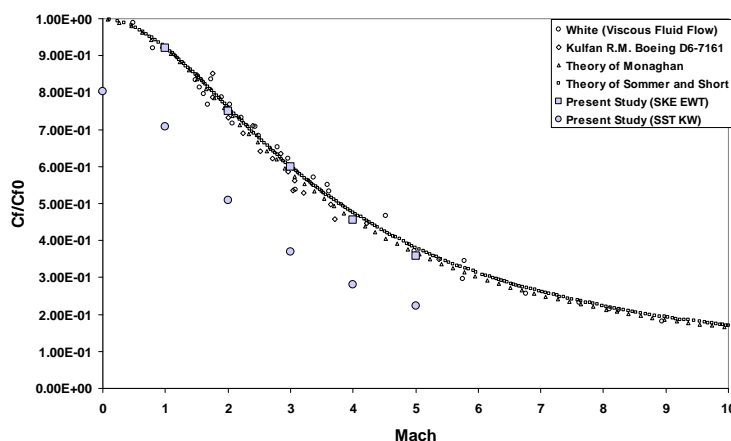
یکی از پارامترهای مهم در تشخیص قدرت مدل های آشفتگی در تسخیر فیزیک جریان های تراکم پذیر، میزان دقت این مدل ها در محاسبۀ رفتار نزولی مشاهده شده برای نسبت  $C_f/C_{f0}$  ( نسبت میان ضریب پسای اصطکاک محاسبه شده در یک عدد ماخ و عدد رینولدز مشخص به ضریب پسای اصطکاک تراکم ناپذیر محاسبه شده در همان عدد رینولدز ) در اعداد ماخ مختلف است. مرسوم بر این است که برای محاسبۀ ضریب پسای اصطکاک جریان تراکم ناپذیر از رابطه پرانتل  $C_{f0}=0.07425/(Re^{0.2})$  استفاده می شود. در این قسمت قصد داریم تا با استفاده از برخی نتایج معتبر منتشر شده، دقت دو مدل K- $\epsilon$  استاندارد و K- $\omega$  SST را در محاسبۀ رفتار نزولی  $C_f/C_{f0}$  در رژیم تراکم پذیر و به ازای کلیۀ اعداد ماخ کمتر از ۵ مورد بررسی قرار داده و نتایج به دست آمده را با نتایج معتبر تجربی White و شرکت Boeing و نیز تئوری های کلاسیک ارائه شده توسط سامر و شورت و نیز نتایج ارائه شده توسط موناگان مورد مقایسه قرار دهیم.

در ابتدا نتایج به دست آمده از تحلیل جریان بر روی صفحه تخت در عدد رینولدز پایینی نظیر پانصد هزار در شدت آشفتگی جریان آزاد ۱ درصدی و طول مقیاس آشفتگی یک میلی متری با مقدار ضریب اصطکاک جریان تراکم ناپذیر  $0.05381$  ( به دست آمده از رابطه پرانتل ) در اعداد  $y^+$  مختلف ارائه شده است.

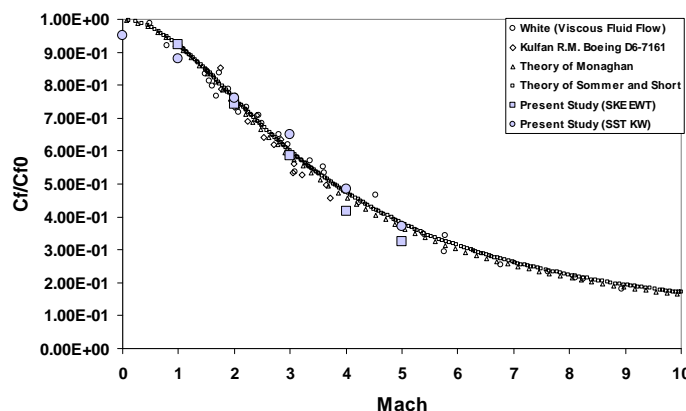




شکل ۲۰- نتایج عددی نسبت  $Cf/Cf_0$  در اعداد ماخ مختلف و تراکم های مختلف شبکه محاسباتی مقایسه شده با نتایج معتبر منتشرشده White و Boeing و تئوری های Sommer and Short و Monaghan



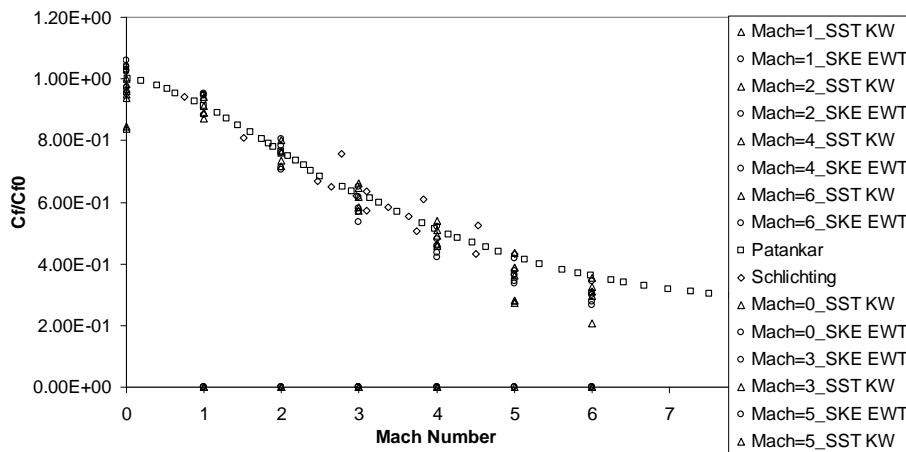
شکل ۲۱- نتایج عددی نسبت  $Cf/Cf_0$  در اعداد ماخ مختلف و ریزترین شبکه محاسباتی (با  $y^+$  در مرتبه ۱) مقایسه شده با نتایج معتبر منتشرشده White و Boeing و تئوری های Sommer and Short و Monaghan



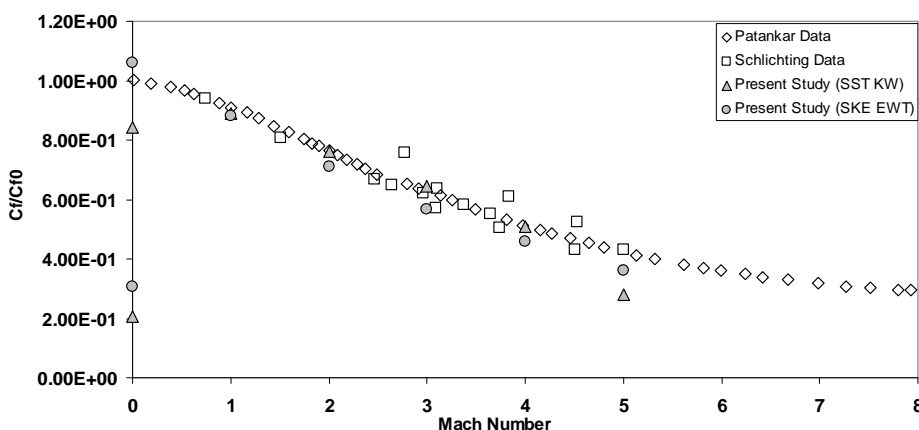
شکل ۲۲- نتایج عددی نسبت  $Cf/Cf_0$  در اعداد ماخ مختلف و درشت ترین شبکه محاسباتی (با  $y^+$  در مرتبه ۳۰) مقایسه شده با نتایج معتبر منتشرشده White و Boeing و تئوری های Sommer and Short و Monaghan

همانطور که مشاهده می گردد که برای یک شبکه ریز (با  $y^+$  در مرتبه واحد)، با افزایش عدد ماخ، مقدار نسبت  $Cf/Cf_0$  به دست آمده از مدل K- $\omega$  SST در مقایسه با نتایج معتبر منتشرشده White و Boeing و

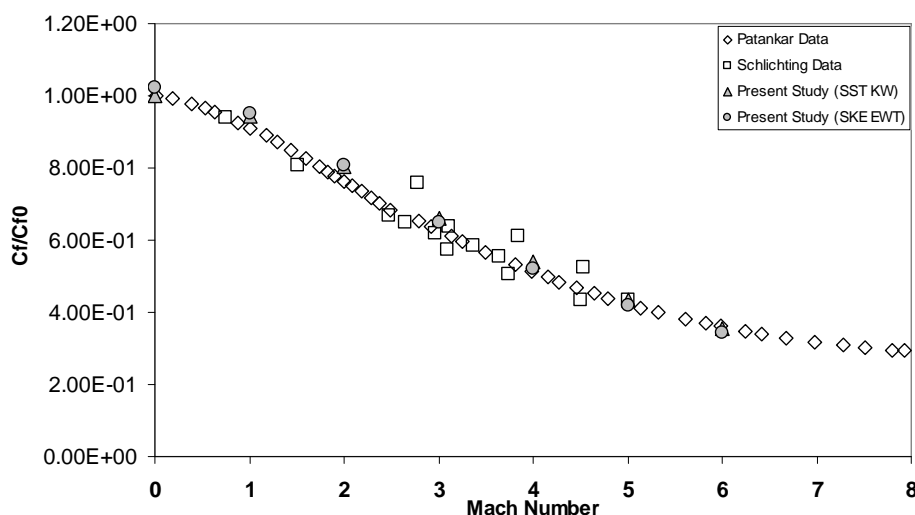
تئوری های کلاسیک Sommer and Short و Monaghan با یک مقدار Shift یکسان به سمت مقادیر کمتر میل نموده است؛ این امر حاکی از آن است که می توان با کمک گرفتن از روش Tuning و کالیبراسیون مجدد ضرایب این مدل، نتایج این مدل را بر روی نتایج تجربی و تئوریک تایید شده منطبق نمود. از طرفی به وضوح مشخص است که مدل K-ε استاندارد با شرط مرزی EWT در شبکه های ریز دقت به مراتب بهتری را حداقل در اعداد ماخ بالا و عدد رینولدز پانصد هزار در مقایسه با نتایج مدل K-ω SST ارائه نموده است. اما در شبکه های درشت محاسباتی با مقدار  $y^+$  در مرتبۀ ۳۰، اختلاف میان نتایج چندان مشهود نبوده و هر دو مدل K-ε استاندارد و K-ω SST از دقت مناسبی در تسخیر تغییرات نسبت  $C_f/C_{f0}$  برخوردار هستند. حال نتایج به دست آمده از تحلیل جریان بر روی صفحه تخت در عدد رینولدز بالایی نظیر ۱۰ میلیون در شدت آشفتگی جریان آزاد ۱ درصدی و طول مقیاس آشفتگی یک میلی متری با مقدار ضریب اصطکاک جریان تراکم ناپذیر ۰/۰۰۲۹۵۶ (به دست آمده از رابطه پرانتل) در اعداد  $y^+$  مختلف ارائه شده و نتایج با نتایج مندرج در مقاله منتشر شده توسط پاتانکار و شلیختینگ مقایسه شده است [۲۲].



شکل ۲۳- نتایج عددی نسبت  $C_f/C_{f0}$  در اعداد ماخ مختلف و تراکم های مختلف شبکه محاسباتی مقایسه شده با نتایج معتبر Patankar و Schlichting

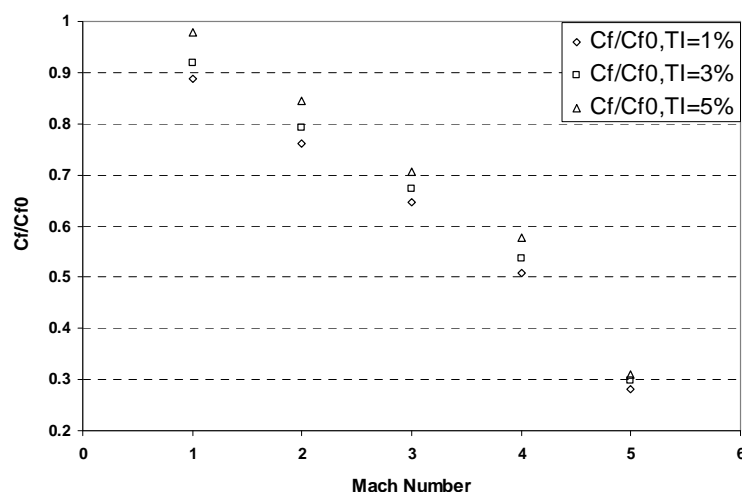


شکل ۲۴- نتایج عددی نسبت  $C_f/C_{f0}$  در ریزترین شبکه محاسباتی ( $y^+$  در مرتبۀ واحد) در اعداد ماخ مختلف مقایسه شده با نتایج معتبر Patankar و Schlichting



شکل ۲۵- نتایج عددی نسبت  $C_f/C_{f0}$  در درشت ترین شبکه محاسباتی ( $y^+$  در مرتبه ۵۰) در اعداد ماخ مختلف مقایسه شده با نتایج معتبر Patankar و Schlichting

همانطور که مشاهده می گردد در اعداد رینولدز بالا و با افزایش اعتبار فرض جریان تماماً آشفته، برای شبکه های محاسباتی ریز و با افزایش عدد ماخ، مقدار نسبت  $C_f/C_{f0}$  به دست آمده از مدل  $K-\omega$  SST در مقایسه با مقادیر داده های Patankar و Schlichting از دقت بالاتری نسبت به نتایج به دست آمده از مدل  $K-\varepsilon$  استاندارد با شرط مرزی EWT برخوردار است؛ اما در شبکه های درشت محاسباتی با مقدار  $y^+$  در مرتبه ۵۰، مجدداً اختلاف میان نتایج چندان مشهود نمی باشد و هر دو مدل از دقت مناسب مهندسی برخوردار هستند. در ضمن با ریز شدن شبکه محاسباتی و ورود به ناحیه زیرلایه لزج، در عدد ماخ بالاتر از ۵ (که وارد جریان ماوراء صوت Hypersonic) شده ایم، از اعتبار نتایج مدل  $K-\omega$  SST کاسته شده است. در قسمت پایانی مقاله، حساسیت نتایج عددی برای نسبت  $C_f/C_{f0}$  در عدد رینولدز ۱۰ میلیون در مقادیر مختلفی از شدت آشفتگی جریان آزاد و برای اعداد ماخ مختلف در یک شبکه نسبتاً متراکم (با  $y^+$  در مرتبه ۳۰) ارائه شده است.



شکل ۲۶- نتایج عددی نسبت  $C_f/C_{f0}$  در اعداد ماخ مختلف و شدت های مختلف آشفتگی جریان آزاد

همانطور که در شکل (۲۶) مشاهده می گردد، برای عدد رینولدز ۱۰ میلیون، با افزایش شدت آشفتگی جریان آزاد، اندازه پَسای اصطکاکی در هر عدد ماخ به میزان مشخصی افزایش پیدا می نماید و همانطور که مشاهده می گردد، در یک شدت آشفتگی ثابت، با افزایش عدد ماخ، کماکان کاهش مقدار نسبت  $C_f/C_{f0}$  را شاهد هستیم.

## ۸- نتیجه گیری

جمعیت نتایج به دست آمده حاکی از وابستگی بسیار زیاد نتایج عددی به دست آمده از دو مدل آشفتگی K-ε استاندارد و K-ω SST برای یک لایه مرزی تراکم پذیر مافوق صوت به تراکم شبکه محاسباتی، نوع شرط مرزی در نظر گرفته شده برای دیواره و نواحی نزدیک به آن، ضریب  $C_{\mu}$  ( برای مدل آشفتگی K-ε)، ضریب ثابت زبری  $C_{Ks}$  و نیز اندازه  $K_s^+$  ( به عنوان عدد بدون بعد متناظر با ارتفاع زبری برای صفحات زبر ) در لایه های مرزی تشکیل شده بر روی صفحات زبر می باشد. به نحوی که عدم توجه به مقدار انتخاب شده برای هر یک از این پارامترها می تواند منجر به دستیابی به نتایجی با خطاهای قابل توجه گردد. از سوی مقابل همین وابستگی به پارامترهای فوق می تواند به عنوان ابزاری برای تنظیم نتایج و انطباق دهی نتایج عددی بر نتایج تجربی موجود مورد استفاده قرار گیرد.

## مراجع

- [۱] صنیعی نژاد، مهدی. مبانی جریان های آشفته و مدل سازی آنها، انتشارات دانش نگار، (۱۳۸۸). فصول اول و دوم
- [2] Hanine, F., and Kourta, A., "Performance of Turbulence Models to Predict Supersonic Boundary Layer Flows", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 89, pp. 221-235, North-Holland, (1991).
- [3] Lee, D.B., Sochelau, F., and Leblanc, R., "The Compressible Turbulent Boundary Layer on a Strongly Heated Wall", 11th Australasian Fluid Mechanics Conference, University of Tasmania, Dec. (1992).
- [4] Freire, A.P.S., Cruz, D.O.A., and Pellegrini, C.C., "Velocity and Temperature Distributions in Compressible Turbulent Boundary Layers with Heat and Mass Transfer" Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 38, No. 13, pp. 2507-2515, (1995).
- [5] Xu, S., and Martin, M.P., "Assessment of Inflow Boundary Conditions for Compressible Turbulent Boundary Layers", Phys. Fluids, Vol. 16, No. 7, July (2004).
- [6] Krechetnikov, R., and Lipatov, I. I., "On Upstream Influence in Supersonic Flows", J. Fluid Mech. Vol. 539, pp. 167-178 (2005).

- [7] Sharif, M.A.R., Guo, G., "Computational Analysis of Supersonic Turbulent Boundary Layers over Rough Surfaces using the K- $\omega$  and the Stress- $\omega$  Models", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 31, pp. 2655-2667, (2007).
- [8] Chio, J.I., Edwards, J.R., and Baurle, R.A., "Compressible Boundary Layer Predictions at High Reynolds Number using Hybrid LES/RANS Methods", *AIAA J.*, Vol. 47, pp. 2179-2193, (2008).
- [9] Sahoo, D., Schultze, M., and Smiths, A.J., "Effects of Roughness on a Turbulent Boundary Layer in Hypersonic Flow", 39th AIAA Fluid Dynamics Conference, San Antonio, TX, (2009).
- [10] Lagha, M., Kim, J., Eldredge, J. D., and Zhong, X., "A Numerical Study of Compressible Turbulent Boundary Layers", *Physics of Fluids*, Vol. 23, pp. 1-12, (2011).
- [11] Launder, B. E., and Spalding, D. B., "*Lectures in Mathematical Models of Turbulence*", Academic Press, London, England, (1972).
- [12] Reynolds, W. C., "Fundamentals of Turbulence for Turbulence Modeling and Simulation", Lecture Notes for von Karman Institute Agard Report, No. 755, (1987).
- [13] Shih, T.H., Liou, W. W., Shabbir, A., Yang, Z., and Zhu. J., "A New K-epsilon Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows-model Development and Validation", *Computers Fluids*, Vol. 94, No. 21, pp. 227-238, (1995).
- [14] Choudhury, D., "Introduction to the Renormalization Group Method and Turbulence Modeling", Fluent Inc. Technical Memorandum TM-107, New Hampshire, (1993).
- [15] Menter, F. R., "Two-equation Eddy-viscosity Turbulence Models for Engineering Applications", *AIAA Journal*, Vol. 32, pp. 1598-1605, August (1994).
- [16] Wilcox, D. C., "*Turbulence Modeling for CFD*", DCW Industries, Inc., La Canada, California, (1998).
- [17] Hutchinson, B. R., and Raithby, G. D., "A Multigrid Method Based on the Additive Correction Strategy", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 9, pp. 511-537, (1986).
- [18] Weiss, J. M., Maruszewski, J. P., and Smith, W. A., "Implicit Solution of Preconditioned Navier-Stokes Equations using Algebraic Multigrid", *AIAA Journal*, Vol. 37, pp. 29-36, (1999).
- [19] Moore, D. R., and Harkness, E , J., "Experimental Investigations of the Compressible Turbulent Boundary Layer at Very High Reynolds Numbers", Ling-Temco-Vought, Inc., Dallas, Texas, Apr. *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 4, pp. 631-638, (1965).
- [20] Cebeci, T., and Bradshaw, P., "*Momentum Transfer in Boundary Layers*", Hemisphere Publishing Corporation, New York, (1977).

- [21] Langtry, R.B., "A Correlation-based Transition Model using Local Variables for Unstructured Parallelized CFD Codes", Institut Für Thermische Strömungsmaschinen Und Maschinenlaboratorium, Universität Stuttgart, (2006).
- [22] Patankar, S.V., "Calculation of Compressible Turbulent Boundary Layer on a Flat Plate", Aeronautical Research Council. Curren J Papers, Vol. 1027, (1969).

### فهرست نمادهای انگلیسی

$c_p$	: ظرفیت حرارتی در فشار ثابت
$E$	: انرژی کل $h-(p/\rho)+(U^2/2)$
$h$	: آنتالپی محسوس
$K$	: انرژی جنبشی آشفتگی متوسط گیری شده
$k$	: هدایت حرارتی
$p$	: فشار استاتیک موضعی
$Pr_t$	: عدد پرانتل آشفته
$R$	: ثابت گازی $R_u/M$
$S$	: مقدار مطلق نرخ کرنش $(2S_{ij}S_{ij})^{1/2}$
$S_{ij}$	: تانسور نرخ کرنش $0.5(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$
$T$	: دمای استاتیک موضعی
$Tu$	: شدت آشفتگی $100(2K/3)^{1/2}/U$
$U$	: سرعت موضعی
$u_i$	: سرعت موضعی در راستای $x_i$
$u'_i$	: مولفه نوسانی سرعت در راستای $x_i$
$x_i$	: I-امین مختصه دستگاه مختصات کارتزین
$y$	: فاصله از نزدیکترین دیواره
$y^+$	: فاصله در دستگاه مختصات دیواره ای $\rho y u_\tau / \mu$
$\mu$	: ویسکوزیته مولکولی
$\mu_t$	: ویسکوزیته ادی
$\mu_\tau$	: سرعت برشی
$\rho$	: چگالی
$\tau$	: تنش برشی دیواره ای
$\tau_{ij}$	: تانسور Deviatoric
$\varepsilon$	: نرخ اضمحلال آشفتگی
$\omega$	: فرکانس آشفتگی

**Abstract**

In the following paper, the accuracy of K- $\epsilon$  and K- $\omega$  turbulence models in super-sonic boundary layer capturing of smooth/rough flat plates have been investigated. Among these investigations, some sorts of sensitivity analysis, including change in turbulence model, grid density, near wall  $y^+$ ,  $c_\mu$  magnitude ( for boundary layers generated on smooth flat plates ), and change in  $C_{Ks}$ , and also  $K_s^+$  ( for boundary layers generated on rough flat plates ) have been done. Also the effects of compressibility on the Re-laminarization of the turbulent boundary layer and finally the accuracy of these turbulence models in capturing of  $Cf/Cf_0$  for Mach number range lower than 5 have been numerically investigated.