

## تحلیل دینامیکی میکروتیر مدرج تابعی دارای جرم متحرک براساس تئوری زوج تنش اصلاح شده

در مقاله کنونی پاسخ دینامیکی میکروتیر مدرج تابعی تحت اثر میکرو جرم متحرک بر اساس نظریه زوج تنش اصلاح شده در چارچوب مدل تیموشنکو برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. معادلات حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل همپلتون بدست آمده‌اند، سپس روش پیشنهادی برای بدست آوردن فرکانس طبیعی و شکل مودهای ارتعاش متناسب با شرایط مرزی ارائه شده و مقادیر ویژه سیستم برای بدست آوردن پاسخ دینامیکی آن گسترش داده شده‌اند. برای اعتبارسنجی، فرکانس و پاسخ دینامیکی میکروتیر با سایر مطالعات مقایسه شدند. علاوه بر این نتایج عددی برای فرکانس طبیعی و پاسخ دینامیکی ارائه شد و تأثیر پارامترهای مختلفی همچون مقیاس طول میکروتیر، نسبت ضخامت به طول، شرایط مرزی، سرعت میکرو جرم و اندیس توانی مورد بررسی قرار گرفت.

محسن نوذرپورشمی<sup>۱</sup>

کارشناسی ارشد

محمد هاشمیان<sup>۲</sup>

استادیار

مصطفی پیرمرادیان<sup>۳</sup>

استادیار

واژه های راهنما: تئوری زوج تنش اصلاح شده، میکروتیر مدرج تابعی، جرم متحرک، شرایط مرزی عمومی، مقادیر ویژه، پاسخ دینامیکی

### ۱- مقدمه

با گسترش سریع تکنولوژی بخصوص در زمینه میکرو/نانوتکنولوژی کاربرد میکروسازه‌ها با توجه به خصوصیات ویژه فیزیکی، مکانیکی و الکترونیکی آنها هرچه بیشتر توسعه می‌یابد؛ کاربرد این موضوع بیشتر در میکرو حسگرها، میکروپردازشگرها و مخصوصاً در مهندسی پزشکی برای میکروماشین‌ها و میکروسازه‌هایی است که در آنها از میکروتیرها استفاده به عمل می‌آید و در اکثر مواقع تحت تأثیر جرم متحرک قرار می‌گیرند. بسیاری از سیستم‌های مهندسی را می‌توان به مثابه مسأله تیر انعطاف پذیری که تحت عبور بارهای متحرک است، در نظر گرفت و مدل ریاضی آنها را ارائه کرد. بسیاری از کاربردهای عملی در مقیاس میکرو/نانو در میکرو حسگرها و ... نمونه‌هایی از این سیستم‌ها هستند. از این رو تعیین رفتار دینامیکی تیرها و میکروتیرهای تحت عبور جرم (یا حسگر)، از دیرباز موضوع مورد علاقه تحقیق بسیاری از دانشمندان بوده است.

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد، گروه مکانیک، واحد خمینی‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی‌شهر، اصفهان، ایران nozarpoormohsen@gmail.com

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، استادیار، گروه مکانیک، واحد خمینی‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی‌شهر، اصفهان

hashemian@iaukhsh.ac.ir ایران

<sup>۳</sup> استادیار، گروه مکانیک، واحد خمینی‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی‌شهر، اصفهان، ایران pirmoradian@iaukhsh.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۷/۱۱/۲۸، تاریخ پذیرش: ۹۹/۰۸/۰۳

برای پیش بینی تاثیرات اندازه، استفاده از مدل‌های تئوری غیرکلاسیک مکانیک محیط پیوسته که اثر اندازه را به خوبی در رفتار میکروسازه‌ها درست و دقیق پیش بینی می‌کنند ضروری است و رواج زیادی داشته است، از میان این مدل‌های تئوری می‌توان به مدل گرادیان کرنش و تئوری زوج تنش اشاره کرد [۶-۱].

برخی از محققین رفتار استاتیکی و دینامیکی سازه‌ها را بر اساس تئوری تنش کوپل مطالعه کرده‌اند. با استفاده از این تئوری پارک و همکاران رفتار استاتیکی یک تیر ساخته شده از اپوکسی را مطالعه نموده‌اند [۷]. کونگ و همکاران معادلات حاکم و شرایط مرزی حاکم بر یک تیر اویلر برنولی را با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده به دست آورده و گزارش دادند که سفتی تیر یک ویژگی وابسته به اندازه است [۸]. اولین مطالعه روی ارتعاش پل توسط ویلیس [۹] در سال (۱۸۴۸) میلادی انجام شده است. او فرمول بندی معادله حرکت را برای یک مسأله پل راه آهن برای اولین جرم انجام داد. استوکس [۱۰] در سال (۱۸۹۶) میلادی معادله وی را با استفاده از بسط سری‌های توانی حل کرد. جعفری و فتح آبادی [۱۱] ارتعاش اجباری تیر تیموشنکو از جنس مواد هدفمند با لایه پیزوالکتریک تحت جرم متحرک را بررسی نمودند. میدان جابجایی با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی تیرها به دست آورده شده و رفتار دینامیکی تیر با استفاده از روش ناویر به دست آورده شده است.

پیرمادیان [۱۲] در مقاله‌ای به تحلیل پایداری دینامیکی ارتعاشات عرضی تیر تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک پرداخت. بخشی و آریایی [۱۳] در مقاله‌ای تحلیل ارتعاشی تیر تیموشنکو چند تکه دارای قیود انعطاف پذیر میانی تحت عبور سیستم دو درجه آزادی از روی آن را بررسی کردند. پورشهسواری و قربانی [۱۴] در مقاله‌ای به آنالیز مودال یک تیر تحت اثر جرم متحرک با استفاده از روش‌های مودال برای سیستم‌های خطی متغیر با زمان در حوزه زمان پرداختند. اسماعیل‌زاده و ربیعی [۱۵] به تحلیل دینامیکی تیر تیموشنکو تحت اثر جرم متحرک با استفاده از روش بسط چند جمله‌ای‌های متعامد پرداختند. مشاهده شد که افزایش سرعت، تأثیر بسزایی بر حداکثر پاسخ دینامیکی تیر می‌گذارد. و همچنین با افزایش قیود درگیر، حساسیت پاسخ نسبت به افزایش سرعت، به اندازه چشمگیری کاهش می‌یابد. طبق نتایج به دست آمده مشاهده گردید که با افزایش اینرسی جرم متحرک، در سرعت و شرایط مرزی معین، پاسخ دینامیکی سازه می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یابد.

کارگرنوین و سعیدی [۱۶] در مقاله‌ای به تحلیل دینامیکی تیر تیموشنکو تحت اثر جرم متحرک به کمک توابع ویژه وابسته به زمان پرداختند. در این مقاله روشی جدید برای یافتن پاسخ دینامیکی یک تیر تیموشنکو با طول محدود و شرایط تکیه گاهی معین که تحت اثر یک جرم متحرک با سرعت ثابت قرار گرفته است، ارائه شده است. کارگرنوین و همکاران [۱۷] ارتعاش آزاد تیر کامپوزیتی لایه‌ای ضخیم با وجود تورق بین لایه‌ای را با بکار بردن چندجمله‌ای‌های لژاندر مزدوج با ضرائب لاگرانژ مورد بررسی قرار داده‌اند. این روش بسیار مناسب برای تیرهای ضخیم و در شرایط مرزی مختلف پیشنهاد شده است. جعفری و همکاران [۱۸] ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی ضخیم با شرایط مرزی عمومی را با بکار بردن تئوری مرتبه اول برشی با استفاده از نوشتن درجات آزادی در قالب چند جمله‌ای‌های لژاندر بصورت نیمه تحلیل بررسی کردند. آن‌ها همچنین تحلیلی مشابه را برای تیرهای ضخیم دوران کننده کامپوزیتی که در انتهایشان جرم متمرکز قرار داشت، انجام دادند و فرکانس‌های طبیعی مجموعه را بر حسب جرم متمرکز محاسبه کردند [۱۹].

در زمینه آنالیز دینامیکی و ارتعاشی میکروتیرها، اخیراً سینگ و همکاران با استفاده از تئوری گرادیان کرنش تعمیم یافته و زوج تنش اصلاح شده، معادلات پاسخ دینامیکی و فرکانسی میکروتیر مدل اویلربرنولی را برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از تکنیک عددی تربیع دیفرانسیل پاسخ داده اند [۲۰]. قایش با در نظر گرفتن ساختار ویسکوالاستیک مدل کلونین وویت برای یک میکرو تیر مدرج تابعی با کرنش های غیرخطی و بکار بردن تئوری زوج تنش اصلاح شده، پاسخ دینامیکی آن را تحت تاثیر نیروی هارمونیک برای مقادیر مختلف پارامتر اندیس توانی، فرکانس تحریک، پارامتر مقیاس اندازه و نسبت میرایی تیر بررسی کردند [۲۱]. فانگ و همکاران مدل تحلیلی سه بعدی را برای بررسی مشخصه های ارتعاشی و دینامیکی میکروتیر مدرج تابعی دوران کننده ارائه دادند و تاثیر پارامتر مقیاس اندازه را بر فرکانس های طبیعی و پاسخ دینامیکی میکروتیر بررسی کردند [۲۲]. وو و همکاران پاسخ ارتعاشات اجباری میکرو تیرهای کامپوزیتی مدرج تابعی و تقویت شده با نانورق های گرافنی را با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و بوسیله میدان جایجائی مرتبه بالای برشی با تکنیک عددی تربیع دیفرانسیلی مورد مطالعه قرار داده اند [۲۳]. شنگ و همکاران پاسخ دینامیک غیرخطی میکروتیرهای مدرج تابعی ویسکوالاستیک را با مدل اویلربرنولی و با استفاده از تئوری زوج تنش اصلاح شده به کمک روش حل عددی در شرایط مرزی مختلف ارائه دادند، آنها نتیجه گرفتند که مقدار پارامتر مقیاس اندازه و شرایط مرزی بر هارمونیک یا آشوبناک بودن نوع حرکت تیر تاثیر بسزایی دارد [۲۴].

عارفی و همکاران اخیراً ارتعاشات آزاد و اجباری میکرو تیرهای کامپوزیتی با رویه های مدرج تابعی را تحت اثر حرکت یک جرم با سرعت ثابت با در نظر گرفتن کرنش های غیرخطی ون کارمن و با استفاده از تئوری گرادیان کرنش مورد مطالعه تحلیلی قرار دادند و با استفاده از روش اغتشاشاتی مقیاس های زمانی منحنی های پاسخ فرکانسی تیر را ارائه کرده اند [۲۵]. با توجه به منابع منتشر شده این حوزه، جای خالی انجام تحلیل ارتعاشی و پاسخ دینامیکی بر روی میکرو تیر مدرج تابعی تحت اثر نیروی متحرک در شرایط مرزی عمومی، با استفاده از مدل تیموشنکو کاملاً محسوس است. در این پژوهش بر اساس مدل تیر تیموشنکو، پاسخ میکرو تیر تحت تاثیر جرم متحرک با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده بررسی شده است.

## ۲- معادلات حاکم با استفاده از تئوری تنش زوج اصلاح شده

یانگ و همکاران [۲۶]، چگالی انرژی کرنشی جسم الاستیک خطی همگن تغییر شکل یافته که حجم  $V$  را اشغال می کند و بصورت زیر نوشته می شود را معرفی کردند:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} X_{ij}) dV, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

که  $\sigma_{ij}$ ،  $\varepsilon_{ij}$  و  $m_{ij}$  به ترتیب اجزای تانسور تنش، تانسور کرنش، بخش انحرافی تانسور زوج تنش و تانسور انحنای متقارن هستند. تانسور انحنای متقارن و کرنش بصورت زیر تعریف می شود [۲۷]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ X_{ij} &= \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \end{aligned} \quad (2)$$

که  $u_i$  مؤلفه‌های بردار جابجایی هستند و  $\theta_i$  مؤلفه‌های بردار دوران هستند. روابط ساختاری به این صورت بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{KK} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ m_{ij} &= 2\mu l^2 X_{ij}\end{aligned}\quad (3)$$

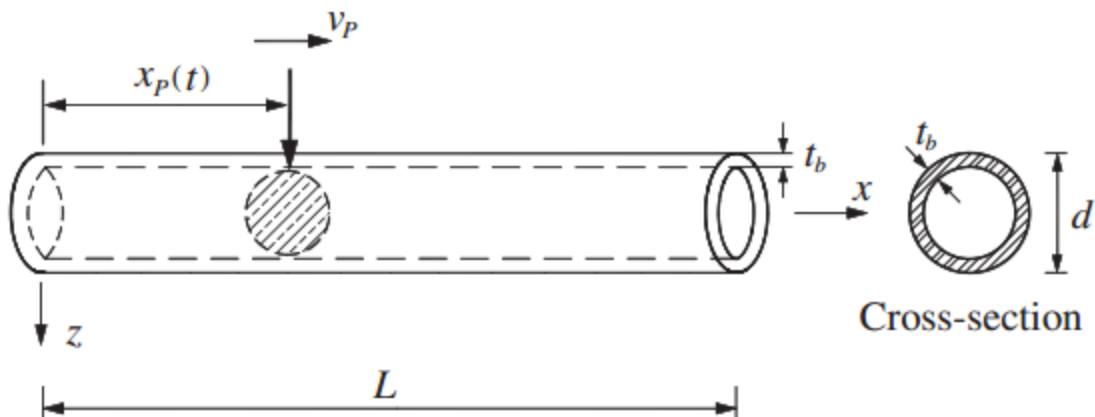
که  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر است.  $l$  پارامتر مقیاس اندازه طول ماده است که نشان دهنده اثر زوج تنش می‌باشد،  $\lambda$  و  $\mu$  ثوابت لامه هستند. مطابق شکل زیر، میکروتیر با طول  $L$ ، قطر  $d$ ، و ضخامت  $t_b$  مفروض است. برای تجزیه تحلیل دینامیکی چنین تیری، از تئوری تیر تیموشنکو استفاده می‌شود. علاوه بر این، میکروتیر حامل یک میکروجرم متحرک است که می‌توان آن را بصورت یک بار متحرک به بزرگی  $P(t)$  فرض کرد [۲۷]. جرم متحرک از انتهای سمت چپ به انتهای سمت راست با سرعت ثابت  $v_p$  در جهت محور تیر حرکت می‌کند. مؤلفه‌های اصلی میدان جابجایی بر اساس مدل تیر تیموشنکو پس از بارگیری می‌تواند بر اساس رابطه (۴) نوشته شود.

$$\begin{aligned}u_{\hat{x}}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{y}, t) &= -\hat{z}\psi(\hat{x}, t) \\ u_{\hat{y}}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{y}, t) &= 0 \\ u_{\hat{z}}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{y}, t) &= w(\hat{x}, t)\end{aligned}\quad (4)$$

که  $w(\hat{x}, t)$  تغییر شکل عرضی نقطه است  $(\hat{x}, 0, 0)$  در محور مرکزی است،  $\psi(\hat{x}, t)$  که زاویه چرخش سطح مقطع و  $t$  زمان است. انرژی جنبشی تیر را می‌توان این گونه بیان کرد:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho A w_t^2 + \rho I \psi_t^2] d\hat{x} \quad (5)$$

که  $\rho$  چگالی جرم تیر است،  $I$  ممان دوم سطح مقطع تیر است و  $A$  مساحت سطح مقطع است.



شکل ۱- شماتیکی از میکرو تیر با سطح مقطع دایروی تحت اثر جرم متحرک با سرعت ثابت

اجزای تانسور کرنش غیر صفر می‌توانند به صورت زیر بدست آیند:

$$\varepsilon_{\hat{x}\hat{x}} = -\hat{z}\psi_{,\hat{x}}, \quad \varepsilon_{\hat{x}\hat{z}} = \frac{1}{2}(w_{,\hat{x}} - \psi) \quad (۶)$$

هم‌چنین، می‌توان نوشت:

$$\theta_{\hat{x}} = \theta_{\hat{z}} = 0, \theta_{\hat{y}} = -\frac{1}{2}(\psi + w_{,\hat{x}}) \quad (۷)$$

با جایگزینی معادله ۷ در معادله ۲، تانسور انحنای به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$X_{\hat{x}\hat{y}} = -\frac{1}{4}(\psi_{,\hat{x}} + w_{,\hat{x}\hat{x}}), X_{\hat{x}\hat{x}} = X_{\hat{y}\hat{y}} = X_{\hat{z}\hat{z}} = X_{\hat{x}\hat{z}} = X_{\hat{y}\hat{z}} = 0 \quad (۸)$$

با استفاده از معادلات فوق انرژی پتانسیل میکروتیر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L [EI\psi_{,\hat{x}}^2 + K_S\mu A(w_{,\hat{x}} - \psi)^2 + \frac{\mu l^2 A}{4}(w_{\hat{x}\hat{x}} + \psi_{,\hat{x}})^2] d\hat{x} \quad (۹)$$

که  $k_S$  فاکتور تصحیح تنش برشی است. کار انجام شده توسط نیروی خارجی حاصل از جرم متحرک روی میکرو تیر می‌تواند این‌گونه نوشته شود:

$$W_f = \int_0^L f_0 \delta(\hat{x} - v_f t) w(\hat{x}, t) d\hat{x} \quad (۱۰)$$

در این رابطه  $\delta$  تابع دلتا دیراک است. معادلات حاکم و شرایط مرزی می‌توانند از اصول همیلتون مشتق شوند که به این صورت بیان می‌شوند:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U_b + W_f) dt = 0 \quad (۱۱)$$

با استفاده از اصل همیلتون، فرم نهایی معادلات تعادل سیستم شامل میکروتیر تیموشنکو مدرج تابعی تحت اثر جرم متحرک عبارتست از:

$$(\rho A)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k_s(\mu A)_{eq} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \hat{x}^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}} \right) + \frac{l^2}{4}(\mu A)_{eq} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \hat{x}^4} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial \hat{x}^3} \right) - f_0 \delta(\hat{x} - v_f t) = 0 \quad (۱۲)$$

$$(\rho I)_{eq} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - (EI)_{eq} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{x}^2} - k_s(\mu A)_{eq} \left( \frac{\partial w}{\partial \hat{x}} - \psi \right) - \frac{l^2}{4}(\mu A)_{eq} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \hat{x}^3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{x}^2} \right) = 0$$

در معادله‌های تعادل ۱۲، چگالی معادل سطح مقطع  $(\rho A)_{eq}$ ، ممان اینرسی جرم معادل دوم سطح مقطع  $(\rho I)_{eq}$ ، سختی خمشی معادل سطح مقطع  $(EI)_{eq}$  و مدول برشی معادل سطح مقطع  $(\mu A)_{eq}$  برای میکروتیر مدرج تابعی هستند. در معادلات فوق اگر اثر جرم متحرک را نادیده بگیریم، به همان روابط مرجع [۲۸] در مورد ارتعاش آزاد یک میکرو تیر تیموشنکو خواهیم رسید.

علاوه بر این روابط بدست آمده از اصل همیلتون برای دو سر میکرو تیر مدل تیموشنکو، برای سه حالت تکیه گاه ساده، گیردار و آزاد، به قرار زیر هستند:

$$\begin{aligned}
 S: w = 0; M_1 = 0; M_2 = 0 \\
 C: w = 0; \psi = 0; \frac{\partial w}{\partial \hat{x}} = 0 \\
 F: F = 0; M_1 = 0; M_2 = 0
 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

که در آن :

$$\begin{aligned}
 F = k_s(\mu A)_{eq} \left( \frac{\partial w}{\partial \hat{x}} - \psi \right) - \frac{l^2}{4} (\mu A)_{eq} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \hat{x}^3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{x}^2} \right) = 0 \\
 M_1 = (EI)_{eq} \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}} + \frac{l^2}{4} (\mu A)_{eq} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}} \right) = 0 \\
 M_2 = \frac{l^2}{4} (\mu A)_{eq} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

بر اساس مدل میکرو مکانیکی موری تاناکا، اگر P یک خاصیت مکانیکی یا هندسی از ماده مدرج تابعی باشد که از دو فاز ۱ و ۲ ساخته شده است (بطوری که بالای تیر کاملاً از جنس کاملاً سرامیکی ۱ تشکیل شده و زیر تیر کاملاً از جنس کاملاً فلزی ۲ ساخته شده است). آن گاه تغییرات این خاصیت در راستای ضخامت تیر بر حسب کسر حجمی هر کدام از فازهای ۱ و ۲ با استفاده از رابطه زیر بیان می شود [۲۹]:

$$P(z) = P_2 + (P_1 - P_2) \frac{V_1(z)}{1 + V_2(z) \left( \frac{P_1}{P_2} - 1 \right) \left( \frac{1+v}{3-3v} \right)} \tag{۱۵}$$

در رابطه فوق  $v$ ، ضریب پواسون برای هر دو جنس است که ثابت فرض شده است،  $V_1$  و  $V_2$  نیز به ترتیب کسر حجمی ماده ۱ و ۲ هستند که مجموعشان برابر واحد است. اگر در ماده مدرج تابعی، کسر حجمی از قانون توانی تبعیت کند، کسر حجمی بر حسب اندیس توانی  $p$  ماده مدرج تابعی برابر است با:

$$\begin{aligned}
 V_1(z) &= \left( 0.5 + \frac{z}{h} \right)^p \\
 V_2(z) &= 1 - \left( 0.5 + \frac{z}{h} \right)^p
 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

### ۳- روش حل معادلات حرکت

برای حل معادلات دیفرانسیل بدست آمده برای سیستم، از روش گسترش مودال استفاده خواهد شد. در ابتدا باید فرکانسهای طبیعی (مقادیر ویژه سیستم) و شکل مودهای نظیر آنها (بردارهای ویژه) محاسبه شوند. سپس در مرحله نهایی محاسبات، بر اساس همین روش و با استفاده از مقادیر و بردارهای ویژه سیستم، پاسخ دینامیکی تیر بدست خواهد آمد. روش حل پیشنهادی برای بدست آوردن فرکانسهای طبیعی و شکل مودهای ارتعاش آزاد با بیان مؤلفه‌های میدان جابجایی میکرو تیر در قالب سری‌هایی تشکیل شده از چند جمله‌ای‌های لژاندر و کمینه کردن تابع هدف مسأله نسبت به ضرایب نامعین جابجایی و ضرائب لاگرانژ، برای یافتن پاسخ عددی متناسب با شرایط مرزی، ارائه شده است. اطلاعات محاسبه شده در مورد مقادیر ویژه سیستم با روش بسط مودال برای بدست آوردن پاسخ دینامیکی آن گسترش داده می‌شوند.

## ۳-۱- تحلیل ارتعاشات آزاد

استفاده همزمان و ترکیب کردن روش پاسخ سری و روش ضرایب لاگرانژ، در حل مسائل مقدار مرزی بسیار با اهمیت است. برای به کار بردن چنین روشی در این قسمت، از توابع لژاندر به عنوان توابع مکانی استفاده شده است، زیرا خواص چندجمله‌ای‌های لژاندر باعث ساده‌سازی روابط خواهند شد.

با استفاده از روش جداسازی متغیرها، می‌توان پاسخ هارمونیک مسأله را به فرم زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} w(\hat{x}, t) &= W(\hat{x})e^{i\omega t} \\ \psi(\hat{x}, t) &= \Psi(\hat{x})e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (۱۷)$$

که در آن  $\omega$  فرکانس طبیعی سیستم بوده، مودهای ارتعاشی جابجایی عرضی  $W(\hat{x})$  و چرخش خمشی سطح مقطع تیر  $\Psi(\hat{x})$  هستند. همان‌طور که در بالا اشاره شد، توابع جابجایی را می‌توان در قالب چندجمله‌ای‌های لژاندر به صورت رابطه (۱۸) نمایش داد [۱۸]:

$$\begin{aligned} W(x) &= \sum_{m=0}^N W_m P_m(x) \\ \Psi(x) &= \sum_{m=0}^N \Psi_m P_m(x) \end{aligned} \quad (۱۸)$$

$P_m$  یک چند جمله‌ای لژاندر بوده، همچنین  $W_m$  و  $\Psi_m$  نیز ضرایب مجهول هستند. در معادله بالا،  $x$  مختصات محوری جدید و کمکی مسأله برای ساده نویسی بوده و رابطه آن با مختصات اولیه و اصلی سیستم برابر است با:  $\hat{x} = L \frac{x+1}{2}$ ، در نتیجه برای طول تیر مختصه کمکی همواره در محدوده  $-1 \leq x \leq 1$  است.

برای توسعه روابط مناسب برای تحلیل مسأله، ابتدا یک تابع هدف که شامل انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم است توصیف می‌شود. در ادامه این تابع باید نسبت به مؤلفه‌های مجهول جابجایی سیستم و همچنین ضرایب لاگرانژ<sup>۱</sup> اکستریم شود. فرم کلی تابع هدف مورد نظر مسأله عبارتست از [۱۸]:

$$F = T + U - \sum_{i=1}^6 \lambda_i (B.C) \quad (۱۹)$$

که در آن،  $\lambda_i$  ها ضرایب لاگرانژ مربوط به ۶ معادله شرط مرزی هستند (سه معادله برای هر شرط مرزی موجود در یک سر تیر). نهایتاً با جایگذاری سری‌های مفروض رابطه ۱۸ در روابط انرژی جنبشی (رابطه (۵)) و انرژی کرنشی سیستم (رابطه (۹))، می‌توان فرم باز شده انرژی جنبشی و کرنشی سیستم را نوشت. شرایط لازم برای وجود اکستریم عبارتست از [۱۸]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial W_m} = \frac{\partial F}{\partial \Psi_m} = 0, (m = 0, 1, 2, \dots, N) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_n} = 0, (n = 0, 1, \dots, 6) \end{aligned} \quad (۲۰)$$

<sup>۱</sup> Lagrange multipliers

با جایگذاری معادله (۱۹) در معادله (۲۰)، معادله مقدار ویژه نهایی برای تحلیل ارتعاشات آزاد سیستم به دست خواهد آمد:

$$\left[ \begin{bmatrix} [A_1] & [A_2] \\ [A_2]^T & [0] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [B_1] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

که در آن ماتریس  $[A_2]$  فقط به شرایط مرزی میکرو تیر بستگی دارد. ماتریس های  $[A_1]$  و  $[B_1]$  نیز به ترتیب وابسته به مؤلفه های سختی و اینرسی سیستم هستند. از طرفی فرم کلی بردار  $\{X\}$  بصورت رابطه (۲۲) است:

$$\{X\} = \{W_0, W_1, \dots, W_N, \Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_N\}^T \quad (22)$$

که بردار  $\{X\}$  شامل  $2(N+1)$  درایه و بردار  $\{\lambda\}$  شامل شش درایه است.

### ۳-۲- تحلیل پاسخ دینامیکی

برای ارائه پاسخ دینامیکی سیستم از روش بسط مودال<sup>۱</sup> استفاده می شود، که در این راه از مقادیر ویژه و توابع ویژه تیر که در قسمت قبلی بررسی شده اند، استفاده می شود. لذا با در نظر گرفتن توابع ویژه زمانی یکسان برای جابجایی ها و چرخش های مقطع تیر تیموشنکو، پاسخ دینامیکی را در قالب بسط سری به صورت زیر نوشت:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^M W_i(x) q_i(t) \quad (23)$$

$$\psi(x, t) = \sum_{i=1}^M \Psi_i(x) q_i(t)$$

که در آن  $W_i(x)$  و  $\Psi_i(x)$  مودهای ارتعاشی مفروض هستند و  $M$  نیز تعداد مودهای در نظر گرفته شده برای افزایش دقت مسأله است. تابع  $q_i(t)$  نیز مختصات مودال زمانی است. با جایگذاری رابطه (۲۳) در معادلات انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار نیروهای خارجی<sup>۰</sup>، می توان نوشت:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M m_{ij} q_{i,t}(t) q_{j,t}(t)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M k_{ij} q_i(t) q_j(t) \quad (24)$$

$$W = \sum_{i=1}^M f_i(t) q_i(t)$$

معادلات لاگرانژ برای بدست آوردن روابط تعادل دینامیکی سیستم به قرار زیر هستند [۳۰]:

<sup>۱</sup> Modal Expansion

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (25)$$

با جایگذاری عبارات بدست آمده برای جرم، سختی و نیروی خارجی، در معادلات لاگرانژ می توان شکل نهایی معادلات سیستم را به فرم زیر نوشت:

$$\sum_{j=1}^M m_{ij} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^M k_{ij} q_j(t) = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (26)$$

فرم ماتریسی معادلات فوق نیز عبارتند از:

$$[\bar{M}]\{\ddot{q}(t)\} + [\bar{K}]\{q(t)\} = \{F(t)\} \quad (27)$$

ماتریس های  $\bar{M}$  و  $\bar{K}$  ماتریس های متقارن و مربعی با ابعاد  $M \times M$  هستند. برای حل دستگاه معادله دیفرانسیل ماتریسی زمانی از مرتبه دوم، می توان از روش عددی میانگین شتاب الگوریتم نیومارک<sup>۱</sup> استفاده کرد.

#### ۴- اعتبارسنجی نتایج

##### ۴-۱- اعتبارسنجی نتایج فرکانس ارتعاشات آزاد

برای بررسی نحوه همگرایی نتایج فرکانس طبیعی میکروتیر CC با مشخصات  $L/d = 10$  و  $d/l = 2$ ، نتایج فرکانس بی بعد  $\Omega = \omega L \sqrt{\rho A / E d^2}$  مربوط به پنج مود ابتدایی ارتعاش در جدول (۱) به عنوان تابعی از N (تعداد جملات لژاندر مورد استفاده) ارائه شده اند، که در آن  $E = 1.44 \text{ GPa}$  و  $\rho = 1220 \text{ Kg/m}^3$  هستند.

**جدول ۱-** بررسی همگرایی فرکانس بی بعد  $\Omega$  میکروتیر تیموشنکو برای پنج مود ابتدایی ارتعاش آن به عنوان تابعی از N

| عدد مود | N = 10  | N = 15  | N = 20  |
|---------|---------|---------|---------|
| ۱       | ۰/۷۳۰۱  | ۰/۷۲۹۸  | ۰/۷۲۹۷  |
| ۲       | ۲/۱۱۳۱  | ۲/۱۱۲۶  | ۲/۱۱۲۶  |
| ۳       | ۴/۲۸۳۳  | ۴/۲۸۱۹  | ۴/۲۸۱۸  |
| ۴       | ۷/۲۴۷۱  | ۷/۲۲۳۶  | ۷/۲۲۳۵  |
| ۵       | ۱۰/۸۸۲۶ | ۱۰/۸۱۸۴ | ۱۰/۸۱۸۲ |

<sup>۱</sup> Average acceleration method of Newmark

نتایج، همگرایی مناسب و سریع فرکانس این مودهای ارتعاشی را نشان داده اند. مطابق نتایج برای رسیدن به همگرایی تا چهار رقم اعشار،  $N = 15$  (تعداد ۱۵ چندجمله ای لژاندر) کفایت می کند. برای بررسی صحت نتایج ارتعاشات آزاد، فرکانس طبیعی بی بعد تیر همگن  $\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$  برای شرایط مرزی مختلف با فرض  $l = 0$  با مقاله [۳۱] مقایسه شده و در جدول (۲)، ارائه شده است. سطح مقطع تیر بصورت مستطیلی با ارتفاع  $h$  و عرض  $b$  است و  $L = 10h$  می باشد و نتایج با تقریب  $N = 15$  جمله از توابع لژاندر بدست آمده اند.

#### ۲-۴- اعتبارسنجی نتایج پاسخ دینامیکی

در نتایج این قسمت، نسبت پاسخ دینامیکی<sup>۱</sup> در تیر عبارت از نسبت بیشینه تغییر شکل دینامیکی مرکز تیر به بیشینه تغییر شکل استاتیکی آن است که با رابطه زیر معرفی شده است:

$$\text{Dynamic Response Ratio} = \frac{\max(w_D)}{\max(w_S)} \quad (28)$$

در رابطه فوق، بیشینه تغییر شکل استاتیکی تیر مدل اویلر برنولی که تحت اثر بار نقطه ای به بزرگی  $f$  باشد نیز تابع نوع شرط مرزی تیر بوده و روابط آن منبع [۳۲] ارائه شده است. پارامتر مهم دیگری که در مورد بار یا جرم متحرک باید معرفی شود، سرعت بی بعد جرم است که با عبارت پارامتر سرعت نیز<sup>۲</sup> بیان شده و مطابق منابع [۲۷] با استفاده از رابطه زیر بدست می آید ( $\omega_1$  فرکانس تشدید مود پایه و اصلی میکروتیر است):

$$\text{velocity parameter} = \frac{v_f}{L\omega_1/\pi} \quad (29)$$

جدول ۲- مقایسه فرکانس طبیعی بی بعد  $\bar{\omega}$  تیر با مقالات مرجع در شرایط مرزی مختلف و مودهای ارتعاشی متفاوت

| شماره<br>شکل مود | روش حل     | شرط مرزی تیر |        |        |
|------------------|------------|--------------|--------|--------|
|                  |            | CC           | SS     | CF     |
| اول              | مقاله [۳۱] | ۴/۵۷۹۵       | ۳/۱۱۵۶ | ۱/۸۶۷۷ |
|                  | روش حاضر   | ۴/۵۷۹۱       | ۳/۱۱۴۹ | ۱/۸۶۵۴ |
| دوم              | مقاله [۳۱] | ۷/۳۳۱۲       | ۶/۰۹۰۶ | ۴/۵۷۲۴ |
|                  | روش حاضر   | ۷/۳۳۰۷       | ۶/۰۹۰۲ | ۴/۵۷۰۲ |

<sup>۱</sup> Dynamic Response Ratio

<sup>۲</sup> Velocity Parameter

در جدول (۳)، برای مقادیر مختلف پارامتر سرعت، مقدار نسبت پاسخ دینامیکی برای یک تیر همگن اویلر برنولی SS از تئوری کلاسیک با سطح مقطع دایروی و  $L/d = 20$  از مقاله [۲۷] با پژوهش حاضر، مقایسه و اعتبارسنجی شده است. تعداد مودهای تأثیرگذار پاسخ دینامیکی،  $M = 7$  در نظر گرفته شده است. از مقایسه نتایج، متوجه انطباق بسیار خوب نتایج هستیم. همچنین نتایج حل عددی حاضر نسبت به نتایج تحلیلی مرجع [۲۷] بیش از مقدار تخمینی هستند که دلیل آن صلبیت بیشتر مدل اویلر برنولی نسبت به تیموشنکو است.

## ۵- تشریح نتایج

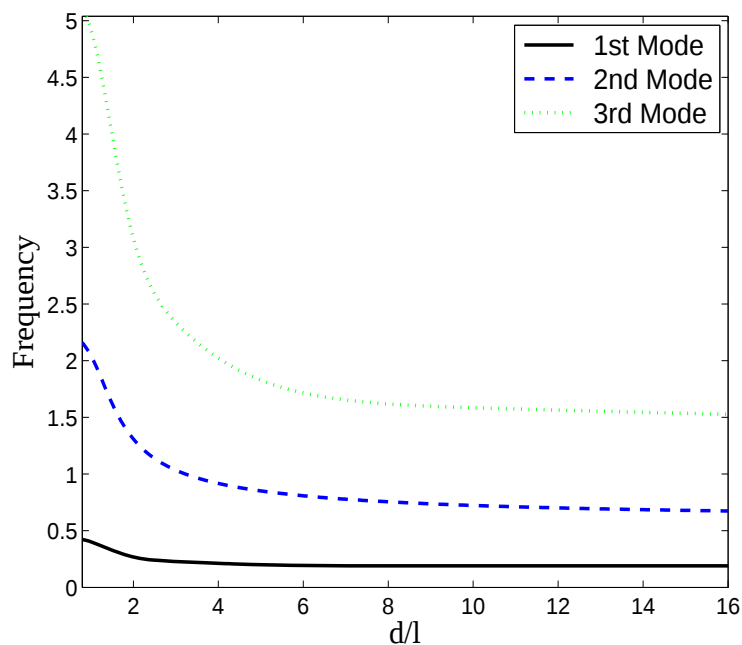
در این بخش، مشخصه‌های مکانیکی میکروتیر مدرج تابعی از جنس آلومنیوم / آلومینا مطابق است با:  $\rho_m = 2700 \frac{Kg}{m^3}$ ,  $\rho_c = 3800 \frac{Kg}{m^3}$  و  $E_m = 70 GPa$ ,  $E_c = 380 GPa$ . در ادامه تأثیر پارامترهای مختلفی همچون نسبت ضخامت به قطر، نسبت طول به قطر تیر، پارامتر مقیاس اندازه، اندیس ماده مدرج توانی و شرایط مرزی بر فرکانس طبیعی بی بعد و پاسخ دینامیکی بررسی خواهد شد.

### ۵-۱- تشریح نتایج مربوط به ارتعاش آزاد

در نمودار شکل (۲) فرکانس بی بعد سه مود ابتدایی میکروتیر مدرج بر حسب نسبت  $d/l$  میکروتیر SS رسم شده است. سایر ورودی‌ها با فرض ثابت بودن  $l = 17.6 \mu m$ ،  $d/th = 4$ ،  $L/d = 10$  و  $p = 4$  هستند. ضریب تصحیح تنش برشی برای سطح مقطع حلقوی تابع شعاع داخلی و خارجی است و در این حالت با برابر با  $k_s = 0.62$  در نظر گرفته شده است [۳۳]. مطابق شکل (۲) با افزایش قطر، فرکانس بصورت غیرخطی کم می‌شود. همچنین با افزایش نسبت  $d/l$  از یک مقدار به بعد فرکانس همه مودها به سمت فرکانس بی بعد تیر تیموشنکوی کلاسیک میل می‌کند. در جدول (۴)، تأثیر نسبت  $L/d$  تیر با شرایط تکیه گاهی مختلف بر فرکانس بی بعد دو مود ابتدایی میکرو تیر ارائه شده است. نسبت  $d/l = 2$  فرض شده است. فرکانس با افزایش تدریجی نسبت  $L/d$ ، ابتدا به میزان زیادی کاهش پیدا می‌کنند که نهایتاً برای نسبت‌های بزرگ، نتایج مدل تیموشنکو به مدل اویلر برنولی میل می‌کند. برای مقادیر بزرگ  $L/d$ ، تغییر شکل ناشی از برش در سطح مقطع قابل صرف نظر است و مدل تیر اویلر برنولی بخوبی فرکانس طبیعی تیر نازک را برآورد می‌کند. اما برای مقادیر کوچک  $L/d$ ، نتایج مدل تیر تیموشنکو با نتایج اویلر برنولی تفاوت زیادی دارند.

جدول ۳- مقایسه و صحت‌سنجی نتایج پاسخ دینامیکی تحقیق حاضر با مقاله مرجع [۲۷] در پارامترهای سرعت مختلف

| نوع روش            | پارامتر سرعت |        |        |        |
|--------------------|--------------|--------|--------|--------|
|                    | ۱            | ۰/۵    | ۰/۲۵   | ۰/۱    |
| تئوری (مقاله [۲۷]) | ۱/۵۴۸۱       | ۱/۷۰۴۵ | ۱/۲۵۷۵ | ۱/۰۹۶۲ |
| عددی (حاضر)        | ۱/۵۴۹۴       | ۱/۷۰۶۵ | ۱/۲۶۰۸ | ۱/۱۰۱۲ |
| خطای نسبی %        | ۰/۰۸         | ۰/۱۲   | ۰/۲۶   | ۰/۵۱   |

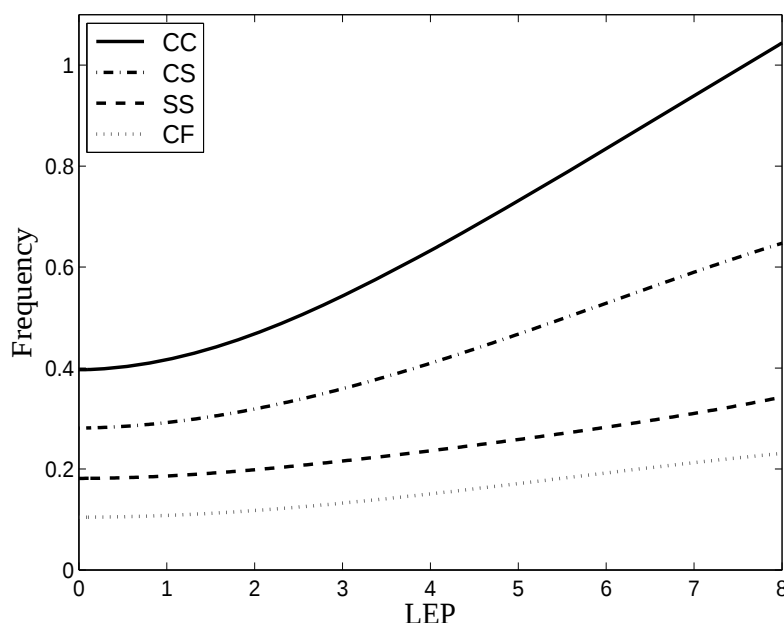


شکل ۲- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد میکروتیر با شرایط مرزی SS برحسب نسبت قطر به پارامتر مقیاس اندازه

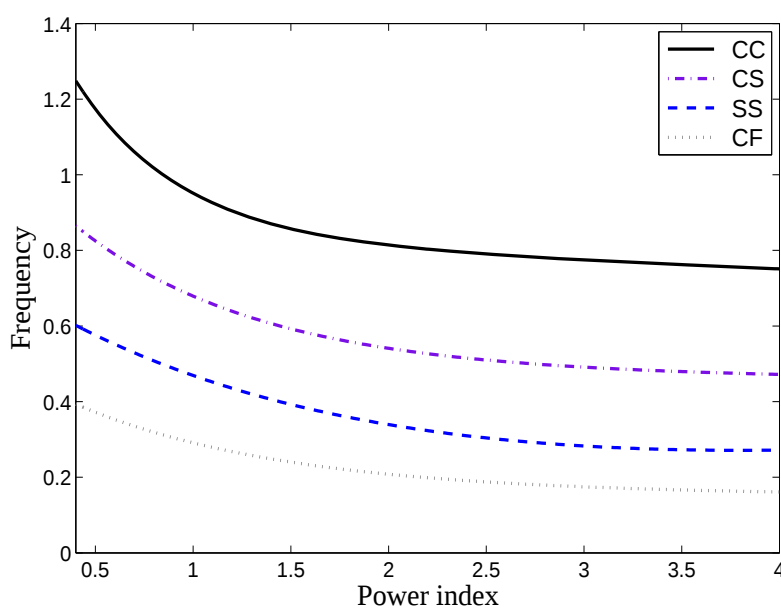
جدول ۴- فرکانس بی بعدشده مود اول میکروتیر تیموشنکو برحسب نسبت طول به قطر آن برای چهار شرط مرزی مختلف

| نسبت<br>$L/d$ | نوع شرط مرزی میکروتیر |       |       |       |
|---------------|-----------------------|-------|-------|-------|
|               | CC                    | CS    | SS    | CF    |
| ۵             | ۱/۳۱۱                 | ۰/۷۹۲ | ۰/۴۷۷ | ۰/۳۰۵ |
| ۱۰            | ۰/۷۵۱                 | ۰/۴۷۲ | ۰/۲۷۱ | ۰/۱۶۱ |
| ۱۵            | ۰/۵۲۴                 | ۰/۳۱۹ | ۰/۱۷۵ | ۰/۱۰۸ |
| ۲۰            | ۰/۳۸۴                 | ۰/۲۴۴ | ۰/۱۴۱ | ۰/۰۸۹ |
| ۲۵            | ۰/۲۹۷                 | ۰/۱۹۸ | ۰/۱۱۷ | ۰/۰۶۳ |
| ۳۰            | ۰/۲۶۲                 | ۰/۱۶۸ | ۰/۰۹۵ | ۰/۰۵۴ |
| ۳۵            | ۰/۲۲۷                 | ۰/۱۳۷ | ۰/۰۸۴ | ۰/۰۴۵ |
| ۴۰            | ۰/۲۰۹                 | ۰/۱۲۲ | ۰/۰۷۳ | ۰/۰۳۶ |

در نمودار شکل (۳)، منحنی تغییرات فرکانس بی بعد مود اول تیر برحسب پارامتر LEP در شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. این پارامتر مطابق رابطه  $l = LEP \times 17.6 \mu m$  متغیر است که  $d = 176 \mu m$  و  $\frac{L}{d} = 10$  است، ضخامت میکروتیر و اندیس ماده مدرج تابعی سازنده آن نیز برابر با مقادیر آورده شده در نتایج قبلی هستند.



شکل ۳- منحنی تغییرات فرکانس طبیعی مود پایه میکروتیر برحسب بزرگی پارامتر مقیاس طولی آن در شرایط مرزی مختلف

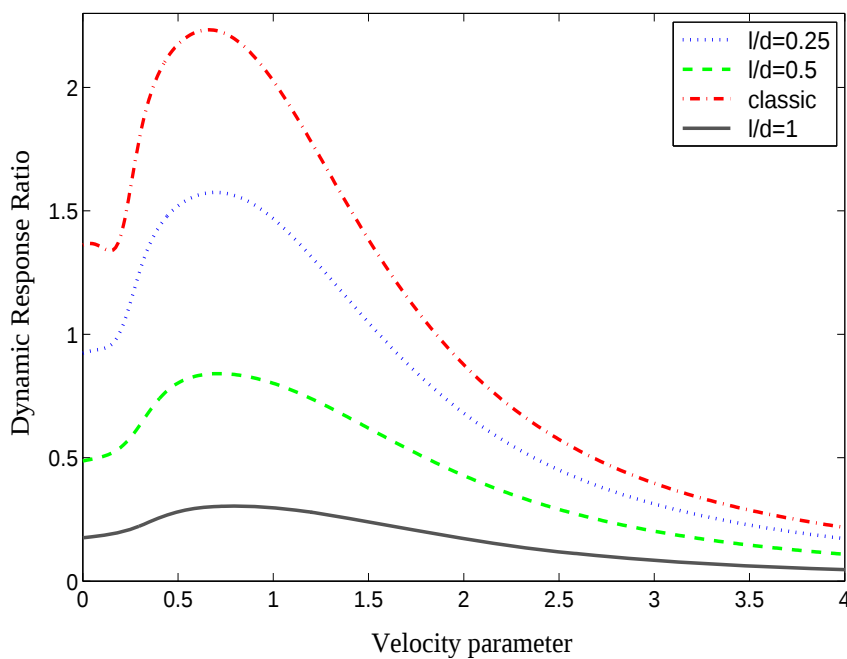


شکل ۴- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد مود پایه ارتعاش تیر مدرج تابعی برحسب پارامتر اندیس توانی در شرایط مرزی مختلف

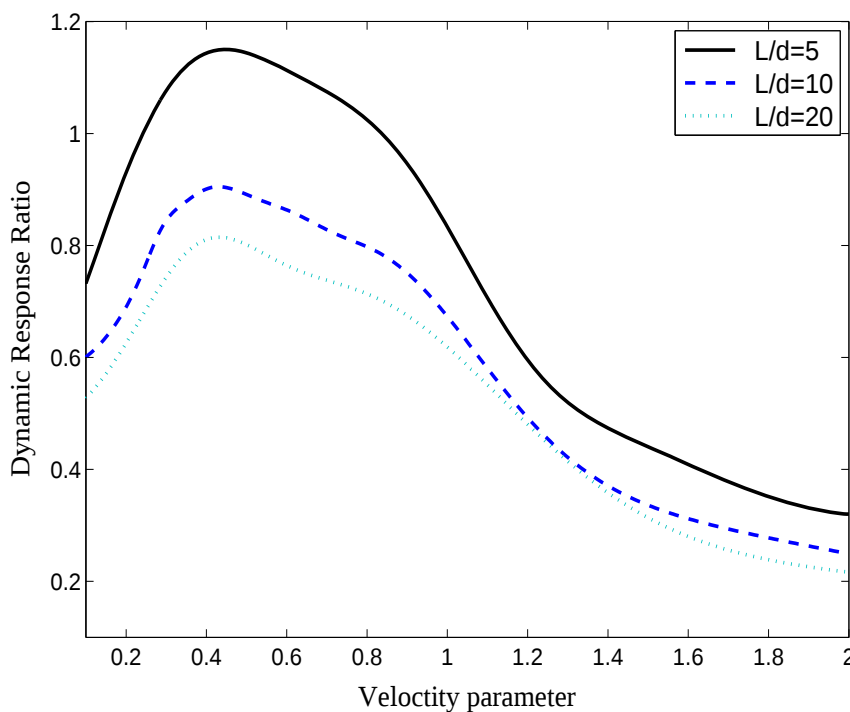
نکته مشترک تمام منحنی ها روند صعودی فرکانس طبیعی برای شرایط مرزی مختلف است. از طرفی بیشترین فرکانس مربوط به حالت دوسرگیردار CC، سپس CS، بعد از آن SS و کمترین آن مربوط به حالت یک سرگیردار CF است. علت این امر نیز سخت تر بودن شرط مرزی گیردار نسبت به ساده و بیشترین انعطاف و نرمی مربوط به شرط مرزی آزاد است. علاوه بر این مشخص است که با بزرگ تر شدن پارامتر مقیاس اندازه طولی میکرو تیر در ابعاد ثابت نیز، سازه صلب تر شده و فرکانس نیز افزایش یافته است. در شکل (۴)، تأثیر پارامتر اندیس بر تغییرات فرکانس بی بعد مود اول ارتعاش آزاد میکروتیر مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف نمایش داده شده است. مشخصات تیر در این بخش نیز  $d/l = 2$ ،  $d/th = 4$ ،  $L/d = 10$  هستند. با افزایش اندیس توانی ماده (افزایش کسر حجمی فاز فلزی)، تیر نرم تر شده و فرکانسش کاهش یافته است.

## ۵-۲- تشریح نتایج مربوط به پاسخ دینامیکی

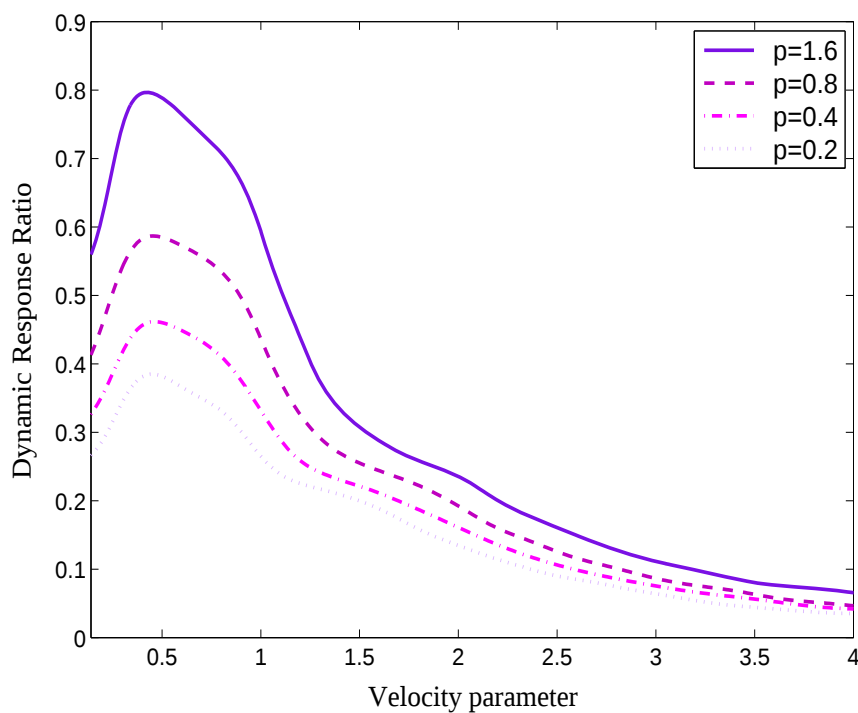
در شکل (۵)، نمودار نسبت پاسخ دینامیکی تیر با پارامترهای  $d/th = 4$ ،  $L/d = 10$  و  $p = 2$  بر حسب پارامتر سرعت جرم برای سه مقدار مختلف نسبت  $\frac{1}{d}$  در میکرو تیر SS ترسیم شده است. فرم کلی هر منحنی نمودار دارای یک قسمت اکیداً صعودی با شیب قابل توجه، سپس یک نقطه بیشینه نسبی و مطلق و نهایتاً یک قسمت اکیداً نزولی با شیب ملایم تر از قبل است. به عبارتی دیگر در یک ناحیه اولیه از محور افقی با افزایش سرعت جرم متحرک (چون با ثابت ماندن فرکانس نوسانات، پارامتر سرعت افزایش داشته است)، نسبت تغییر شکل دینامیکی افزایش می یابد، در یک پارامتر سرعت مشخص که سرعت بحرانی بی بعد نامیده می شود و متناظر با موقعیت افقی نقطه ای است که منحنی دارای اکسترمم نسبی است، این نسبت تغییر مکان دینامیکی به بیشینه خود می رسد و پس از آن وارد ناحیه ای می شود که افزایش پارامتر سرعت جرم منجر به کاهش پاسخ دینامیکی می شود. تغییر شکل دینامیکی محاسبه شده برای میکروتیر تیموشنکو در تئوری کلاسیک همواره بزرگتر از مقداری است که تئوری کوپل تنش پیش بینی کرده است. علاوه بر این برای تمام پارامترهای سرعت جرم، هر چه پارامتر  $l/d$  میکروتیر افزایش پیدا کند، تأثیر پارامتر مقیاس اندازه در افزایش سختی و کاهش انعطاف پذیری سازه بیشتر است. از طرفی سرعت بحرانی بی بعد برای همه نمودارها تقریباً مساوی و برابر  $0.68$  است، اما چون فرکانس تیر با افزایش پارامتر مقیاس اندازه بزرگتر می شود، در طول ثابت، سرعت بحرانی جرم با افزایش پارامتر مقیاس اندازه بزرگتر شده است. در شکل (۶)، تغییرات نسبت بیشینه تغییر شکل دینامیکی مرکز تیر CC میکروتیر تحت اثر جرم متحرک برای نسبت های مختلف  $L/d$  با احتساب  $d/l = 2$  ارائه شده است. هر چه نسبت  $L/d$  بزرگتر شود مقدار عددی نسبت پاسخ دینامیکی برای تمامی مقادیر پارامتر سرعت جرم متحرک کاهش می یابد. علاوه بر این سرعت بحرانی بی بعد هر سه منحنی تقریباً برابر است، اما چون فرکانس طبیعی با افزایش نسبت  $L/d$  به شدت کاهش پیدا می کند، سرعت بحرانی جرم متحرک برای نسبت  $L/d$  بزرگتر نیز عدد به مراتب کمتری خواهد بود. در شکل (۷)، منحنی تغییرات نسبت بیشینه پاسخ دینامیکی تیر CC بر حسب پارامتر سرعت متحرک برای مقادیر مختلف اندیس توانی ماده با نسبت  $d/l = 2$  ارائه شده است. افزایش اندیس توانی ماده مدرج تابعی باعث افزایش انعطاف پذیری تیر و بیشتر شدن نسبت پاسخ دینامیکی آن می شود؛ از طرفی چون پارامتر سرعت بحرانی برای همه منحنی ها تقریباً مقدار برابری است، کاهش فرکانس طبیعی تیر به دلیل افزایش اندیس توانی بیان گر کاهش بار بحرانی جرم متحرک نیز هست.



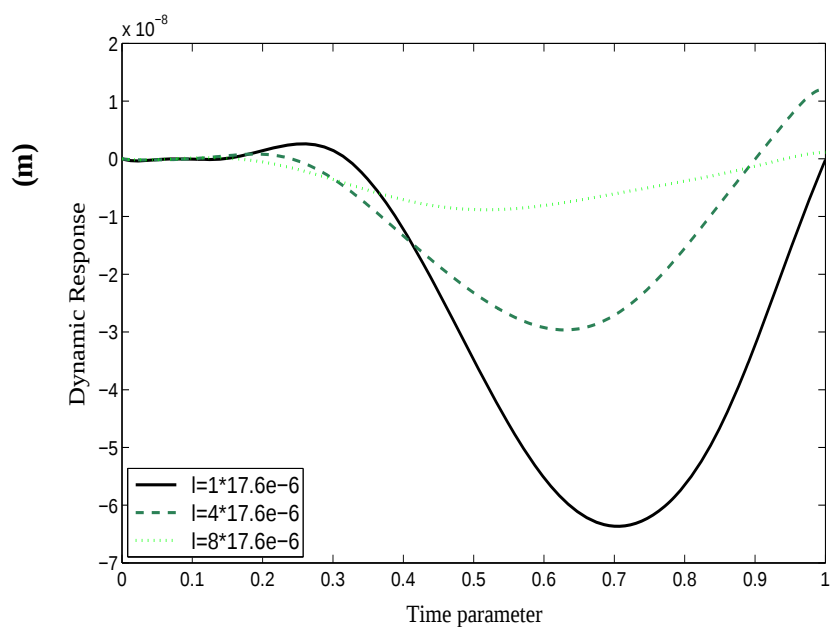
شکل ۵- مقایسه منحنی تغییرات نسبت پاسخ دینامیکی میکروتیر با شرط مرزی SS برحسب پارامتر سرعت جرم متحرک برای مقادیر مختلف نسبت پارامتر مقیاس اندازه به قطر آن



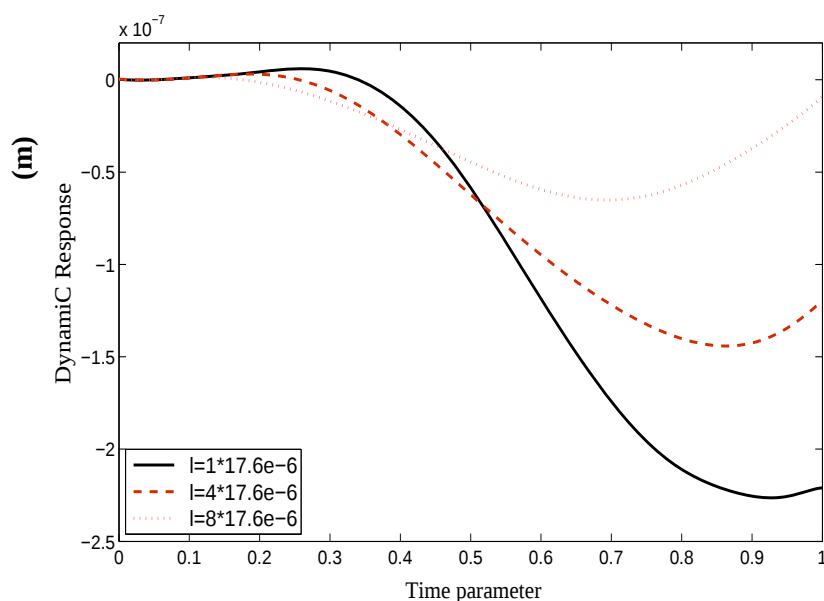
شکل ۶- مقایسه منحنی تغییرات نسبت پاسخ دینامیکی میکروتیر CC برحسب پارامتر سرعت جرم متحرک برای مقادیر مختلف نسبت طول به قطر میکروتیر



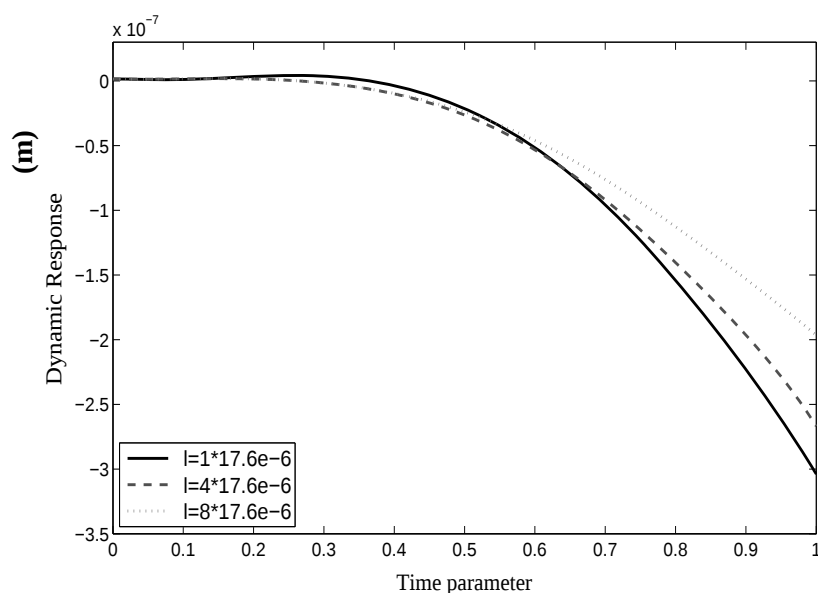
شکل ۷- مقایسه منحنی تغییرات نسبت پاسخ دینامیکی میکروتیر با شرایط مرزی دوسرگیدار برحسب پارامتر سرعت جرم متحرک برای مقادیر مختلف پارامتر اندیس توانی ماده



شکل ۸- پاسخ گذرای زمانی مرکز میکروتیر با شرط مرزی دوسرگیدار برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس اندازه آن



شکل ۹- پاسخ زمانی گذرای مرکز میکروتیر با شرط مرزی دوسر ساده برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس اندازه



شکل ۱۰- پاسخ زمانی گذرای مرکز میکروتیر با شرط مرزی یکسرگیردار و یکسر آزاد برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طولی

در ادامه بیشینه پاسخ زمانی میکروتیر برحسب پارامتر زمان بی بعد شده برای شروط مرزی مختلف در مقادیر مختلف مقیاس اندازه طولی میکروتیر با مشخصات  $d/th = 4$ ,  $L/d = 10$ ,  $p = 1$  و  $d/l = 2$  ترسیم شده است. در این بخش محور افقی بیانگر پارامتر زمان بی بعد شده است که برابر با مقدار  $\frac{v_f}{L} t$  است. در سه شکل قبلی، پاسخ دینامیکی مرکز میکروتیر در شرایط مرزی و برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس اندازه را بر حسب زمان بی بعد نشان داده است. همواره افزایش پارامتر طولی منجر به افزایش سختی شده و بیشینه تغییر شکل را کاهش داده است. با افزایش ۴ برابری پارامتر مقیاس، کاهش نسبی بیشینه تغییر شکل مرکز میکروتیر با شرط مرزی CC، SS و CF به ترتیب ۵۳٪، ۳۵٪ و ۱۶٪ بوده است. بیشترین و کمترین تغییر

شکل تیر به ترتیب برای شرایط مرزی CC و CF بوده است. همچنین هر چه شرایط مرزی تیر سختی و قیود حرکتی بیشتری داشته است، موقعیت مکانی جرم متحرک متناظر با بیشینه تغییر شکل از تکیه گاه سمت راست فاصله گرفته و به مرکز تیر نزدیکتر شده است. بجز شرط مرزی CF، افزایش پارامتر مقیاس اندازه میکروتیر، منجر شده است تا موقعیت مکانی متناظر با بیشینه تغییر مکان به سمت مرکز تیر میل کند.

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله پاسخ دینامیکی میکروتیر مدرج تابعی تحت اثر جرم متحرک با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفته است و تاثیر پارامترهای مختلفی از قبیل مقیاس طول میکروتیر، نسبت ضخامت به طول میکروتیر، شرایط مرزی، سرعت جرم متحرک و اندیس توانی بر نتایج بررسی شده است، مهمترین نتایج عبارتند از :

- نتایج حاصل از مدل تیر اویلر برنولی برای تغییر شکل دینامیکی همواره از نتایج این تحقیق که با تئوری تیر تیموشنکو انجام شده است کمتر است که دلیل آن صلبیت بیشتر تیر مدل اویلر برنولی است.
- با افزایش تدریجی نسبت  $L/d$ ، فرکانسهای طبیعی کاهش پیدا می کنند و نهایتاً برای نسبت های بزرگ  $L/d$ ، نتایج مدل تیموشنکو به نتایج مدل اویلر برنولی میل می کند. هر چه نسبت  $L/d$  بزرگتر شود از مقدار عددی نسبت بیشینه پاسخ دینامیکی به پاسخ استاتیکی کاهش می یابد. همچنین با افزایش پارامتر  $L/d$ ، سرعت بحرانی برای جرم متحرک کاهش می یابد.
- با افزایش پارامتر مقیاس اندازه طولی میکروتیر، سازه صلب تر فرض شده و فرکانس نیز افزایش می یابد.
- با افزایش نسبت  $d/l$  فرکانس همه مودها به سمت فرکانس تیر تیموشنکوی کلاسیک میل می کند.
- با افزایش اندیس توانی ماده مدرج تابعی، تیر نرم تر شده و فرکانس نیز بصورت غیر خطی کاهش یافته است. هرچه اندیس توانی بیشتر باشد، حساسیت فرکانس تیر به تغییر اندیس توانی کمتر می شود.
- تغییر شکل دینامیکی محاسبه شده برای میکروتیر در تئوری کلاسیک همواره بزرگتر از مقداری است که تئوری گرادیان کرنش پیش بینی می شود. علاوه بر مقدار پیش بینی شده برای سرعت بحرانی جرم متحرک در تئوری زوج تنش از تئوری کلاسیک همواره بزرگتر است.
- افزایش پارامتر مقیاس اندازه طولی میکروتیر منجر به افزایش سفتی تیر شده و بیشینه تغییر مکان آن را کاهش داده است. میزان این کاهش به شرایط مرزی و جنس میکروتیر بستگی دارد، بطوریکه هرچه شرایط مرزی و جنس ماده میکروتیر انعطاف پذیری کمتری داشته باشد، تأثیر پارامتر مقیاس طولی در کاهش پاسخ گذرا بیشتر است.

## مراجع

- [1] Mindlin, R. D., and Eshel, N. N., "On First Strain-gradient Theories in Linear Elasticity", International Journal of Solids and Structures, Vol. 4, No. 1, pp. 109-124, (1968).
- [2] Doyle, J. M., "A General Solution for Strain-gradient Elasticity Theory", Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 27, No. 1, pp. 171-180, (1969).

- [3] Mindlin, R. D., "Second Gradient of Strain and Surface-tension in Linear Elasticity", International Journal of Solids and Structures, Vol. 1, No. 4, pp. 417-438, (1965).
- [4] Mindlin, R. D., and Tiersten, H. F., "Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity", Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 11, No. 1, pp. 415-448, (1962).
- [5] Toupin, R. A., "Elastic Materials with Couple-stresses", Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 11, No. 1, pp. 385-414, (1962).
- [6] Toupin, R. A., "Theories of Elasticity with Couple-stress", Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 17, No. 2, pp. 85-112, (1964).
- [7] Park, S. K., and Gao, X. L., "Bernoulli-Euler Beam Model Based on a Modified Couple Stress Theory", Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol. 16, No. 11, pp. 2355-2359, (2006).
- [8] Kong, S., Zhou, S., Nie, Z., and Wang, K., "The Size-dependent Natural Frequency of Bernoulli-Euler Micro-beams", International Journal of Engineering Science, Vol. 46, No. 5, pp. 427-437, (2008).
- [9] Barlow, P., "Appendix C. Essay on the Effects Produced by Causing Weights to Travel Oyer Elastic Bars", Thomas Telford Limited, (2015).
- [10] Stokes, S. G. G., "*Discussion of a Differential Equation Relating to the Breaking of Railway Bridges*", Printed at the Pitt Press by John W. Parker, London, England, (1849).
- [11] Jafari, A. A., and Fathabadi, M., "Forced Vibration of FGM Timoshenko Beam with Piezoelectric Layers Carrying Moving Load", Journal of Aerospace Engineering, Vol. 9, No. 2, pp. 69-77, (2013).
- [12] Pirmoradian, M., Keshmiri, M., and Karimpour, H., "On the Parametric Excitation of a Timoshenko Beam due to Intermittent Passage of Moving Masses: Instability and Resonance Analysis", Acta Mechanica Sinica, Vol. 226, No. 4, pp. 1241-1253, (2015).
- [13] Bakhshi, A. M., and Ariaei, A. R., "Vibration Analysis of a Multi-span Timoshenko Beam with Flexible Constraints Subjected to a Two Degrees-of-freedom Moving System", Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 14, (2015).
- [14] Pourshahsavari, H., Ghorbani, E., and Keshmiri, M., "Modal Analysis of a Beam Mass System using Time Varying Modal Analysis Methods", Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No. 8, (2013).

[۱۵] اسماعیل زاده، سیدکمیل، ربیعی لاکمه سری، مهدی، و محمدپورنیک بین، ایمان، "تحلیل دینامیکی تیر تیموشنکو تحت اثر جرم متحرک با استفاده از روش بسط چند جمله ای های متعامد"، کنفرانس بین المللی مهندسی عمران، تهران، دبیرخانه دائمی کنفرانس، (۱۳۹۵).

[۱۶] کارگرنوین، محمدحسین، رضوانی، محمدجواد و یونسین، داود، "تحلیل دینامیکی تیر تیموشنکو از جنس ماده مرکب، روی بستر ویسکوالاستیک تحت تاثیر بار متحرک نوسانی"، هفدهمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک، تهران، دانشکده فنی دانشگاه تهران، (۱۳۸۸).

- [17] Kargarnovin, M. H., Ahmadian, M. T., Jafari-Talookolaei, R. A., and Abedi, M., "Semi-analytical Solution for the Free Vibration Analysis of Generally Laminated Composite Timoshenko Beams with Single Delamination", *Composits. Part B: Engineering*, Vol. 45, No. 1, pp. 587-600, (2013).
- [18] Jafari-Talookolaei, R. A., Abedi, M., Kargarnovin, M. H., and Ahmadian, M. T., "An Analytical Approach for the Free Vibration Analysis of Generally Laminated Composite Beams with Shear Effect and Rotary Inertia", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 65, No. 1, pp. 97-104, (2012).
- [19] Jafari-Talookolaei, R. A., "Analytical Solution for Vibration of a Rotating Delaminated Composite Beam with End Mass", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 16, No. 6, pp. 1550013, (2016).
- [20] Singh, S. S., Nair, D. K., Rajagopal, A., Pal, P., and Pandey, A. K., "Dynamic Analysis of Microbeams Based on Modified Strain Gradient Theory using Differential Quadrature Method", *European Journal of Computational Mechanics*, Vol. 27, No. 3, pp. 187-203, (2018).
- [21] Ghayesh, M.H., "Dynamics of Functionally Graded Viscoelastic Microbeams", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 124, pp. 115-131, (2018).
- [22] Fang, J., Gu, J., and Wang, H., "Size-dependent Three-dimensional Free Vibration of Rotating Functionally Graded Microbeams Based on a Modified Couple Stress Theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 136, pp. 188-199, (2018).
- [23] Wu, Q., Chen, H., and Gao, W., "Nonlocal Strain Gradient Forced Vibrations of FG-GPLRC Nanocomposite Microbeams", *Engineering with Computers*, Vol. 36 pp. 1739-1750, (2020).
- [24] Sheng, G. G., and Wang, X., "Nonlinear Forced Vibration of Size-dependent Functionally Graded Microbeams with Damping Effects", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 71, pp. 421-437, (2019).
- [25] Arefi, M., Pourjamshidian, M., and Ghorbanpour Arani, A., "Nonlinear Free and Forced Vibration Analysis of Embedded Functionally Graded Sandwich Micro Beam with Moving Mass", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 20, No. 4, pp. 462-492, (2018).
- [26] Yang, F., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C., and Tong, P., "Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, (2002).
- [27] Simsek, M., "Dynamic Analysis of an Embedded Microbeam Carrying a Moving Microparticle Based on the Modified Couple Stress Theory", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 12, pp. 1721-1732, (2010).
- [28] Ma, H. M., Gao, X. L., and Reddy, J. N., "A Microstructure-dependent Timoshenko Beam Model Based on a Modified Couple Stress Theory", *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, Vol. 56, No. 12, pp. 3379-3391, (2008).

- [29] Shen, H. S., "Assessment of Voigt and Mori–Tanaka Models for Vibration Analysis of Functionally Graded Plates", *Composite Structures*, Vol. 94, No. 7, pp. 2197-2208, (2012).
- [30] Meirovitch, L., "*Fundamentals of Vibrations*", Waveland Press, Long Grove, USA, (2010).
- [31] Kocatürk, T., and Simsek, M., "Free Vibration Analysis of Timoshenko Beams under Various Boundary Conditions", *Journal of Engineering and Natural Sciences*, Vol. 1, pp. 30-44, (2005).
- [32] Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T., and Mazurek, D. F., "*Mechanics of Materials*", McGraw-Hill, New York, USA, (1992).
- [33] Birman, V., and Bert, C. W., "On the Choice of Shear Correction Factor in Sandwich Structures", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 4, No. 1, pp. 83-95, (2002).

### فهرست نمادهای انگلیسی

|                                |             |
|--------------------------------|-------------|
| اندیس توانی ماده مدرج          | $p$         |
| میزان انحراف در تانسور زوج تنش | $m_{ij}$    |
| تانسور انحنای متقارن           | $X_{ij}$    |
| مؤلفه‌های بردار جابجائی        | $u_i$       |
| مؤلفه طولی مختصات              | $\hat{x}$   |
| مؤلفه طولی بی بعد              | $x$         |
| تغییر شکل عرضی تیر (m)         | $w$         |
| زاویه چرخش سطح مقطع تیر        | $\psi$      |
| عرض تیر (m)                    | $b$         |
| پارامتر مقیاس اندازه میکرو تیر | $l$         |
| مدول الاستیک (GPa)             | $E$         |
| ضخامت تیر (m)                  | $t_b$       |
| طول تیر (m)                    | $L$         |
| قطر تیر (m)                    | $d$         |
| چند جمله‌ای لژاندر مرتبه m     | $P_m$       |
| سرعت جرم متحرک (m/s)           | $v$         |
| مؤلفه‌های بردار دوران          | $\theta_i$  |
| مدول برشی                      | $\mu$       |
| شکل مود ارتعاشی                | $\varphi_i$ |
| فرکانس ارتعاش                  | $\omega$    |

## Abstract

In this paper, numerical solution procedures are proposed for dynamic response of a functionally graded (FG) micro beam under action of a moving micro mass based on the modified couple stress theory (MCST) within the framework of Timoshenko beam theory for various boundary conditions. The governing equation and the related boundary conditions are derived by using Hamilton's principle. Then the proposed solution for obtaining the natural frequencies and mode shapes of free vibration are presented by expressing the micro beam displacement fields in terms of the series of Legendre polynomials to find the numerical solution regardless of boundary conditions. Likewise, the computed eigenvalue of the system is developed in the modal expansion method to obtain the dynamic response. For validation purposes, the free vibration frequencies of the micro beam and the dynamic responses using the Timoshenko beam theory are compared with previously published studies and very good agreements have been observed. Furthermore, more numerical results for natural frequencies and dynamic deflection of the beam are presented and the effects of some parameters, such as material length scale parameter, thickness to length ratio of micro beam, boundary condition, the velocity of the moving load and the FG material power index are examined.