

تعیین موقعیت ماهواره با استفاده از داده GPS و فیلتر کالمن مکعبی

به دلیل غیرخطی بودن معادلات حاکم بر سیستم تخمین ماهواره، فیلترهای خطی قادر به تخمین موقعیت دقیق نیستند. در این مقاله معادلات حرکت ماهواره بررسی می‌گردد و سپس با استفاده از مشاهدات GPS، از فیلترهای غیرخطی کالمن توسعه یافته و کالمن مکعبی^۴ به منظور تعیین مدار ماهواره استفاده می‌شود. فیلتر کالمن مکعبی الگوریتمی مناسب جهت تخمین سیستم‌های غیرخطی نویزی با ابعاد تخمین بالا می‌باشد که براساس فیلتر گوسی و کالمن عمل می‌کند. نتایج شبیه‌سازی و خطای RMS موقعیت نشان می‌دهد فیلتر کالمن مکعبی در مقایسه با فیلتر کالمن توسعه یافته عملکرد بهتری (تا حدود ۵۰ درصد) در تعیین سرعت در راستای λ و z ماهواره دارد. درصد بهبود خطا نسبی در بخش موقعیت برای هر دو فیلتر تقریباً مشابه هم است هرچند در این بخش هم عملکرد فیلتر کالمن مکعبی بهتر بوده است. درصد بهبود نسبی خطای تعیین موقعیت فیلتر کالمن مکعبی در راستای x برابر ۱۰ درصد بوده است. این درصد بهبود نسبی در راستاهای λ و z به ترتیب برابر ۳ و ۵ درصد بوده است.

محمدحسن سیامک^۱

دانشجوی کارشناسی ارشد

موسی آیتی^۲

دانشیار

داود رضایی^۳

کارشناسی

واژه‌های راهنما: موقعیت ماهواره؛ سیستم غیرخطی؛ فیلتر کالمن توسعه یافته؛ فیلتر کالمن مکعبی؛ داده GPS.

۱- مقدمه

توسعه روز افزون مأموریت‌های فضایی و ضرورت تأمین ایمنی و اعتمادپذیری سفرهای فضایی ایجاب می‌کند ماهواره با دقت بالایی در موقعیت مناسب خود قرار داشته باشد. استفاده از گیرنده‌های GPS فضاپرد در مدار زمینی پایین برای فراهم کردن تقویم نجومی با زمان واقعی برای پردازش آن-برد، جهت‌یابی خودکار، تعیین و کنترل وضعیت و مسافت‌یابی نسبی دقیق بین فضاپیماها کاملاً رایج بوده است [۱]. علاوه بر این، گیرنده‌های GPS فضاپرد با پردازش زمینی همچون سیستم مسیریابی اولیه توسط ایستگاه زمینی نیز، دقت تعیین مدار را افزایش می‌دهد [۲].

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

^۲ نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران m.ayati@ut.ac.ir

^۳ کارشناسی، عضو هیات علمی، پژوهشکده سامانه‌های ماهواره، پژوهشگاه فضایی ایران

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۸/۲۷، تاریخ پذیرش: ۹۹/۰۸/۰۳

به طور خاص، تعیین مدار زمان واقعی^۱ با استفاده از موقعیت یابی و جهت یابی توسط GPS برای پردازش آن-برد، قدمی اساسی برای تعیین و کنترل وضعیت در ماهواره‌ها است. روش‌های موقعیت‌یابی با حضور GPS در حلقه تخمین، می‌تواند با در نظر گرفتن حداقل مربعات متناسب با مشاهدات نرخ شبه فاصله‌ها^۲ که شامل خطاهای متفاوتی از قبیل بی‌دقتی مدار ماهواره GPS، تاثیرات نسبیتی، خطای گیرنده و بایاس ساعت گیرنده است، انجام شود [۳]. با توجه به ارتفاع مداری که ۵۷۰ تا ۶۰۰ کیلومتر است، هر چند چگالی اتمسفر در ارتفاع مداری ماهواره بسیار رقیق است، ولی تاثیراتی را بر دینامیک انتقالی و دینامیک وضعیت ماهواره دارد که باید اثرات آن بر دینامیک انتقالی ماهواره که در این پژوهش مورد توجه است، در نظر گرفته شود. همچنین، با توجه به محیطی که ماهواره در آن در حال حرکت است، در معرض برخورد فوتون‌هایی است که از سمت خورشید گسیل شده‌اند. برخورد این فوتون‌ها موجب تغییر اندازه حرکت ماهواره می‌شود، هرچند این تغییر اندازه حرکت ناچیز است اما در طولانی مدت تاثیر گذار است. با توجه به شکل هندسی زمین که دقیقاً یک کره ناب نیست و کمی پخی دارد، لذا فرض کره بودن زمین به هم می‌خورد. از طرفی چگالی زمین در همه‌جای آن همگن توزیع نشده است. این دو عامل باعث شده است تا شتاب‌های اغتشاشی ناشی از این دو عامل به ماهواره وارد شود. در این پژوهش از مدل JGM-3 برای اعمال تاثیر اغتشاش جاذبه استفاده شده است که با توجه به بار محاسباتی مدل مناسبی است [۴]. به دلیل اینکه مدل انحراف حرکتی و مدل مشاهده برای حداقل مربعات در راه‌حل‌های جهت‌یابی استفاده نمی‌شوند، دقت راه‌حل‌های جهت‌یابی مستقیماً تحت تاثیر خطاها و ناهنجاری‌های موقتی مشاهدات قرار می‌گیرند. به طور خاص، در روش‌های موقعیت‌یابی و جهت‌یابی توسط GPS، مشاهده می‌شود که دوره‌هایی وجود دارند که هیچ اطلاعاتی برای گیرنده‌ها موجود نبوده و همچنین نوسانات غیرمنتظره که به دلیل ناهنجاری‌های کشف سیگنال در گیرنده GPS اتفاق می‌افتند دور از تصور نیست. به عبارت دیگر، راه‌حل‌های خطی و خطی‌سازی شده موجود در موقعیت‌یابی توسط گیرنده‌های GPS، نوسانات را نیز تجربه می‌کنند که از دامنه‌ی خطای قابل قبول برای عملکرد فضایی تجاوز می‌نماید. این نوسانات نیز دقت کنترل وضعیت و همزمانی آن-برد را کاهش می‌دهند [۵]. برنامه‌های متفاوتی برای تعیین مدار با زمان واقعی برای ارتقای دقت و ثبات راه‌حل‌های جهت‌یابی آن-برد پیشنهاد شده‌اند [۶]، [۷]. الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته یکی از روش‌های مطرح و مفید برای تخمین متغیرهای حالت سیستم‌های غیرخطی و حذف اثرات نویز از پاسخ سیستم می‌باشد. برای به کار بردن این الگوریتم، به منظور تخمین مقدار واقعی متغیرهای حالت سیستم در حالیکه تاثیر نویز کاهش می‌یابد، سیستم غیرخطی متناسب با گام‌های زمانی خطی‌سازی می‌شود و همچنین مشاهدات گذشته در یک فرمول بازگشتی استفاده می‌شوند. این الگوریتم برای تخمین پارامترهای نامشخص سیستم نیز استفاده می‌شود که برای این حالت، یک بردار متغیرهای حالت توسعه یافته شامل متغیرهای حالت و پارامترهای نامشخص سیستم باید تعریف شود و مراحل تخمین متغیرها و پارامترها طبق الگوریتم اصلی انجام می‌شود. سیروسیک و همکاران یک الگوریتم فیلتر کالمن فرکشنال^۳ برای تخمین متغیرهای حالت و پارامترهای نامشخص سیستم طراحی کردند [۸].

¹ Real time

² Pseudo range

³ Fractional Kalman filter algorithm

آیتی و خالوزاده از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته برای تخمین همزمان متغیرهای حالت و پارامترهای نامشخص سیستم‌های آشوبی غیرخطی استفاده کردند [۹]. وطن خواه و همکاران الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته را برای تخمین متغیرهای حالت یک میکروتیر غیر کلاسیک به کار گرفته‌اند [۱۰]. گارسیا و همکاران با استفاده از فیلتر کالمن مکعبی^۱ و کالمن توسعه یافته وضعیت ماهواره را تخمین زده اند که در شرایط مختلف کارایی هر فیلتر متفاوت است [۱۹]. آشوک کومار و همکاران با استفاده از فیلتر کالمن توسعه یافته موقعیت گیرنده جی پی اس را تخمین زده اند و نشان دادند که دقت این روش مناسب است [۲۰].

در این پژوهش برای نخستین بار الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی به منظور تعیین مدار ماهواره با استفاده از GPS بکار گرفته می‌شود و عملکرد آن با فیلتر کالمن توسعه یافته مورد مقایسه قرار می‌گیرد. فیلتر کالمن مکعبی یک الگوریتم مناسب برای تخمین سیستم‌های غیرخطی با ابعاد تخمین بالا می‌باشد که براساس فیلتر گوسی و کالمن عمل می‌کند [۱۱]. این فیلتر از یک تبدیل حجمی برای تقریب گوسی وزندار استفاده نموده و عملکرد مناسب‌تری در ابعاد بالا نسبت به EKF و UKF دارد [۱۲]. در قیاس با فیلتر کالمن معمولی فیلتر کالمن مکعبی نیاز به محاسبه ماتریس ژاکوبین توابع حالت غیرخطی و توابع اندازه‌گیری ندارد و همچنین حین گسترش ماتریس کواریانس مستلزم خطی‌سازی سیستم غیرخطی نبوده که به همین سبب در کاربردهای وسیعی مورد توجه قرار گرفته است [۱۳]. با توجه به فیلترهای به کار رفته در این پژوهش، مدل دینامیکی سیستم شامل اغتشاشات درگ و فشار خورشیدی و اغتشاشات جاذبه با مدل JGM-3 شبیه سازی شده است. تمامی شبیه‌سازی‌ها بر اساس داده‌های واقعی که توسط پژوهشگاه فضایی ایران در اختیار پژوهش قرار گرفته‌اند، انجام شده است.

۲- مدل سازی حرکت ماهواره

در حالت کلی معادله واحد جرم حرکت یک جسم در یک مدار دلخواه توسط معادله (۱) ارائه می‌شود.

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = \gamma_k + \gamma_p \quad (1)$$

که در این معادله γ_p شتاب ناشی از نیروهای اغتشاشی از قبیل نیروهای اغتشاش جاذبه، آیرودینامیکی، اثر جسم سوم، است. شتاب‌های ناشی از نیروهای اغتشاشی تابع غیرخطی از زمان هستند. γ_k شتاب ناشی از نیروهای گرانش است و مقدار آن برابر است با:

$$\gamma_k = -Gm_1 \vec{r}_{12} / r_{12}^3 \quad (2)$$

در فرمول شماره (۲)، G ثابت گرانش زمین است، m_1 جرم زمین است. \vec{r}_{12} بردار مرکز زمین تا ماهواره است.

۲-۱- اغتشاشات جاذبه

کره زمین به صورت یک کره کامل نیست و شعاع آن در همه نقاط یکسان نیست. همچنین، جرم زمین به صورت یکنواخت پخش نشده است و چگالی آن در تمام نقاط یکسان نیست.

¹ Cubature Kalman filter

در واقعیت شعاع کره زمین در استوا حدود ۲۱ کیلومتر از شعاع در مناطق قطبی بیشتر است. همین مسئله باعث به وجود آمدن نیرویی اغتشاشی شده که بر حرکت ماهواره تاثیر می‌گذارد و باید در محاسبات وارد شود.

۲-۲- مدل کامل گرانش زمین

برای تعیین دقیق مدار ماهواره نیاز به استفاده از یک مدل دقیق‌تر و به تبع آن پیچیده‌تر از گرانش زمین است تا با آن بتوان این کار را انجام داد. مدل‌های گرانش زیادی از زمانی که اولین ماهواره‌ها پرتاب شدند استفاده شده و بسط داده شده است که معمولاً ساختار آنها شامل بسط هارمونیک کروی، چندجمله‌ای‌های لژاندر و ضرایب ثابتی که وزن هر جمله هارمونیک رو مشخص می‌کند، است. این مدل به غیر از هارمونیک‌های زونال شامل هارمونیک‌های سکترال و تسرال نیز می‌شود.

مدل JGM-3 مدلی است که خیلی زیاد از آن استفاده می‌شود. این مدل در سال (۱۹۹۴) توسط NASA/GSFC ارائه شد. تعریف پتانسیل گرانش زمین و شتابی که ماهواره تحت تاثیر آن تجربه می‌کند از اصول هر مدل گرانشی است.

$$V = G \int \frac{\rho(s)}{|\vec{r} - \vec{s}|} d^3s \quad (۳)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \nabla V \quad (۴)$$

$\rho(s)$ چگالی نقطه S داخل زمین است و $|\vec{r} - \vec{s}|$ برابر فاصله نقطه S با ماهواره است. \vec{r} بردار موقعیت ماهواره نسبت به مرکز زمین، \vec{s} بردار موقعیت نقطه S واقع در داخل زمین نسبت به مرکز زمین می‌باشد. در این بخش مختصات‌های مکانی در دستگاه^۱ ECEF بیان شده‌اند. با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر معکوس فاصله به صورت زیر است:

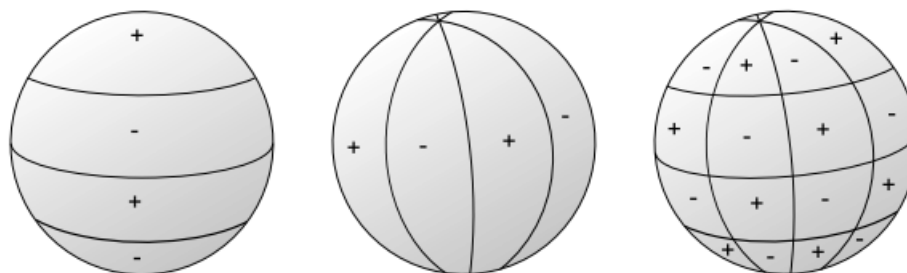
$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^n P_n \cos \gamma \quad (۵)$$

که

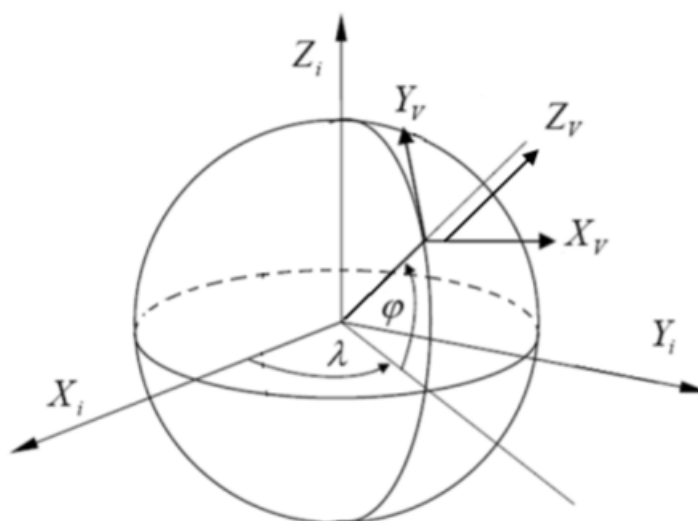
$$\cos \gamma = \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{rs} \quad (۶)$$

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n \quad (۷)$$

^۱ سیستم مختصات ECEF سیستمی کارتزین است که به همراه زمین در حال دوران حول محور دوران زمین است. مبدأ این سیستم منطبق بر مرکز جرم قراردادی زمین، محور X آن منطبق بر محل برخورد دو صفحه استوا و نصف‌النهار مبدأ (نصف‌النهار گرینویچ)، محور Z آن در راستای محور دورانی زمین گذرنده از قطب قراردادی زمین و محور Y آن نیز به صورت راست‌گرد تعریف می‌شود.



شکل ۱- نمایشی شماتیک از هارمونیک های زونال (چپ) سکترال (مرکز) تسرال (راست)



شکل ۲- نمایشی شماتیک از طول و عرض جغرافیایی یک جسم

در اینجا طول و عرض جغرافیایی ماهواره را تعریف می کنیم

$$\lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{۸}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{y^2 + x^2}}\right) \tag{۹}$$

همچنین، λ' و ϕ' هم برای S به همین روش تعریف می شوند. با استفاده از تئوری چند جمله ای های لژاندر داریم:

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m}) \frac{(n - m)!}{(n + m)!} P_{nm}(\sin \phi') \cos(m(\lambda - \lambda')) \tag{۱۰}$$

که δ_{0m} تابع دلتای کرونگر است (در اینجا وقتی $m=0$ برابر یک و در بقیه حالات برابر صفر است) و P_{nm} چند جمله ای لژاندر درجه n و مرتبه m است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_{nm}(u) = (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u) \tag{۱۱}$$

و سپس با جایگذاری در معادله (۳) رابطه زیر را بدست می‌آید:

$$V = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R_e^n}{r^{n+1}} P_{nm}(\sin \phi) (C_{n,m} \cos(m\lambda) + S_{n,m} \sin(m)) \quad (12)$$

که در آن $C_{n,m}$ و $S_{n,m}$ ضرایب فیزیکی ثابتی هستند که مدل توزیع جرم زمین را نشان می‌دهند. این ثابت‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$C_{n,m} = \frac{(2 - \delta_{0m})(n-m)!}{M_e (n+m)!} \int \frac{s^n}{R_e^n} P_{nm}(\sin \phi') \cos(m\lambda') \rho(s) d^3s \quad (13)$$

$$S_{n,m} = \frac{(2 - \delta_{0m})(n-m)!}{M_e (n+m)!} \int \frac{s^n}{R_e^n} P_{nm}(\sin \phi') \sin(m\lambda') \rho(s) d^3s \quad (14)$$

۲-۳- درگ آیرودینامیکی

اگرچه معادله شتاب پایه برای درگ آیرودینامیکی بسیار ساده است مدل‌سازی پارامتری تعیین شده آن اینگونه نیست و پیچیده‌تر می‌باشد. در حقیقت در مقایسه با اختلالات دیگر، درگ آیرودینامیکی عدم قطعیت بیشتری در ماهواره‌های LEO دارد. فرمولی ساده برای شتاب به صورت زیر است:

$$\ddot{r}_{drag} = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{bc} |V_{aero}| V_{aero} = \alpha_{drag} |V_{aero}| V_{aero} \quad (15)$$

که در رابطه (۱۵) چگالی اتمسفر است و

$$bc: \text{ضریب بالستیک} = \frac{m}{C_d A} = \frac{\text{جرم ماهواره}}{\text{مساحت مقطع رو به } V_{aero} * \text{ضریب درگ}}$$

$$V_{aero} = \text{بردار سرعت ماهواره نسبت به اتمسفر در مکان خاص} \quad (16)$$

$$\alpha_{drag} = \text{فاکتور استفاده شده برای راحتی} = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{bc}$$

۲-۴- غلظت اتمسفر

تراکم اتمسفر عمدتاً به دلیل ارتفاع و درجه حرارت متفاوت است درجه حرارت بالا بستگی به موقعیت ماهواره و فعالیت خورشیدی دارد. این سیستم بسیار دشوار است که اثراتی که این پارامترها بر چگالی دارند را بتواند دقیق مدل کند. از سطح دریا تا حدود ۱۰ کیلومتر از سطح زمین، دمای اتمسفر به تدریج کاهش می‌یابد. در حالی که در فاصله بین ۱۰ کیلومتر تا ۴۵ کیلومتر، دما افزایش می‌یابد. در ارتفاع حدود ۹۵ کیلومتری، دوباره کاهش می‌دهد، و تا حدود ۴۰۰ کیلومتر افزایش می‌یابد، بعد از آن ثابت باقی می‌ماند. واضح است که این نوع رفتار، مدل‌سازی جو را پیچیده می‌کند. دمای اتمسفر در ارتفاع بالا نیز به علت فعالیت خورشیدی متفاوت است. به همین دلیل است که مدل‌های چگالی به اندازه‌گیری شار طول موج کوتاه و فعالیت خورشیدی بستگی دارند [۱۴]. در این پژوهش از مدل Jacchia استفاده خواهد شد [۴]، اما از مدل نمایی SMAD برای بدست آوردن حداکثر و حداقل چگالی استفاده می‌کنیم [۱۸].

۲-۵- سرعت آیرودینامیکی

فرض می‌شود که اتمسفر به همان میزان زمین می‌چرخد. والادو [۷] بیان می‌کند که این چرخش ممکن است برای محدوده‌ی نزدیک زمین (به علت اصطکاک) باشد اما قسمت‌های بالایی ممکن است کمی کندتر چرخش کنند. V_{aero} (در 'ECI) با استفاده از اتمسفر چرخان زمین ثابت داریم:

$$V_{aero} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{aero} \\ \dot{y}_{aero} \\ \dot{z}_{aero} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} + \omega_e y \\ \dot{y} - \omega_e x \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (17)$$

که ω_e برابر است با سرعت زاویه‌ای چرخش زمین به دور خود بر حسب رادیان بر ثانیه می‌باشد.

۲-۶- فشار تابش خورشیدی (SRP)

چون فوتون‌هایی که از سمت خورشید می‌آیند دارای سرعت هستند و جرم دارند، در نتیجه دارای مومنتوم هستند بدین معنی که هنگامی که آنها به ماهواره برخورد می‌کنند، و در جهت‌های دیگر منحرف می‌شوند، یک ضربه ایجاد می‌شود یک نیروی در جهت مخالف خورشید اعمال می‌شود و بدین ترتیب ماهواره از خورشید دور خواهد شد. فوتون‌ها دارای یک جرم بسیار کوچک هستند و پس از آن این نیرو به صورت لحظه‌ای و تنها برای ماهواره‌ها در ارتفاع‌های بالا یا با سطح قابل توجهی نسبت به جرم بسیار مهم است. در این بخش فقط تأثیر نور مستقیم خورشید مورد توجه است. یک مدل فشار جامع تشعشع نیز برای تابش آلبدو و اشعه مادون قرمز در نظر گرفته خواهد شد. آلبدو تابش خورشید است که از سطح زمین منعکس شده است و حدود ۳۰ درصد از تابش خورشید به طور مستقیم است. زمین فوتون مادون قرمز (معادل حدود ۱۷ درصد از تابش مستقیم خورشید) را حتی در شب از خود گسیل می‌کند. همانطور که این اثرات برای مدل‌سازی دشوار است و احتمالاً اثرات نامطلوب دارند، آنها مورد بحث قرار نخواهند گرفت. در این پژوهش دو فرض در نظر گرفته می‌شود: (۱) تابع سایه زمین عمدتاً استوانه‌ای است و (۲) فشار خورشیدی می‌تواند ثابت باشد. ماهواره‌هایی که از بادبان‌های خورشیدی استفاده می‌کنند و یا در مدارهای بالاتر از LEO، نیاز به یک مدل بسیار پیچیده SRP دارند.

۳- تخمین متغیرهای حالت سیستم

تخمین متغیرهای حالت و پارامترهای نامشخص سیستم یک چالش اساسی در زمینه ماهواره‌ها می‌باشد که ممکن است در اثر حضور نویزها و پارامترهای نامعین تحریف شوند. همانطور که در قسمت مقدمه ذکر شد، الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته یک الگوریتم مناسب و قابل اجرا برای سیستم‌های غیرخطی به منظور تخمین متغیرهای حالت و پارامترهای نامشخص سیستم است. در این پژوهش الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر کالمن مکعبی برای تخمین متغیرهای حالت معادله حاکم بر ماهواره به کار گرفته شده است.

¹ Earth-centered inertial

۳-۱- الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته

الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته یکی از روش‌های مطرح و مفید برای تخمین متغیرهای حالت سیستم‌های غیرخطی می‌باشد. برای به کار بردن این الگوریتم، به منظور تخمین مقدار واقعی متغیرهای حالت سیستم در حالیکه تاثیر نویز کاهش می‌یابد، سیستم غیرخطی متناسب با گام‌های زمانی خطی‌سازی می‌شود و همچنین، مشاهدات گذشته در یک فرمول بازگشتی استفاده می‌شوند. بردار حالت \mathbf{X} را به صورت بردارهای موقعیت و سرعت در مختصات کارتیزین در ECI تعریف می‌شود.

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T \quad (18)$$

مدل پیوسته غیرخطی و اندازه‌گیری مطابق فرم کلی زیر است:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t), t) + G(t)w(t) \quad (19)$$

$$y(t) = h(\mathbf{x}(t), t) + v(t) \quad (20)$$

$w(t)$ نویز فرآیند^۱ مربوط به کیفیت تخمین مدل و $v(t)$ نویز اندازه‌گیری^۲ مربوط به کیفیت سیستم اندازه‌گیری می‌باشند. برای اولین مرحله، معادله حاکم بر ماهواره باید به فرم گسسته تبدیل شود. بنابراین، معادله گسسته حاکم بر دینامیک ماهواره طبق زمان نمونه برداری^۳ T_s بیان می‌شود معادلات زیر مراحل پیش‌بینی و اصلاح بردار متغیر حالت $\hat{\mathbf{x}}$ و ماتریس کوواریانس خطای حالت P را بیان می‌کنند.

$$F(\hat{\mathbf{x}}, t) \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}}, \quad H(\hat{\mathbf{x}}, t) \equiv \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} \quad (21)$$

$$\Phi_k \approx I + FT_s \quad (22)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \Gamma_k u_k + Y_k w_k \quad (23)$$

$$y_k = h_k(\mathbf{x}_k) + v_k \quad (24)$$

که در فرمول شماره (۲۴) و (۲۵) w_k و v_k نویز فرآیند گوسی با میانگین صفر و واریانس آن با معادلات امید ریاضی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E\{w_k w_j^T\} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ Q_k, & k = j \end{cases} \quad (25)$$

$$E\{v_k v_j^T\} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ R_k, & k = j \end{cases} \quad (26)$$

$$E\{v_k w_k^T\} = 0 \quad (27)$$

ماتریس Q_k برای نویز فرآیند حالت و R_k نویز اندازه‌گیری مورد انتظار است. حالت فعلی با تخمین مدل واقعی معادله (۲۳) پیش‌بینی می‌شود:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \Gamma_k u_k \quad (28)$$

¹ Process noise

² Measurement noise

³ Sample time

حالت جاری با اندازه‌گیری y_k به روزرسانی می‌شود:

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k [y_k - H_k \hat{x}_k^-] \quad (29)$$

بهره K_k با وزن دهی مناسب برحسب میزان اعتماد به دقت حالت تخمین زده شده در مقابل حالت اندازه‌گیری شده، با زمان تغییر خواهد کرد. برای یافتن K_k نخست می‌بایست حالت خطا و ماتریس‌های کواریانس خطا را تعریف کرد:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k^- &= \hat{x}_k^- - x_k & \tilde{x}_{k+1}^- &= \hat{x}_{k+1}^- - x_{k+1} \\ \tilde{x}_k^+ &= \hat{x}_k^+ - x_k & \tilde{x}_{k+1}^+ &= \hat{x}_{k+1}^+ - x_{k+1} \end{aligned} \quad (30)$$

$$P_k^- \equiv E\{\tilde{x}_k^- \tilde{x}_k^{-T}\}, \quad P_{k+1}^- \equiv E\{\tilde{x}_{k+1}^- \tilde{x}_{k+1}^{-T}\} \quad (31)$$

$$P_k^+ \equiv E\{\tilde{x}_k^+ \tilde{x}_k^{+T}\}, \quad P_{k+1}^+ \equiv E\{\tilde{x}_{k+1}^+ \tilde{x}_{k+1}^{+T}\} \quad (32)$$

با جایگزینی (۲۳) و (۲۸) در (۳۰) و (۳۱) نتیجه می‌دهد:

$$P_{k+1}^- = \Phi_k P_k^+ \Phi_k^T + Y_k Q_k Y_k^T \quad (33)$$

از آنجا که w_k و \tilde{x}_k^+ ترم‌های ناهمبسته‌اند، $E\{w_k \tilde{x}_k^{+T}\} = E\{\tilde{x}_k^+ w_k^T\} = 0$. برای یافتن ماتریس خطای کواریانس به روزشده، معادله (۲۴) در (۲۸) جایگزین می‌شود. سپس معادله نتیجه شده را در (۲۹) جایگزین و با ساده سازی می‌دهد:

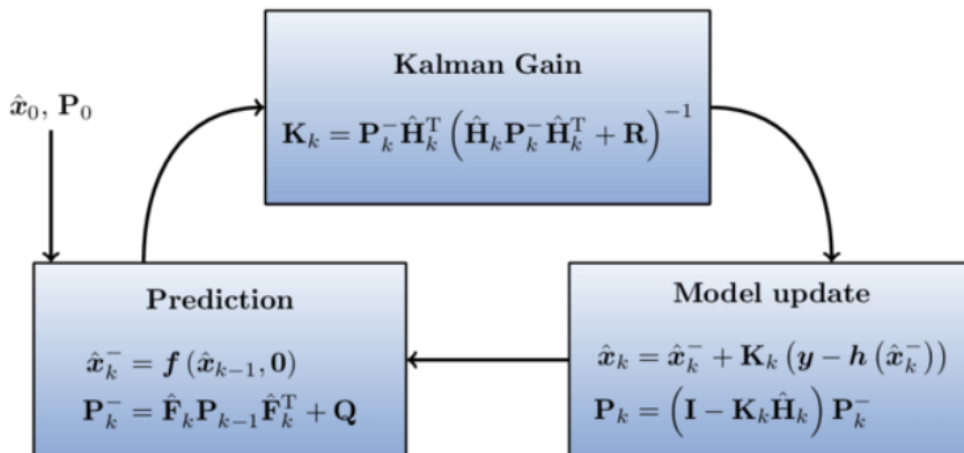
$$P_k^+ = [I - K_k H_k (\hat{x}_k^-)] P_k^- \quad (34)$$

به منظور محاسبه بهره K اثر ماتریس کواریانس خطای به روز شده باید کمینه شود.

$$K_k = P_k^- H_k^T (\hat{x}_k^-) [H_k (\hat{x}_k^-) P_k^- H_k^T (\hat{x}_k^-) + R_k]^{-1} \quad (35)$$

فیلتر کالمن توسعه یافته گسسته در جدول (۱) خلاصه شده است.

به طور خلاصه نمودار جعبه ای فیلتر کالمن توسعه یافته در شکل (۳) آورده شده است.



شکل ۳- نمودار جعبه ای فیلتر کالمن توسعه یافته

جدول ۱- خلاصه روابط فیلتر کالمن توسعه یافته گسسته

فیلتر کالمن گسسته توسعه یافته	
$x_{k+1} = \Phi_k x_k + \Gamma_k u_k + Y_k w_k$ $y_k = H_k(x_k) + v_k$	مدل
$\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ $P_0 = E\{\tilde{x}(t_0)\tilde{x}^T(t_0)\}$	مقداردهی اولیه
$K_k = P_k^- H_k^T(\hat{x}_k^-) [H_k(\hat{x}_k^-) P_k^- H_k^T(\hat{x}_k^-) + R_k]^{-1}$	بهره
$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K[y_k - h(\hat{x}_k^-)]$ $P_k^+ = [I - K_k H_k(\hat{x}_k^-)] P_k^-$	به روزرسانی
$\hat{x}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{x}_k^+ + \Gamma_k u_k$ $P_{k+1}^- = \Phi_k P_k^+ \Phi_k^T + Y_k Q_k Y_k^T$	پیش‌بینی

با توجه به عدم حضور سیگنال کنترلی و فیزیک مسئله، فرم سیستم غیرخطی گسسته در این پژوهش را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k) + w_k \\ y_k &= h(x_k) + v_k \end{aligned} \quad (۳۶)$$

لذا در فرمول‌های (۲۸) و (۲۳) ترم‌های مربوط به سیگنال کنترلی حذف می‌شوند و با توجه به نويز در نظر گرفته شده، ماتریس Y_k ماتریسی همانی است. فیلتر کالمن توسعه یافته نیازمند محاسبه ماتریس‌های H و F است که از مشتق‌گیری جزئی بردارهای $f(x_t)$ و $h(x_t)$ بدست می‌آیند. البته برای پیاده‌سازی بر روی میکروکنترلرها نیاز به نسخه گسسته آن H_k و F_k است. طبق تئوری گسسته‌سازی ماتریس H_k معادل نسخه پیوسته آن H_t است. از آنجا که خروجی گیرنده GPS بردارهای موقعیت و سرعت است نیاز به خطی‌سازی و محاسبه مشتقات جزئی مشاهده نیست.

$$H_k = H_t = \frac{\partial h(x_t)}{\partial x_t} = I \quad (۳۷)$$

گسسته ماتریس F_k از طریق بسط تیلور به صورت زیر بدست می‌آید:

$$F_k = I + F_t T_s \quad (۳۸)$$

T_s برابر زمان نمونه‌برداری است. F_t از معادله زیر بدست می‌آید.

$$F_t = \frac{\partial f(x_t)}{\partial x_t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial \ddot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial z} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial \ddot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial z} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial \ddot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial z} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{z}} \end{bmatrix} \quad (39)$$

از آنجا که دینامیک سیستم به صورت ترم های شتاب مدل شده است. مدل گرانث شامل (مدل دو جسم با اصلاحات J_2 تا J_4) مدل نیروی پایا است، بنابراین تنها قسمت های $\frac{\partial \ddot{r}}{\partial r}$ ماتریس F را شامل می شود. اما فشار تشعشعات خورشید و درگ جو در عبارت $\frac{\partial \ddot{r}}{\partial r}$ و $\frac{\partial \dot{r}}{\partial r}$ تاثیر می گذارد. همچنین، ماتریس های کوواریانس مربوط به نویز فرآیند و نویز اندازه گیری با توجه به مرجع [۱۵] در نظر گرفته می شوند.

۳-۲- فیلتر کالمن مکعبی

فیلتر کالمن مکعبی یک الگوریتم مناسب برای تخمین سیستم های غیرخطی با ابعاد تخمین بالا می باشد که براساس فیلتر گوسی و کالمن عمل می کند [۱۱]. این فیلتر از یک تبدیل حجمی برای تقریب گوسی وزن دار استفاده می کند [۱۲]. فیلتر کالمن مکعبی نیاز به محاسبه ماتریس ژاکوبین توابع حالت غیرخطی و توابع اندازه گیری ندارد و همچنین حین گسترش ماتریس کواریانس مستلزم خطی سازی سیستم غیرخطی نبوده که به همین سبب در کاربردهای وسیعی مورد توجه قرار گرفته است [۱۳]، [۱۶]. به همین دلیل در این قسمت فیلتر کالمن مکعبی استفاده می گردد. این فیلتر به منظور فیلتر کردن سیستم هایی با دینامیک غیرخطی کاربرد بسیار زیاد دارد. فیلتر کالمن مکعبی این مزیت را دارد که برای تمامی سیستم ها با عوامل غیرخطی کم تا زیاد کاربرد دارد. با استفاده از قوانین کیوبچر در این قسمت نحوه عملکرد فیلتر کالمن مکعبی توضیح داده می شود. فیلتر کالمن مکعبی در واقع یک روش عددی دقیق برای مسائل با ابعاد بالا است [۱۷]. در این روش میانگین و کواریانس تمامی چگالی داده ها توسط یک روش انتگرال گیری با کارایی بسیار بالا موسوم به قاعده کیوبچر محاسبه می گردد. به طور ویژه در این روش از قواعد درجه سوم کروی-شعاعی استفاده می شود تا انتگرال هایی با فرم

$$(nonlinear\ function \times Gaussian\ density) \quad (40)$$

را به صورت عددی با استفاده از تعدادی نقطه کیوبچر محاسبه کند. نقاط کیوبچر وزن دار شده ی متقارن در حالتی که تعداد این نقاط برابر با m در نظر گرفته شود به صورت زیر هستند:

$$\int f(x)N(x, 0, I_n)dx = \sum_{i=1}^m \omega_i f(\xi_i) \quad (41)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{m}{2}} [I_n, -I_n] \quad , \omega_i = \frac{1}{m} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m = 2n$$

در این معادلات ξ ماتریس نقاط کیوبچر می باشد و ξ_i ستون i ام ماتریس ξ با وزن ω_i است. همچنین n تعداد متغیرهای فضای حالت سیستم است [۱۱].
الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی دارای دو مرحله به صورت زیر است [۱۱]:

۳-۲-۱- مرحله اول: Time Update

۱- در زمان k فرض می شود که تابع چگالی مرحله قبل به صورت

$$p(x_{k-1}|D_{k-1}) = N(x_{k-1}|k-1, P_{k-1|k-1})$$

$$P_{k-1|k-1} = S_{k-1|k-1} S_{k-1|k-1}^T \quad (42)$$

۲- محاسبه‌ی نقاط کیوبچر ($i=1,2,3,\dots,m$)

$$X_{i,k-1|k-1} = S_{k-1|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k-1|k-1} \quad (43)$$

$$m = 2n$$

۳- محاسبه‌ی نقاط کیوبچر توزیع شده

$$X_{i,k-1|k-1}^* = f(X_{i,k-1|k-1}, u_{k-1}) \quad (44)$$

۴- محاسبه‌ی فضای حالت پیش بینی:

$$\hat{x}_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{i,k-1|k-1}^* \quad (45)$$

۵- محاسبه‌ی کواریانس خطای حالت پیش بینی:

$$P_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{i,k-1|k-1}^* X_{i,k-1|k-1}^{*T} - \hat{x}_{k|k-1} \hat{x}_{k|k-1}^T + Q_{k-1} \quad (46)$$

۳-۲-۲- مرحله دوم: Measurement Update

۱- فاکتورگیری

$$P_{k|k-1} = S_{k|k-1} S_{k|k-1}^T \quad (47)$$

۲- محاسبه‌ی نقاط کیوبچر ($i=1,2,3,\dots,m$)

$$X_{i,k|k-1} = S_{k|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k|k-1} \quad (48)$$

۳- محاسبه‌ی نقاط کیوبچر توزیع شده

$$X_{i,k|k-1} = h(X_{i,k|k-1}, u_k) \quad (49)$$

۴- محاسبه‌ی فضای حالت پیش بینی:

$$\hat{z}_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{i,k|k-1} \quad (50)$$

۵- محاسبه‌ی کواریانس خطا:

$$P_{zz,k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{i,k|k-1} Z_{i,k|k-1}^T - \hat{z}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T + R_k \quad (51)$$

۶- محاسبه‌ی کواریانس متقابل خطا:

$$P_{xz,k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{i,k|k-1} Z_{i,k|k-1}^T - \hat{x}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T \quad (52)$$

۷- محاسبه‌ی بهره کالمن:

$$W_k = P_{xz,k|k-1} P_{zz,k|k-1}^{-1} \quad (53)$$

۸- محاسبه‌ی متغیرهای فضای حالت بروزرسانی شده

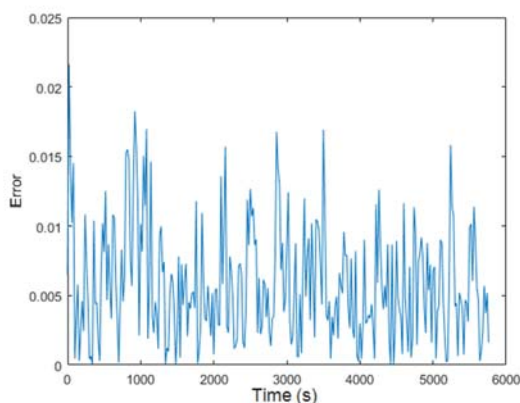
$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + W_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1}) \quad (54)$$

۹- محاسبه‌ی کواریانس خطای معادل

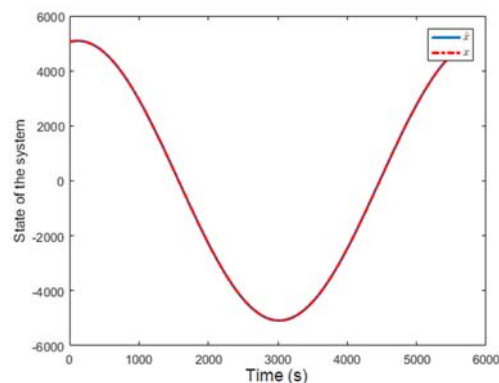
$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - W_k P_{zz,k|k-1} W_k^T \quad (55)$$

۵- نتایج شبیه‌سازی

در این قسمت نتایج شبیه‌سازی سیستم براساس داده‌هایی که با همکاری پژوهشگاه فضایی تهیه گردیده است، نشان داده شده است.



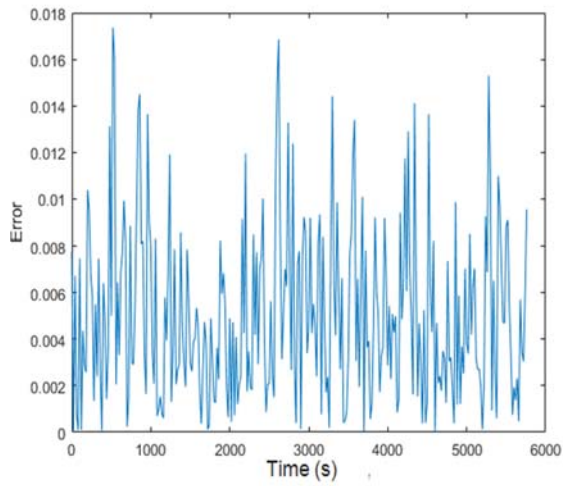
(ب)



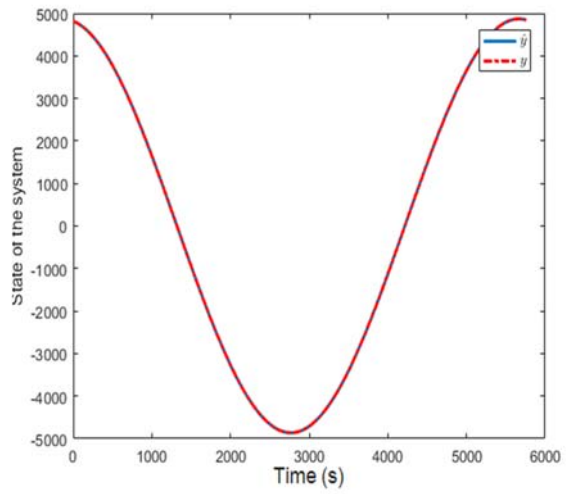
(الف)

شکل ۴- (الف) متغیر تخمین زده شده (\hat{x}) با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته

(ب) میزان خطای تخمین در حضور نویز بر حسب متر.



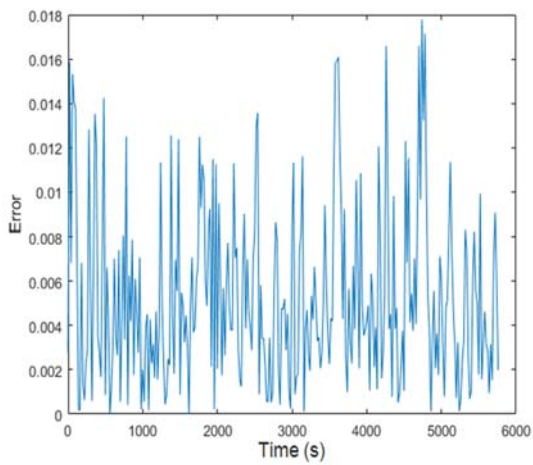
(ب)



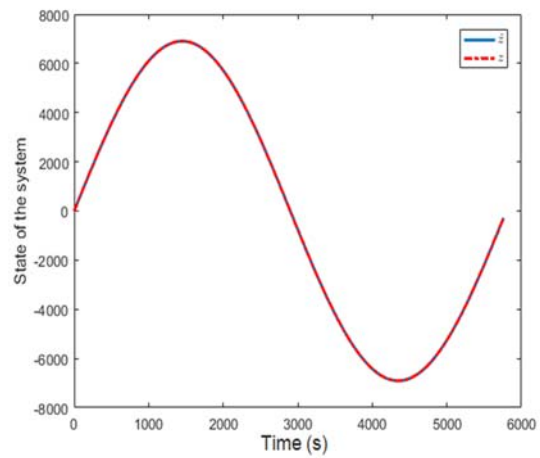
(الف)

شکل ۵- (الف) متغیر تخمین زده شده (\hat{y}) با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته

(ب) میزان خطای تخمین در حضور نویز بر حسب متر.



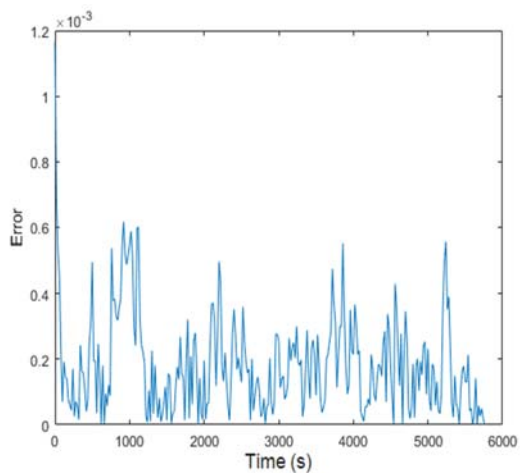
(ب)



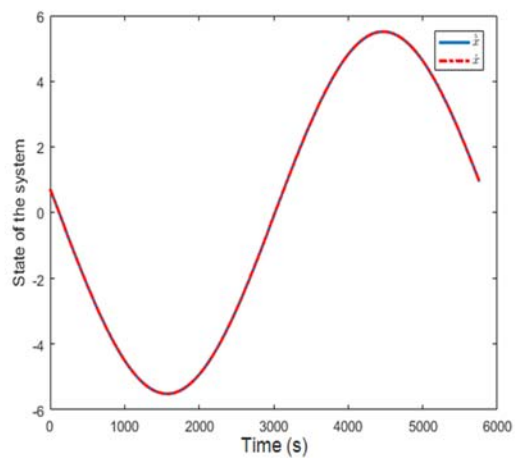
(الف)

شکل ۶- (الف) متغیر تخمین زده شده (\hat{z}) با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته

(ب) میزان خطای تخمین در حضور نویز بر حسب متر.



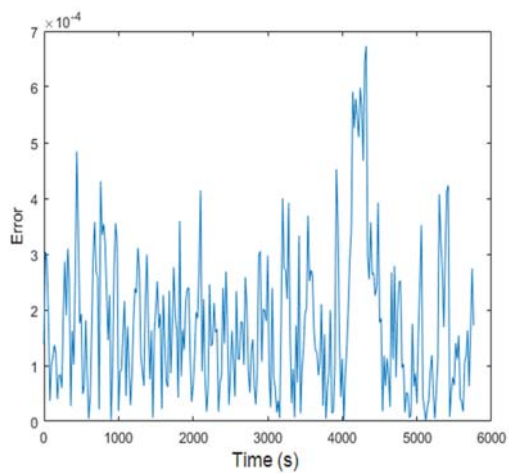
(ب)



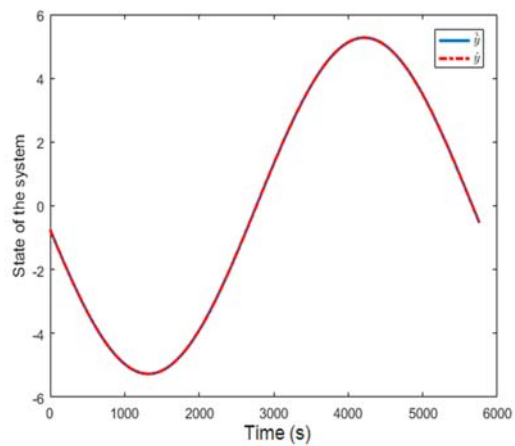
(الف)

شکل ۷- (الف) متغیر تخمین زده شده (\hat{x}) با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته

(ب) میزان خطای تخمین در حضور نویز بر حسب متر بر ثانیه.



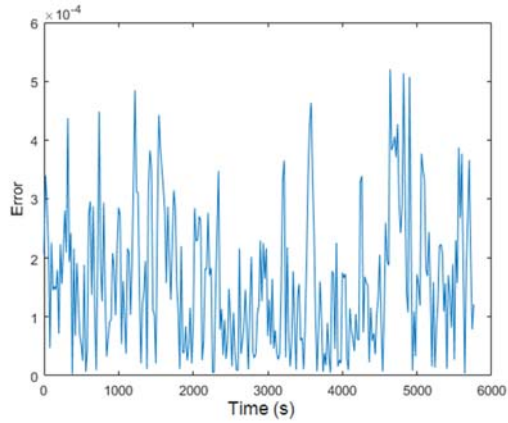
(ب)



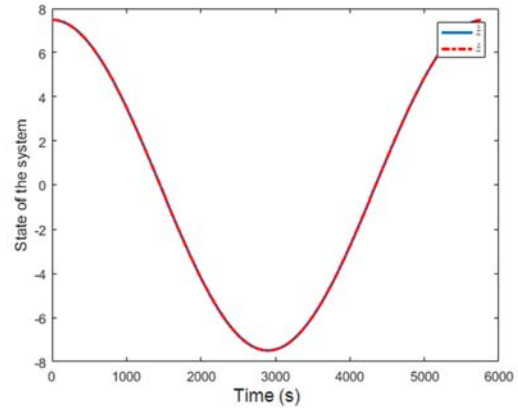
(الف)

شکل ۸- (الف) متغیر تخمین زده شده (\hat{y}) با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته

(ب) میزان خطای تخمین در حضور نویز بر حسب متر بر ثانیه.



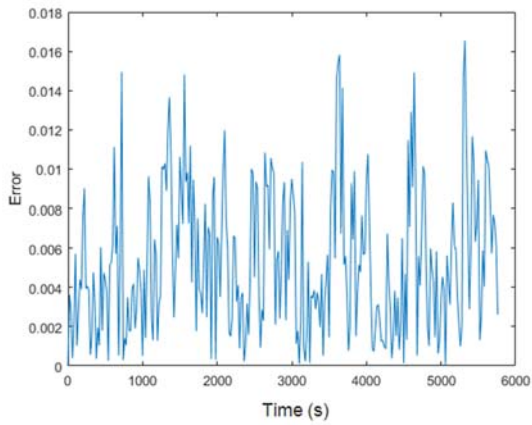
(ب)



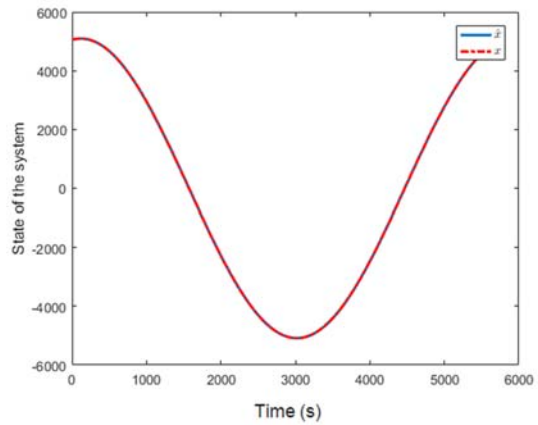
(الف)

شکل ۹- (الف) متغیر تخمین زده شده (\hat{z}) با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته

(ب) میزان خطای تخمین در حضور نویز بر حسب متر بر ثانیه.



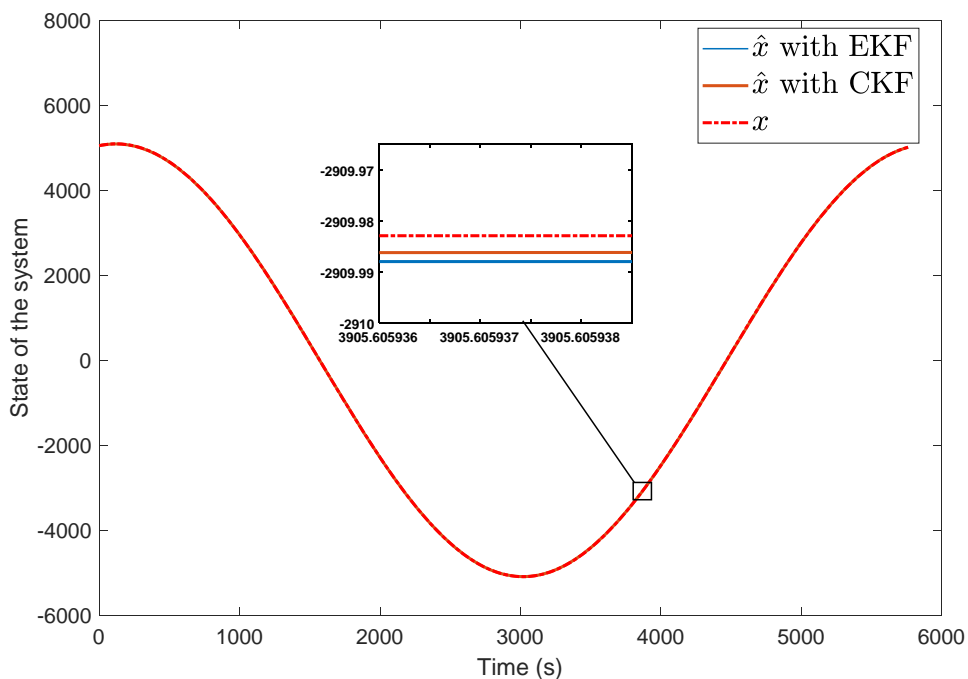
(ب)



(الف)

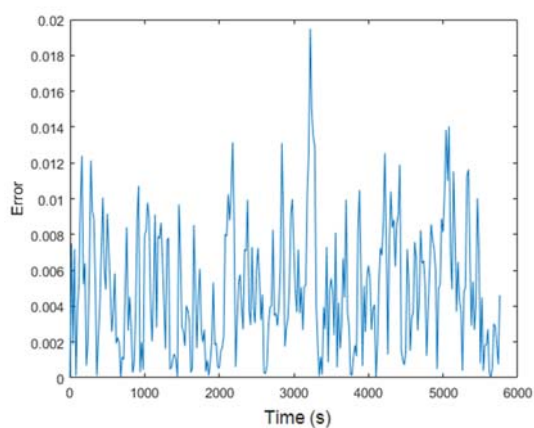
شکل ۱۰- (الف) متغیر تخمین زده شده (\hat{x}) با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی

(ب) میزان خطای تخمین در حضور نویز بر حسب متر.

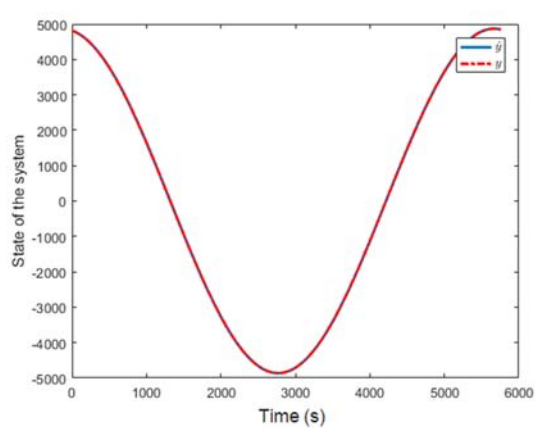


شکل ۱۱- مقایسه متغیر تخمین زده شده (\hat{x}) با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر کالمن مکعبی

شکل (۱۱) مقایسه نتایج تخمین موقعیت در راستای x را با استفاده از هر دو الگوریتم نشان می‌دهد. همان طور که از این شکل مشخص است دقت الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی بیشتر است و نتایج بهبود یافته‌اند.



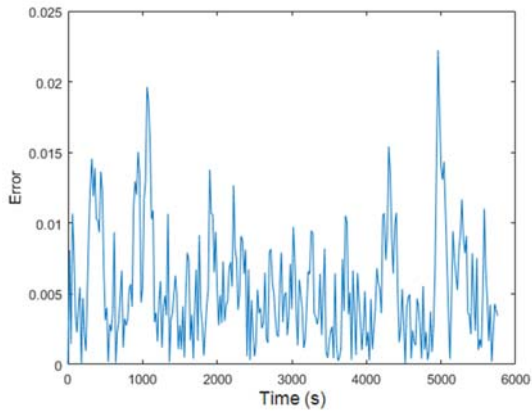
(ب)



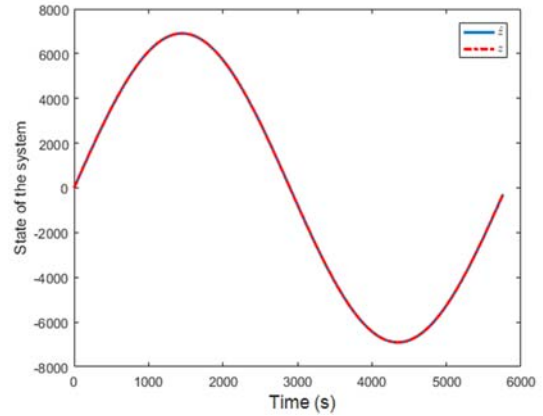
(الف)

شکل ۱۲- (الف) متغیر تخمین زده شده (\hat{y}) با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی

(ب) میزان خطای تخمین در حضور نویز بر حسب متر.



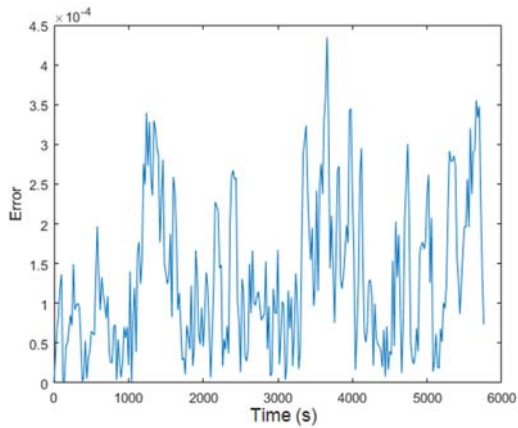
(ب)



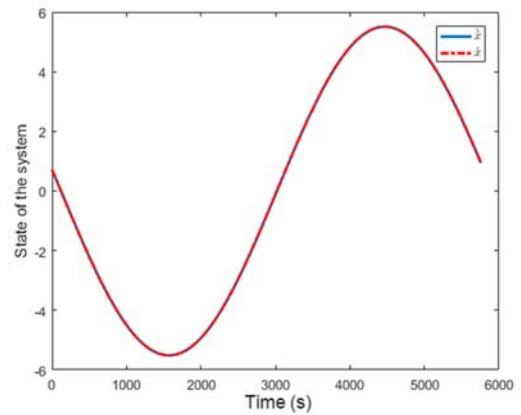
(الف)

شکل ۱۳- (الف) متغیر تخمین زده شده (\hat{z}) با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی

(ب) میزان خطای تخمین در حضور نویز بر حسب متر.



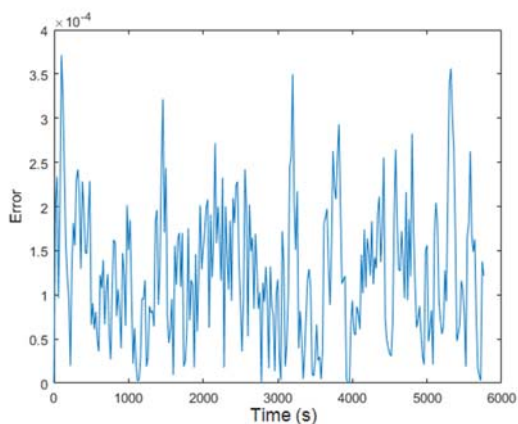
(ب)



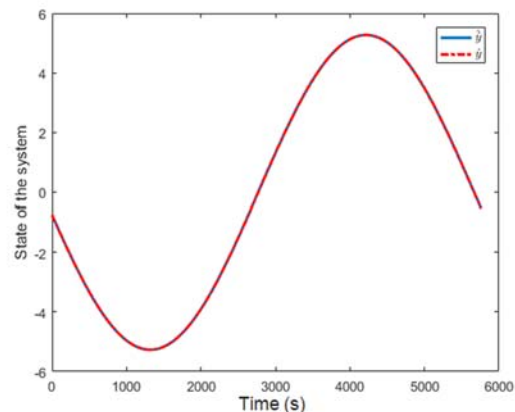
(الف)

شکل ۱۴- (الف) متغیر تخمین زده شده (\hat{x}) با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی

(ب) میزان خطای تخمین در حضور نویز بر حسب متر بر ثانیه.



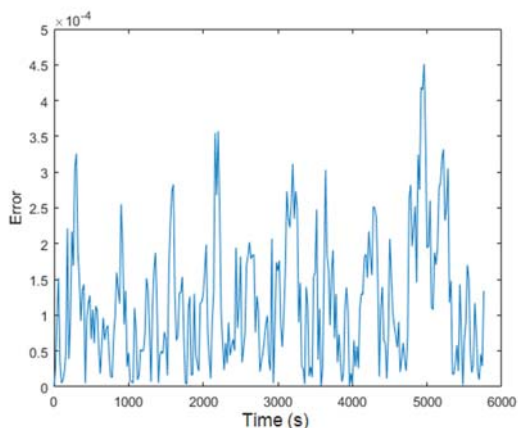
(ب)



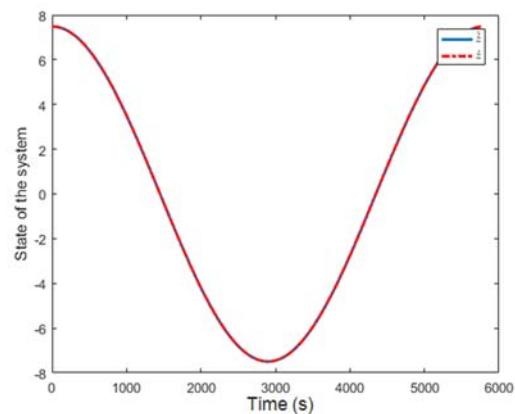
(الف)

شکل ۱۵- (الف) متغیر تخمین زده شده (\hat{y}) با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی

(ب) میزان خطای تخمین در حضور نویز بر حسب متر برثانیه.



(ب)



(الف)

شکل ۱۶- (الف) متغیر تخمین زده شده (\hat{z}) با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی

(ب) میزان خطای تخمین در حضور نویز بر حسب متر برثانیه.

همانطور که از نتایج مشاهده می‌شود، هر دو الگوریتم‌های فیلتر کالمن توسعه یافته و کالمن کیوچر برای تخمین متغیرهای حالت سیستم دینامیکی ماهواره نتایج مطلوبی را ارائه می‌دهند و تمام متغیرهای حالت سیستم به متغیرهای واقعی میل می‌کنند. طبق نتایج ارائه شده، خطای تخمین (اختلاف بین متغیرهای حالت تخمینی و واقعی) برای هر دو حالت ناچیز می‌باشد.

جدول ۲- میزان نویز خطای تخمین

RMS خطای تخمین سرعت در راستای Z (متر بر ثانیه)	RMS خطای تخمین سرعت در راستای Y (متر بر ثانیه)	RMS خطای تخمین سرعت در راستای X (متر بر ثانیه)	RMS خطای تخمین موقعیت در راستای Z (متر)	RMS خطای تخمین موقعیت در راستای Y (متر)	RMS خطای تخمین موقعیت در راستای X (متر)	
0.2	0.2	0.2	6.6	6.3	7.2	الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته
0.1	0.1	0.2	6.5	6.1	6.5	الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی

جدول ۳- مقایسه درصد خطای تخمین (نسبت خطای سیگنال به سیگنال اصلی)

درصد خطای تخمین سرعت در راستای Z	درصد خطای تخمین سرعت در راستای Y	درصد خطای تخمین سرعت در راستای X	درصد خطای تخمین موقعیت در راستای Z	درصد خطای تخمین موقعیت در راستای Y	درصد خطای تخمین موقعیت در راستای X	
5.600×10^{-3}	7.800×10^{-3}	8.200×10^{-3}	1.0154×10^{-4}	2.0635×10^{-4}	2.2154×10^{-4}	الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته
2.801×10^{-3}	3.900×10^{-3}	8.191×10^{-3}	1.0002×10^{-4}	2.0007×10^{-4}	2.0011×10^{-4}	الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی

با توجه به جدول‌های (۲) و (۳) و مقایسه الگوریتم‌های فیلتر کالمن، همانطور که انتظار می‌رود الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی برای سیستم‌های با ترم‌های غیرخطی مناسب‌تر می‌باشد. به دلیل اینکه در الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته، از روش خطی‌سازی سیستم استفاده می‌شود (استفاده از ماتریس ژاکوبین) اما در الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی، روش خطی‌سازی استفاده نمی‌شود با مقایسه نتایج ارائه شده، مشاهده می‌شود که الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی نتایج بهتری را ارائه می‌دهند و دارای خطای کمتری نسبت به الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته می‌باشند.

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول‌های (۲) و (۳)، درصد بهبود خطای فیلتر کالمن مکعبی نسبت به فیلتر کالمن توسعه یافته در متغیرهای حالت مربوط به سرعت در راستای Y و Z برابر ۵۰ درصد است که این درصد بهبود نسبی نشان از عملکرد بهتر فیلتر کالمن مکعبی نسبت به فیلتر کالمن توسعه یافته دارد. درصد بهبود خطا در بخش موقعیت در سه راستا نسبت به درصد نسبی بهبود خطا در قسمت سرعت کمتر است. در این سه متغیر حالت دو فیلتر تقریباً مشابه هم عمل کرده اند. هرچند در این بخش هم عملکرد فیلتر کالمن مکعبی بهتر بوده است. درصد بهبود نسبی خطای تعیین موقعیت فیلتر کالمن مکعبی در راستای X برابر ۱۰ درصد بوده است. این درصد بهبود نسبی در راستاهای Y و Z به ترتیب برابر ۳ و ۱٫۵ درصد بوده است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله تعیین موقعیت ماهواره به صورت آن-برد با استفاده از GPS مورد بررسی قرار گرفت. به این منظور ابتدا معادلات حاکم بر سیستم مورد بررسی قرار گرفت و پس از بدست آمدن معادلات فضای حالت حرکت ماهواره برای کاهش اثرات نویز و خطاهای موجود در مدل، فیلترسازی داده‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. از آنجا که فیلترهای خطی مرسوم قادر به ردگیری دقیق اهداف با دینامیک حرکتی غیرخطی (مانند ماهواره‌ها) نیستند، در این مقاله برای ردگیری ماهواره‌ها از فیلترهای غیرخطی کالمن توسعه یافته و کالمن مکعبی استفاده شد. شبیه‌سازی‌های این مقاله براساس داده‌ها حرکت ماهواره که با همکاری پژوهشگاه فضایی ایران تهیه گردیده است، انجام شد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که با وجود نزدیک بودن رفتار دو فیلتر به یکدیگر، در اکثر بخش‌های شبیه‌سازی، فیلتر کالمن مکعبی نسبت به فیلتر کالمن توسعه یافته نتایج بهتری دارد و خطای RMS تخمین موقعیت و سرعت ماهواره کاهش یافته است.

تقدیر و تشکر

بدینوسیله از پژوهشگاه فضایی ایران که ما را در انجام این تحقیق یاری نمودند و اطلاعات مربوط به حرکت ماهواره را در اختیار ما قرار دادند صمیمانه تشکر می‌نمایم.

مراجع

- [1] Erdoğan, E., "GPS-based Real-time Orbit Determination of Artificial Satellites using Kalman, Particle, Unscented Kalman and H-Infinity Filter", M.Sc. Thesis School of Natural and Applied Sciences, Middle East Technical University, Ankara, Turkey, (2011).
- [2] Hauschild A., and Montenbruck O., "Kalman-filter-based GPS Clock Estimation for Near Real-time Positioning", GPS Solut., Vol. 13, No. 3, pp. 173-182, (2009).
- [3] Sutton, E., "Review of Global Positioning System: Signals, Measurements, and Performance", AIAA J., Vol. 40, No. 8, pp. 1693, (2002).

- [4] Bowman B., Tobiska, W. K., Marcos, F., Huang, C., Lin, C., and Burke, W., "A New Empirical Thermospheric Density Model JB2008 using New Solar and Geomagnetic Indices", in AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Honolulu, Hawaii, pp. 18-21 (2008).
- [5] Karslioglu, M. O., "An interactive Program for GPS-based Dynamic Orbit Determination of Small Satellites", *Comput. Geosci.*, Vol. 31, No. 3, pp. 309-317, (2005).
- [6] Chiaradia, A. P. M., Kuga, H. K., and Prado, A., "Single Frequency GPS Measurements in Real-time Artificial Satellite Orbit Determination", *Acta Astronaut.*, Vol. 53, No. 2, pp. 123-133, (2003).
- [7] Julier, S. J., and Uhlmann, J. K., "Unscented Filtering and Nonlinear Estimation", *Proc. IEEE*, Vol. 92, No. 3, pp. 401-422, (2004).
- [8] Sierociuk, D., and Dzieliński, A., "Fractional Kalman Filter Algorithm for the States, Parameters and Order of Fractional System Estimation", *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, Vol. 16, pp. 129-140, (2006).
- [9] Ayati, M., and Khaloozadeh, H., "A Stable Adaptive Synchronization Scheme for Uncertain Chaotic Systems Via Observer", *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 42, No. 4, pp. 2473-2483, (2009).
- [10] Vatankhah, R., Karami, F., and Salarieh, H., "Observer-based Vibration Control of Non-classical Microcantilevers using Extended Kalman Filters", *Appl. Math. Model.*, Vol. 39, No. 19, pp. 5986-5996, (2015).
- [11] Arasaratnam, I., and Haykin, S., "Cubature Kalman Filters", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 54, No. 6, pp. 1254-1269, (2009).
- [12] Chitralakha, S. B., Prakash, J., Raghavan, H., Gopaluni, R. B, and Shah S. L., "A Comparison of Simultaneous State and Parameter Estimation Schemes for a Continuous Fermentor Reactor", *J. Process Control*, Vol. 20, No. 8, pp. 934-943, (2010).
- [13] Gadsden, S. A., Al-Shabi, M., Arasaratnam, I., and Habibi, S. R., "Combined Cubature Kalman and Smooth Variable Structure Filtering: A Robust Nonlinear Estimation Strategy", *Signal Processing*, Vol. 96, pp. 290-299, (2014).
- [14] Vallado, D. A., and McClain, W.D., "*Fundamentals of Astrodynamics and Applications*", Microcosm Press/Springer, 3rd ed., Vol. 12, New York, USA, (2007).
- [15] Rossouw, N. C., "A GPS-Based On-board Orbit Propagator for Low Earth-orbiting CubeSats", Stellenbosch: Stellenbosch University, South Africa, (2015).
- [16] Arasaratnam, I., Haykin, S., and Hurd, T. R., "Cubature Kalman Filtering for Continuous-Discrete Systems: Theory and Simulations", *IEEE Trans. Signal Process.*, Vol. 58, No. 10, pp. 4977-4993, (2010).
- [17] Havlicek, M., Friston, K. J., Jan, J., Brazdil, M., and Calhoun, V. D., "Dynamic Modeling of Neuronal Responses in fMRI using Cubature Kalman Filtering", *Neuroimage*, Vol. 56, No. 4, pp. 2109-2128, (2011).

- [18] Wertz, J.R., Everett, D.F., and Puschell, J.J., “*Space Mission Engineering: The New SMAD*”, Microcosm Press, Vol. 28, Hawthorne, California, USA, (2011).
- [19] Garcia, R.V., Pardal, P.C., Kuga, H.K., and Zanardi, M.C., “Nonlinear Filtering for Sequential Spacecraft Attitude Estimation with Real Data: Cubature Kalman Filter, Unscented Kalman Filter and Extended Kalman Filter”, *Advances in Space Research*, Vol. 63, No. 2, pp. 1038-1050, (2019).
- [20] Kumar, N.A., Suresh, C., and Rao, G.S., “*Extended Kalman Filter for GPS Receiver Position Estimation*”, In *Intelligent Engineering Informatics*, pp. 481-488, Springer, Singapore, (2018).

فهرست نمادهای انگلیسی

G : ثابت گرانش زمین

K_k : بهره فیلتر کالمن توسعه یافته در زمان k ام

\vec{I}_{12} : بردار موقعیت ماهواره نسبت به مرکز زمین

V : تابع پتانسیل زمین

V_{aero} : سرعت آیرودینامیکی ماهواره

W_k : بهره فیلتر کالمن مکعبی در زمان k ام

x : مولفه بردار موقعیت ماهواره در راستای محور X دستگاه ثابت زمین مرکز (ECI)

y : مولفه بردار موقعیت ماهواره در راستای محور Y دستگاه ثابت زمین مرکز (ECI)

z : مولفه بردار موقعیت ماهواره در راستای محور Z دستگاه ثابت زمین مرکز (ECI)

\dot{x} : مولفه بردار سرعت ماهواره در راستای محور X دستگاه ثابت زمین مرکز (ECI)

\dot{y} : مولفه بردار سرعت ماهواره در راستای محور Y دستگاه ثابت زمین مرکز (ECI)

\dot{z} : مولفه بردار سرعت ماهواره در راستای محور Z دستگاه ثابت زمین مرکز (ECI)

\hat{x} : بردار تخمینی از بردار حالت سیستم

ξ : ماتریس نقاط کیوبچر

Abstract

Due to the nonlinearity of the equations governing the satellite estimation system, linear filters are not able to estimate the precise position, and then satellite tracking is associated with several errors. In this paper, satellite motion equations are investigated, then, using GPS observations, Extended Kalman filter (EKF) and Cubature Kalman filter (CKF) the satellite's position and velocity are determined. Cubature Kalman filter is an algorithm suitable for estimating noisy high dimension nonlinear systems, which is based on the Gaussian and Kalman filter. Simulation results and RMS of the positioning errors confirm that the Cubature Kalman filter has improved accuracy and performance compared to the Extended Kalman filter. Cubature Kalman filter shows 50 percent improvement in velocity estimation in y and z directions compared to EKF. Although, the relative error improvement percentage for the position is less than velocity and both filters have almost similar performance. However, CKF is slightly superior and has had 10 percent, 3 and 1.5 percent improvement in relative errors of x, y and z directions, respectively.