نشریه مهندسی مکانیک
انجمن مهندسان مکانیک ایران
مقاله علمی پژوهشی
DOI: 10.30506/ijmep.2020.97422.1486

تحلیل ناپایداری دینامیکی تیر ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر بر روی بستر الاستیک

غلامرضا عسگری[1]
دانشجوی دکترا

غلامحسن پایگانه[2]
دانشیار

کرامت ملک‌زاده[3]
استاد

در این پژوهش، اثرات بار محوری نوسانی و بستر الاستیک بر روی ناپایداری دینامیکی تیر ساندویچی سه لایه مطالعه شده است. تیر ساندویچی از دورویه و یک هسته تشکیل شده است. با استفاده از تئوری مرتبه بالای تیرهای ساندویچی، معادلات حاکم بر تیر ساندویچی استخراج گردید. نواحی ناپایداری دینامیکی با استفاده از روش بالوتین با شرایط تکیه‌گاهی ساده استخراج شده است. نتایج روش حاضر با نتایج سایر مراجع مقایسه شده‌اند. مقایسه نتایج تحلیلی با شبیه‌سازی تطابق مناسبی را نشان دادند. در پایان اثر پارامترهای مختلف بر ناپایداری دینامیکی، فرکانس طبیعی و فرکانس تحریک بررسی شده است. با افزایش ضریب الاستیک بستر، فرکانس‌های طبیعی و تحریک افزایش و ناپایداری تیر کاهش یافته است.

واژه‌های راهنما: ناپایداری دینامیکی، اصل همیلتون، روش بالوتین، معادله متیو، بستر الاستیک.

۱- مقدمه

امروزه استفاده از سازه‌های سبک و مقاوم که دارای نسبت سفتی به وزن و استحکام به وزن بالایی هستند، در مصارف مهندسی بسیار رایج و متداول شده است. از جمله کاربردهای این نوع سازه‌ها می‌توان به بدنه اجسام پرنده مانند هواپیماها، موشک‌ها و فضاپیماها، بدنه کشتی‌ها، قطارها و خودروها، سقف‌ها، دیواره‌ها، تیرهای ساختمانی، ستون‌ها و پل‌ها و مصارف عمده دیگر نام برد. یک سازه ساندویچی اعم از تیر یا ورق، متشکل از دورویه (Skin) نازک و مستحکم است که یک هسته (Core) نرم، انعطاف‌پذیر و نسبتاً ضخیم را در برگرفته‌اند. در سال‌های اخیر مطالعات متعددی جهت استخراج معادلات حرکت و میدان جابجایی با استفاده از روش‌های مختلف انجام‌شده است. Frostig [۱] در سال (۱۹۹۸) کمانش پنل ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر عرضی را با در نظر گرفتن اثرات مرتبه بالا بررسی نمود. در این تحلیل معادلات حاکمِ خطی و غیرخطی به همراه شرایط مرزی مسئله استخراج گردیده و با استفاده از یک تئوری مرتبه بالا تغییرات غیرخطی هسته در راستای ضخامت سازه به‌دست آمده است.

---

[1] دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران ghreza.asgari@gmail.com
[2] نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران g.payganeh@sru.ac.ir
[3] استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران kmalekzadeh@mut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۸/۲۰، تاریخ پذیرش: ۹۸/۰۴/۲۳

Frostig وThomsen [۲] در سال (۲۰۰۴) ارتعاشات آزاد پنل ساندویچی را با بهره‌گیری از تئوری مرتبه بالا مورد بررسی قراردادند. در این مدل مؤلفه‌های جابجایی صفحه‌ای و عمودی هسته غیرخطی فرض گردیده، از تئوری کلاسیک صفحه برای رویه‌ها و ازحل الاستیسیته سه‌بعدی برای هسته استفاده شده است. تئوری ارائه گردیده برای انواع بارگذاری‌ها شامل متمرکز و گسترده کارایی داشته، همچنین توانایی فرض شرایط مرزی متفاوت در رویه‌های بالا و پایین را دارا است. Malekzadeh و همکاران [۳] در سال (۲۰۰۵) یک تئوری مرتبه بالای بهبودیافته برای تحلیل رفتار دینامیکی صفحه ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر ارائه کردند. در این روش از تئوری مرتبه اول برشی در رویه‌ها و از حل الاستیسیته در هسته استفاده گردید. به‌این‌ترتیب میدان جابجایی غیرخطی هسته و تغییرات ایجاد شده در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است.
نتایج حاصله شامل فرکانس‌های طبیعی، ضرایب استهلاک و مدهای ارتعاشی موضعی و کلی است که برخی از این نتایج به‌وسیله تئوری مرتبه بالای سازه‌های ساندویچی قابل‌دستیابی نبوده است. در تئوری ارائه گردیده، برش عرضی و اینرسی چرخشی رویه‌ها در نظر گرفته‌شده و مسئله برای شرایط مرزی ساده و به‌وسیله روش ناویر حل گردیده است. Rahmani و همکاران [۴] در سال (۲۰۰۹) ارتعاشات آزاد سازه‌های ساندویچی با یک هسته FG را تحلیل کردند. آن‌ها با استفاده از تئوری مرتبه بالا به تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای ساندویچی با هسته فوم ترکیبی مثل هسته انعطاف‌پذیر FG پرداختند. برای رویه‌ها از تئوری کلاسیک و برای هسته FG از تئوری الاستیسیته استفاده می‌شود. Malekzadeh [۵] در سال (۲۰۱۴) ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی خمیده با یک هسته FG را بررسی کرد. در این تحلیل فرمول‌بندی فرم بسته دو بعدی تئوری مرتبه بالای بهبودیافته (RHOBT) بدون در نظر گرفتن مقدار Z/R استخراج و استفاده شد. تأثیر برخی پارامترهای بدون بعد بر روی پاسخ سازه‌ای بررسی شد تا اثرات آن‌ها بر روی فرکانس طبیعی اصلی تیر خمیده نشان داده شود. Khdeir و Aldraihem [۶] در سال (۲۰۱۶)، ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی با هسته نرم را با استفاده از تئوری زیگزاگ بررسی کردند. پس از استخراج فرکانس‌های طبیعی برای شرایط مرزی و هندسی مختلف تیر، نتایج را با نتایج تجربی مقایسه کردند. Burney و Jaeger [۷] در سال (۱۹۷۱) یک روش عددی برای تعیین نواحی ناپایداری دینامیکی یک ستون با شرایط مرزی مختلف را ارائه کردند. Iwatsubo و همکاران [۸] در سال (۱۹۷۲) ارتعاشات پایدار و ناپایدار ستون‌های تحت بارگذاری متناوب را مورد بررسی قراردادند. Iwatsubo و همکاران [۹] در سال (۱۹۷۳) ناپایداری پارامتریک ستون‌های دوسر گیردار و گیردار-ساده را تحت بارگذاری متناوب محوری بررسی کردند. Iwatsubo و همکاران [۱۰] در سال (۱۹۷۴) رزونانس‌های ساده و مرکب ستون‌ها را تحت نیروهای محوری متناوب بررسی کردند. Kar و Sujata [۱۱] در سال (۱۹۹۱) پایداری یک تیر ساندویچی متقارن مخروطی تحت یک نیروی محوری ضربه‌ای را بررسی کردند. درنهایت اثر پارامتر برشی، ضخامت و چگالی هسته بر روی نیروهای کمانش استاتیکی و نواحی رزونانس پارامتریک مورد بررسی قرار گرفت. Ray و Kar [۱۲] در سال (۱۹۹۵)، ناپایداری پارامتریک یک تیر ساندویچی تحت شرایط مرزی مختلف را بررسی کردند. ناپایداری پارامتریک یک تیر ساندویچی متقارن سه لایه تحت نیروی محوری نوسانی با ۹ شرط مرزی مختلف ملاحظه شده است. اثر نیروی استاتیک و ضخامت هسته روی ضریب اتلاف هسته بررسی شده است. اثر پارامتر برشی روی نیروهای کمانش استاتیکی همچنین بررسی شده‌اند. علاوه بر این اثر پارامتر برشی، پارامتر ضخامت هسته و ضریب اتلاف

هسته بر روی نواحی پارامتریک مطالعه شده است. Ray و Kar [۱۳] در سال (۱۹۹۶) ناپایداری پارامتریک یک تیر ساندویچی سه لایه متقارن با هسته ویسکو الاستیک تحت یک نیروی ضربه‌ای محوری در انتهای تیر را بررسی کردند. اثر پارامتر برشی بر روی نیروی کمانش استاتیکی و همچنین اثر پارامترهایی چون ضخامت هسته، نیروی استاتیک، ضریب اتلاف هسته، بر روی نواحی ناپایداری پارامتریک بررسی‌شده‌اند. Dwivedy و همکاران [۱۴] در سال (۲۰۰۷) به مطالعه و بررسی ناپایداری پارامتریک یک تیر ساندویچی سه لایه متقارن با هسته نرم و تحت یک نیروی محوری نوسانی پرداختند. به علت هسته نرم، جابجایی‌های بالا و پایین رویه‌ها متفاوت هستند و به‌جای استفاده از تئوری کلاسیک از تئوری مرتبه بالاتر استفاده شده است.

با استفاده از اصل همیلتون و تئوری تیر برای رویه‌ها و یک تئوری دوبعدی برای هسته، معادلات حاکم حرکت و شرایط مرزی استخراج شده است. یک روش گلرکین تعمیم‌یافته برای استخراج معادلات حرکت به یک مجموعه از معادلات بی‌بعد متیو-هیل با ضرایب مختلط استفاده‌شده است. نواحی ناپایداری پارامتریک برای تشدیدهای مرکب و ساده برای شرایط مرزی مختلف توسط HSU بررسی شده‌اند. تأثیر پارامتر برشی، ضریب اتلاف هسته و نسبت ضخامت هسته به ضخامت رویه بر روی نواحی ناپایداری مطالعه شده است. Dwivedy و همکاران [۱۵] در سال (۲۰۰۹) به مطالعه نواحی ناپایداری پارامتریک یک تیر ساندویچی متقارن سه لایه با پوسته‌های رسانا تحت نیروی محوری نوسانی پرداختند. در لایه هسته یک وصله MRE بین دو وصله ویسکوالاستیک نرم قرارگرفته است. معادلات حرکت حاکم سیستم استخراج شد و نواحی ناپایداری پارامتریک برای تشدیدهای ساده و مرکب با در نظرگرفتن شرایط مرزی مختلف توسط روش HSU بررسی‌شده است. نواحی ناپایداری سیستم همراه و بدون وصله MRE با میدان‌های مغناطیسی مختلف و نفوذپذیری مواد پوسته مطالعه شده است. Dwivedy و همکاران [۱۶] در سال (۲۰۱۱) ناپایداری دینامیکی تیر ساندویچی با هسته نرم MRE و رویه‌های عایق را بررسی کردند. آن‌ها معادلات حرکت حاکم با ضرایب پیچیده را برای تیر ساندویچی نامتقارن سه لایه با رویه‌های عایق و هسته ویسکوالاستیک نرم MRE تحت نیروهای محوری نوسانی با استفاده از تئوری تیر مرتبه بالا استخراج کردند. همچنین از اصل همیلتون و روش گلرکین نیز استفاده کردند. نواحی ناپایداری پارامتریک را برای تشدیدهای پارامتریک مرکب و اصلی برای سه مود اول و همچنین در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف با مدول های برشی متفاوت، ضرایب اتلاف هسته، تعداد وصله‌های MRE و ضخامت‌های مختلف رویه تعیین کردند.

Song و همکاران [۱۷] در سال (۲۰۱۲) ارتعاشات پایدار و ناپایدار تیرهای تحت نیروهای محوری متناوب را مورد بررسی قراردادند. Huang و همکاران [۱۸] در سال (۲۰۱۴) پایداری دینامیکی تیرهای اویلر تحت اثر نیروی ناپایدار محوری باد را با استفاده از روش متیو-هیل بررسی کردند. Sahoo و همکاران [۱۹] در سال (۲۰۱۴) پایداری دینامیکی یک تیر ساندویچی با هسته ترکیبی ویسکوالاستیک و MRE را تحت بارگذاری محوری دینامیکی مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. برای به دست آوردن معادلات حرکتی که شبیه به معادله متیو است، از روش المان محدود استفاده شده است. نواحی ناپایداری دینامیکی توسط روش تعادل هارمونیک تعیین شده‌اند. درنهایت اثر پارامترهای مختلف مانند میدان مغناطیسی اعمالی و موقعیت وصله MRE بر روی پایداری تیر ساندویچی توسط آن‌ها بررسی شده است. Smyczynski و همکاران [۲۰] در سال (۲۰۱۵) پایداری یک تیر ساندویچی پنج لایه را تحلیل کردند.

هدف، استخراج مدل ریاضی این تیر و کنترل تأثیر چسبندگی لایه‌ها بر روی پایداری این سازه است. تیر ساندویچی با تکیه‌گاه ساده شامل پنج لایه که دورویه آن فلزی، هسته فوم فلزی و دولایه چسب بین رویه‌ها و هسته است. خواص مکانیکی در راستای ضخامت تیر تغییر می‌کند و به جنس ماده هر لایه بستگی دارد. میدان جابجایی برای مقطع مسطح تیر تعریف شده است. بر پایه اصل همیلتون سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی به دست آمد. Sahoo و Singh [۲۱] در سال (۲۰۱۵) ناپایداری دینامیکی کامپوزیت لمینیت و ورق ساندویچی را با استفاده از تئوری زیگزاگ بررسی کردند. آن‌ها پیوستگی تنش برشی عرضی در مرز بین لایه‌ها را در نظر گرفته و با استفاده از روش بالوتین مرزهای ناپایداری را تعیین کردند. Dash و همکاران [۲۲] در سال (۲۰۱۶) ناپایداری دینامیکی یک تیر ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک را تحت یک نیروی محوری نوسانی و یک گرادیان دمایی پایدار، بررسی کردند. معادلات حرکت به‌وسیله اصل همیلتون استخراج و روش گلرکین برای کاهش معادلات حرکت به مجموعه‌ای از معادلات هیل (Hill) با ضرایب مختلط استفاده شده است. آن‌ها اثر پارامتر برشی، ضریب اتلاف هسته و گرادیان دما بر روی نواحی ناپایداری دینامیکی را بررسی کردند. kumar و همکاران [۲۳] در سال (۲۰۱۶) به بررسی و تحلیل تیر ساندویچی با مواد FG برای پایداری دینامیکی و ارتعاشات آزاد پرداختند. آن‌ها بر روی تیر ساندویچی در شرایط محیط حرارتی بالا تمرکز کردند. هدف آن‌ها یافتن پایداری دینامیکی و ارتعاشات آزاد برای تیر ساندویچی است. در این تحقیق لایه بالایی از ماده FG و لایه میانی از فولاد ضدزنگ استفاده شده است. این تیر تحت شرایط نیرویی دینامیکی محوری است و یک‌رویه در دمای بالا و رویه دیگر تیر در دمای معمولی (اتاق) قرار دارد. تغییرات دما در تیر هم خطی و هم غیرخطی است.

Ahuja و Duffield [۲۴] در سال (۱۹۷۵) ناپایداری پارامتریک و رزونانس پارامتریک پایدار یک تیر با مقطع متغیر بر روی یک بستر الاستیک را به‌صورت تئوری و تجربی بررسی کردند. نتایج تجربی و تئوری نشان داد که فاکتور شیب یک تیر با مقطع متغیر خطی اثر قطعی بر روی مرزهای ناحیه ناپایداری اصلی دارد.

Doyle و همکاران [۲۵] در سال (۱۹۸۲) پاسخ طبیعی یک تیر که بخشی از آن بر روی یک بستر الاستیک قرار دارد مطالعه کردند. تیر مورد مطالعه دارای شرایط مرزی ساده و آزاد در دو انتها است. اختلاف توابع شکل و فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده باحالتی که تیر کاملاً بر روی بستر الاستیک قرارگرفته است مقایسه شده است. Eisenberger و همکاران [۲۶] در سال (۱۹۸۶)، ماتریس‌های سفتی هندسی و سفتی دقیق را برای تیرهایی که بر روی بستر الاستیک قرار دارند، استخراج کردند. با استفاده از این ماتریس‌ها، یافتن نیروهای کمانش و مود شیپ ها برای تیرهایی که به‌صورت کامل و پاره‌ای بر روی بستر الاستیک قرار دارند، امکان‌پذیر است. Yokoyama[۲۷] در سال (۱۹۸۸) ناپایداری پارامتریک تیر تیموشنکو که بر روی یک بستر الاستیک نوع وینکلر قرار گرفته است را تحلیل کرد. اثر بستر الاستیک بر روی فرکانس‌های طبیعی، نیروهای کمانش استاتیکی و نواحی ناپایداری دینامیکی تیر تیموشنکو با شرایط تکیه‌گاهی مختلف بررسی شده است. پارامترهای فرکانس طبیعی و نیروی کمانش برای تیر اویلر- برنولی که حالت خاصی از مدل حاضر است انطباق خیلی خوبی با نتایج موجود دارد. نواحی ناپایداری دینامیکی برای هر دو نوع تیر با مقادیر مختلف ثابت بستر الاستیک ارائه شده است.

Omidi و همکاران [۲۸] در سال (۲۰۰۹) پایداری دینامیکی تیر FG با لایه‌های پیزو الکتریک تحت نیروی فشاری محوری نوسانی که بر روی یک بستر الاستیک پیوسته قرار دارد را مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. با اعمال اصل همیلتون، معادلات حرکت دینامیکی به دست آمد. اثر کسر حجمی، ولتاژ اعمال‌شده، ضریب بستر و ضخامت پیزو الکتریک بر روی نواحی ناپایداری دینامیکی بررسی شد. Pradhan و Murmu [۲۹] در سال (۲۰۰۹) به تحلیل ارتعاشی و ترمومکانیکی تیرهای FG و ساندویچی FG بر روی بستر الاستیک وینکلر پرداختند. Tornabene و همکاران [۳۰] به تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق ها و پوسته های کامپوزیتی دو انحنایی بر روی بستر الاستیک وینکر-پاسترناک پرداختند. Pourasghar و Chen [۳۱] ارتعاشات آزاد یک ورق استوانه ای تقویت شده با نانو لوله کربنی بر روی بستر الاستیک در محیط حرارتی را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی بررسی کردند. آن ها از بستر الاستیک نوع وینکلر-پاسترناک استفاده کردند. Moradi-Dastjerdi و Momeni-Khabisi [۳۲] ارتعاشات آزاد و اجباری ورق های ساندویچی را با هسته همگن و رویه کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی مطالعه کردند. ورق های ساندویچی بر روی بستر الاستیک پاسترناک و تحت نیروهای نوسانی قرار داشتند.

Akour [۳۳] در سال (۲۰۱۰) تیر غیرخطی با تکیه‌گاه ساده بر روی بستر الاستیک خطی و تحت بارگذاری هارمونیک را تحلیل کرد. اصل همیلتون برای استخراج معادلات حاکم استفاده شده است. سه پارامتر اصلی که شامل ضریب میرایی، فرکانس طبیعی و ضریب جمله غیرخطی بررسی شده‌اند. ضمناً نواحی پایداری نیز مشخص‌شده‌اند. Mohanty و همکاران [۳۴] در سال (۲۰۱۱) پایداری دینامیکی تیر FGM تیموشنکو بر روی بستر الاستیک وینکلر را با استفاده از روش المان محدود بررسی کردند. آن‌ها نتیجه گرفتند که بستر الاستیک پایداری تیر را در سه مود اول افزایش می‌دهد.

Bose و همکاران [۳۵] در سال (۲۰۱۲)، اثر بستر الاستیک و میرایی بر روی ناپایداری دینامیکی تیرها را موردبررسی قراردادند. برای بررسی ناپایداری تیر از روش FEM استفاده‌شده است. درنهایت نتیجه گرفتند که بستر الاستیک و در نظر گرفتن میرایی تیر پایداری آن را بالا می‌برد. Arefi [۳۶] در سال (۲۰۱۴) پاسخ غیرخطی یک تیر FG واقع بر روی بستر الاستیک را تحلیل کرد. پس از استخراج معادله دیفرانسیل غیرخطی با استفاده از تئوری تیر، یک روش نیمه‌تحلیلی برای مطالعه پاسخ مسئله استفاده شده است. پاسخ‌ها برای تیرهای FG و ایزوتروپیک خطی و غیرخطی به‌صورت جداگانه بررسی شده‌اند. تیرها با انتهای ساده و بسترهای خطی و غیرخطی در این تحقیق بررسی شده‌اند. Pradhan و Dash [۳۷] در سال (۲۰۱۶) پایداری پارامتریک و استاتیکی یک تیر ساندویچی مخروطی متقارن بر روی یک بستر متغیر پسترناک تحت یک نیروی محوری ضربه‌ای با گرادیان دمایی را بررسی کردند. معادله حرکت و شرایط مرزی به‌دست‌آمده از معادله همیلتون بدون بعد هستند. معادله هیل از معادلات بی‌بعد حرکت با استفاده از روش گلرکین تعمیم یافته به‌دست آمده است. اثر مخروط، بستر الاستیک، گرادیان دمایی، ضریب اتلاف هسته، پارامتر هندسی، نسبت مدول و پارامتر برشی بر روی نیروهای کمانش و نواحی پارامتریک ناپایداری بررسی شده است. Pradhan و همکاران [۳۸] در سال (۲۰۱۶) ارتعاشات آزاد یک تیر ساندویچی متقارن سه لایه قرار گرفته بر روی بستر متغیر پسترناک که تحت نیروی محوری ضربه‌ای قرار گرفته است را تحلیل کردند.

Sirati و همکاران [۳۹] در سال (۲۰۱۶) به تحلیل تیرهای ساندویچی با هسته FGM که بر روی بستر وینکلر قرار دارند، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه دوم تیر پرداختند. معادلات حاکم و شرایط مرزی مرتبط با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل استخراج شده است. حل نویر برای شرایط مرزی ساده استفاده‌شده است و روابط دقیق برای تحلیل استاتیک پیشنهادشده است. Tossapanon و همکاران [۴۰] در سال (۲۰۱۶) برای حل مسائل کمانش و ارتعاشات تیرهای ساندویچی FG بر روی بستر الاستیک شامل وینکلر و فنرهای لایه برشی، از روش کالوکیشن چبیشف استفاده کردند. فرض شده است که رویه‌های تیر ساندویچی از FGM ساخته شده با فازهای سرامیک و فلز و هسته تیر از ماده همگن ساخته شده است. تئوری تیر تیموشنکو برای استخراج معادلات حاکم حرکت استفاده شده است. تیر با شرایط مرزی مختلف برای یافتن بارگذاری‌های بحرانی و فرکانس‌های طبیعی در نظر گرفته شده است.

در این پژوهش، از تئوری مرتبه بالای HSAPT و اصل همیلتون برای استخراج معادلات حرکت تیر ساندویچی با هسته نرم استفاده‌شده است. در این تئوری، رویه‌ها با استفاده از تئوری کلاسیک (CLPT) و هسته با استفاده از میدان جابجایی با جملات مرتبه دو مبتنی بر مدل دوم Frostig [۲]، تحلیل شده‌اند و با استفاده از روش گلرکین و معادلات متیو[1]، نواحی ناپایداری دینامیکی بر اساس روش Bolotin [۴۱] به‌دست آمده است. شرط سازگاری در مرزهای بین رویه‌ها و هسته نیز ارضا شده است. هدف این پژوهش بررسی و مطالعه ناپایداری دینامیکی تیر ساندویچی متقارن با هسته انعطاف‌پذیر و شرایط تکیه‌گاهی ساده بر روی بستر الاستیک تحت بار محوری نوسانی است. اثرات بستر الاستیک بر روی فرکانس طبیعی، فرکانس تحریک و ناحیه ناپایداری دینامیکی مورد بررسی قرار گرفته است. اثر زوایای الیاف کامپوزیتی رویه‌ها بر روی نواحی ناپایداری نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. افزایش سفتی معادل کل سازه از روش‌های افزایش پایداری دینامیکی و کاهش ارتعاشات در سازه‌هاست. با استفاده از بستر الاستیک می‌توان پایداری دینامیکی را افزایش داد و از اثرات ارتعاشات و ناپایداری نامطلوب که یکی از دلایل خستگی و خرابی سازه‌ها است، کاست. این پژوهش دارای ارزش کاربردی برای محققین و طراحان جهت کاهش ارتعاشات و ناپایداری دینامیکی سازه‌های ساندویچی با هسته نرم و انعطاف‌پذیر است.

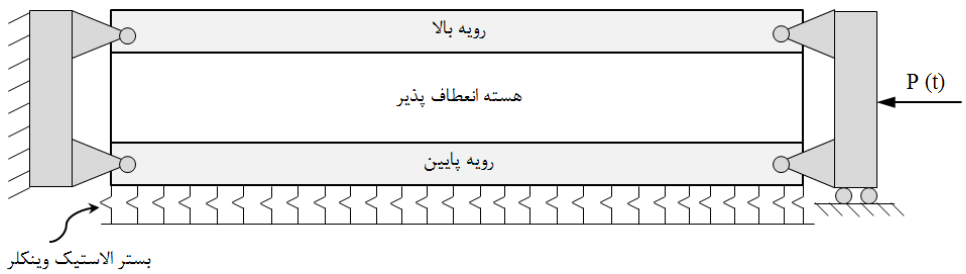
۲- روابط تحلیلی

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است، تیر ساندویچی دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده تحت نیروی محوری $P(t)=P_0+P_t\cos(\Omega t)$ قرار دارد. P_0 نیروی استاتیکی، P_t دامنه نیروی دینامیکی، Ω فرکانس نیروی دینامیکی اعمالی و t زمان است.

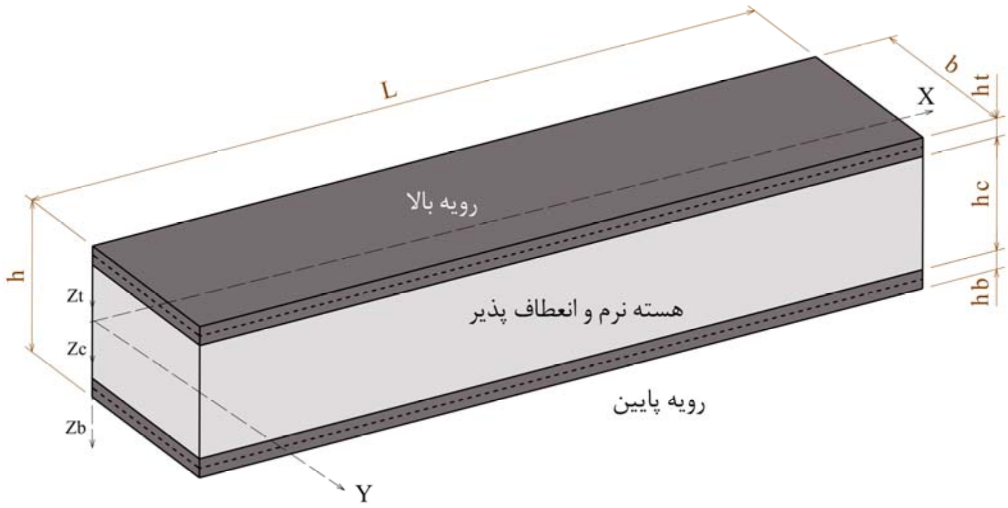
تیر ساندویچی با ابعاد و ضخامت h در شکل (۱-ب) نشان داده شده است. مختصات نیز در شکل نشان داده شده است. اندیس‌های t و b به ترتیب بیانگر رویه‌های بالا و پائین تیر است.

[1] Mathieu equations

(الف)



(ب)



شکل ۱– الف) تیر ساندویچی بر روی بستر الاستیک و تحت نیروی نوسانی محوری
ب) هندسه تیر ساندویچی با دستگاه مختصات

در مدل ارائه شده فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

۱- رویه‌ها با استفاده از تئوری کیرشهف و هسته با استفاده از مدل دوم فروستیگ تحلیل می‌شوند.
۲- شرط سازگاری میدان‌های جابجایی در نظر گرفته می‌شود.
۳- جابجایی عرضی W برای تمام نقاط روی سطح مقطع فرضی از رویه‌ها یکسان فرض می‌شوند.
۴- هسته دارای انعطاف‌پذیری عرضی است.
۵- نیروی محوری نوسانی به رویه ها اعمال می شود.

۲-۱- روابط سینماتیک

برای به دست آوردن معادلات حاکم از تئوری کلاسیک کیرشهف در رویه‌ها استفاده شده است؛ بنابراین میدان جابجایی به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$u_i(x,z,t) = u_0^i(x,t) - z_i \frac{\partial w_0^i(x,t)}{\partial x}) \qquad (1)$$
$$w_i(x,z,t) = w_0(x,t) \qquad \text{(i=t,b)}$$

که در آن u_0^i جابجایی لایه میانی تیر (z = 0) در راستای x و w_0^i جابجایی عرضی لایه میانی تیر (z = 0) است. بر اساس این تئوری خطوط راست قائم بر صفحه میانی قبل از تغییر شکل، بعد از تغییر شکل نیز

راست و عمود بر صفحه میانی باقی خواهند ماند. میدان‌های جابجایی هسته بر اساس مدل دوم فروستیگ به صورت زیر داده شده است [۲]:

$$
\begin{aligned}
u_c(x,z,t) &= u_0^c(x,t) + z_c u_1^c(x,t) + {z_c}^2 u_2^c(x,t) + {z_c}^3 u_3^c(x,t) \\
w_c(x,z,t) &= w_0^c(x,t) + z_c w_1^c(x,t) + {z_c}^2 w_2^c(x,t)
\end{aligned}
\quad (۲)
$$

که u_k^c (k = 0, 1, 2, 3)، میدان‌های جابجایی صفحه‌ای و w_k^c (k = 0, 1, 2) میدان‌های جابجایی عرضی هسته هستند. در مجموع در این مدل ۱۱ جابجایی مجهول وجود دارد. در این پژوهش هسته و رویه‌ها به‌طور کامل به هم چسبیده‌اند.

۲-۲- کرنش‌ها

معادلات سینماتیک برای کرنش‌ها در رویه‌ها به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}^i = \varepsilon_{0xx}^i - z_i \varepsilon_{1xx}^i \\
&\varepsilon_{zz}^i = \varepsilon_{yy}^i = \gamma_{xy}^i = \gamma_{zy}^i = \gamma_{xz}^i = 0 \\
&\varepsilon_{0xx}^i = u_{0,x}^i, \varepsilon_{1xx}^i = w_{0,xx}^i
\end{aligned}
\quad (۳)
$$

همچنین روابط کرنش‌ها در هسته به صورت زیر ارائه شده است:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}^c = \varepsilon_{0xx}^c + z_c \varepsilon_{1xx}^c + {z_c}^2 \varepsilon_{2xx}^c + {z_c}^3 \varepsilon_{3xx}^c \\
&\varepsilon_{yy}^i = \gamma_{xy}^i = \gamma_{zy}^i = 0 \\
&\varepsilon_{zz}^c = \varepsilon_{0zz}^c + z_c \varepsilon_{1zz}^c \\
&\gamma_{xz}^c = \gamma_{0xz}^c + z_c \gamma_{1xz}^c + {z_c}^2 \gamma_{2xz}^c \\
&\varepsilon_{0xx}^c = u_{0,x}^c, \varepsilon_{1xx}^c = u_{1,x}^c, \varepsilon_{2xx}^c = u_{2,x}^c, \varepsilon_{3xx}^c = u_{3,x}^c \\
&\varepsilon_{0zz}^c = w_1^c, \varepsilon_{1zz}^c = 2w_2^c \\
&\gamma_{0xz}^i = u_1^c + w_{0,x}^c, \gamma_{1xz}^c = 2u_2^c + w_{1,x}^c, \gamma_{2xz}^c = 3u_3^c + w_{2,x}^c
\end{aligned}
\quad (۴)
$$

شرط سازگاری میدان جابجایی با فرض کردن اتصال کامل بین رویه‌ها و هسته به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$
\begin{aligned}
&u_c(z_c = -\frac{h_c}{2}) = u_t(z_t = \frac{h_t}{2}) \\
&u_c(z_c = \frac{h_c}{2}) = u_b(z_b = -\frac{h_b}{2}) \\
&w_c(z_c = -\frac{h_c}{2}) = w_t(z_t = \frac{h_t}{2}) \\
&w_c(z_c = \frac{h_c}{2}) = w_b(z_b = -\frac{h_b}{2})
\end{aligned}
\quad (۵)
$$

با جایگذاری رابطه (۵) در روابط (۱) (۲) و پس از ساده‌سازی داریم:

$$\begin{aligned}
u_0^t &= u_0^c - \frac{h_c}{2}u_1^c + \frac{h_c^2}{4}u_2^c - \frac{h_c^3}{8}u_3^c + \frac{h_t}{2}w_{0,x}^t \\
u_0^b &= u_0^c + \frac{h_c}{2}u_1^c + \frac{h_c^2}{4}u_2^c + \frac{h_c^3}{8}u_3^c - \frac{h_b}{2}w_{0,x}^b \\
w_0^t &= w_0^c - \frac{h_c}{2}w_1^c + \frac{h_c^2}{4}w_2^c \\
w_0^b &= w_0^c + \frac{h_c}{2}w_1^c + \frac{h_c^2}{4}w_2^c
\end{aligned} \qquad (۶)$$

با توجه به رابطه (۶)، u_0^c و w_0 مجهولات مسئله هستند. بنابراین تعداد مجهولات به ۷ عدد تقلیل می یابد که شامل $u_0^c, u_1^c, u_2^c, u_3^c, w_0^c, w_1^c$ و w_2^c است.

۲-۳- روابط حاکم

معادلات حرکت رویه‌ها و هسته با استفاده از اصل انرژی پتانسیل کمینه به صورت زیر است:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T + \delta W_{ext}) dt = 0 \qquad (۷)$$

که δ نشان‌دهنده اپراتور تغییرات مرتبه اول و W_{ext} نشان‌دهنده‌ی کار انجام شده توسط نیروهای خارجی است. L، U و T هم به ترتیب نشان‌دهنده‌ی لاگرانژین، انرژی کرنشی کل و انرژی جنبشی کل تیر ساندویچی است. تغییرات انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار خارجی تیر ساندویچی به ترتیب به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned}
&\delta U = \int_{v_t} (\sigma_{xx}^t \delta\varepsilon_{xx}^t) dV_t + \int_{v_b} (\sigma_{xx}^b \delta\varepsilon_{xx}^b) dV_b + \int_{v_t} (\sigma_{zz}^c \delta\varepsilon_{zz}^c + \tau_{xz}^c \delta\gamma_{xz}^c + \sigma_{xx}^c \delta\varepsilon_{xx}^c) dV_c \\
&dV_i = dA_i dz_i = dx_i dz_i, \qquad (i = t, b, c)
\end{aligned} \qquad (۸)$$

$$\delta T = \int_{t_1}^{t_2} \left[\begin{array}{l} \int_0^L \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \rho_t (\ddot{u}_{0t} \delta u_{ot} + \ddot{w}_{0t} \delta w_{ot}) dxdz + \int_0^L \int_{-\frac{h_b}{2}}^{\frac{h_b}{2}} \rho_b (\ddot{u}_{0b} \delta u_{ob} + \ddot{w}_{0b} \delta w_{ob}) dxdz + \\ \int_0^L \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \rho_c (\ddot{u}_c \delta u_c + \ddot{w}_c \delta w_c) dxdz \end{array} \right] dt \qquad (۹)$$

$$\delta W_{ext} = -\int_0^L F_s \delta w_0 dx - (1/2)\left(\delta \int_0^L \overline{P}(t) w_{t,x}^2 dx + \delta \int_0^L \overline{P}(t) w_{b,x}^2 dx\right) \qquad (۱۰)$$

که $\overline{P}(t) = P(t)/2$ و $F_s = -K_w w_0$ است و K_w مدول بستر (وینکلر) است. تنش‌های برآیند برای رویه‌ها و هسته به صورت زیر تعریف شده است (i= t, b):

$$\begin{Bmatrix} N_{xx}^i \\ M_{xx}^i \end{Bmatrix} = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \left[\sigma_{xx}^i\right] \begin{Bmatrix} 1 \\ z_i \end{Bmatrix} dz_i, \tag{۱۱}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx}^c \\ M_{xx}^c \\ P_{xx}^c \\ S_{xx}^c \end{Bmatrix} = \int_{-h_c/2}^{h_c/2} \left[\sigma_{xx}^c\right] \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{Bmatrix} dz_c,$$

$$\begin{Bmatrix} N_{zz}^c \\ M_{zz}^c \\ P_{zz}^c \\ S_{zz}^c \end{Bmatrix} = \int_{-h_c/2}^{h_c/2} \left[\sigma_{zz}^c\right] \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{Bmatrix} dz_c, \tag{۱۲}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz}^c \\ M_{xz}^c \\ P_{xz}^c \\ S_{xz}^c \end{Bmatrix} = \int_{-h_c/2}^{h_c/2} \left[\tau_{xz}^c\right] \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{Bmatrix} dz_c,$$

با استفاده از اصل همیلتون (روابط ۹-۱۱) و روابط سینماتیک (۳-۱ و ۵)، معادلات حرکت به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\delta u_0^c: \\
&-\left(\frac{dN_{xx}^t}{dx}+\frac{dN_{xx}^c}{dx}+\frac{dN_{xx}^b}{dx}\right)+(I_0^t+I_0^b+I_0^c)\ddot{u}_0^c+\left(-\frac{h_c}{2}I_0^t+\frac{h_c}{2}I_0^b+I_1^c\right)\ddot{u}_1^c+\left(\frac{h_c^2}{4}I_0^t\right. \\
&\left.+\frac{h_c^2}{4}I_0^b+I_2^c\right)\ddot{u}_2^c+\left(-\frac{h_c^3}{8}I_0^t+\frac{h_c^3}{8}I_0^b+I_3^c\right)\ddot{u}_3^c+\left(\frac{h_t}{2}I_0^t-I_1^t-\frac{h_b}{2}I_0^b-I_1^b\right)\ddot{w}_{0,x}^c \\
&+\left(-\frac{h_ch_t}{4}I_0^t+\frac{h_c}{2}I_1^t-\frac{h_ch_b}{4}I_0^b-\frac{h_c}{2}I_1^b\right)\ddot{w}_{1,x}^c+\left(\frac{h_c^2h_t}{8}I_0^t-\frac{h_c^2}{4}I_1^t-\frac{h_c^2h_b}{8}I_0^b\right. \\
&\left.-\frac{h_c^2}{4}I_1^b\right)\ddot{w}_{2,x}^c=0
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

$$\begin{aligned}
&\delta u_1^c: \\
&\frac{h_c}{2}\frac{dN_{xx}^t}{dx}-\frac{h_c}{2}\frac{dN_{xx}^b}{dx}-\frac{dM_{xx}^c}{dx}+Q_x^c+\left(-\frac{h_c}{2}I_0^t+\frac{h_c}{2}I_0^b+I_1^c\right)\ddot{u}_0^c+\left(\frac{h_c^2}{4}I_0^t+\frac{h_c^2}{4}I_0^b\right. \\
&\left.+I_2^c\right)\ddot{u}_1^c+\left(-\frac{h_c^3}{8}I_0^t+\frac{h_c^3}{8}I_0^b+I_3^c\right)\ddot{u}_2^c+\left(\frac{h_c^4}{16}I_0^t+\frac{h_c^4}{16}I_0^b+I_4^c\right)\ddot{u}_3^c+\left(-\frac{h_ch_t}{4}I_0^t\right. \\
&\left.+\frac{h_c}{2}I_1^t-\frac{h_ch_b}{4}I_0^b-\frac{h_c}{2}I_1^b\right)\ddot{w}_{0,x}^c+\left(\frac{h_c^2h_t}{8}I_0^t-\frac{h_c^2}{4}I_1^t-\frac{h_c^2h_b}{8}I_0^b-\frac{h_c^2}{4}I_1^b\right)\ddot{w}_{1,x}^c \\
&+\left(-\frac{h_c^3h_t}{16}I_0^t+\frac{h_c^3}{8}I_1^t-\frac{h_c^3h_b}{16}I_0^b-\frac{h_c^3}{8}I_1^b\right)\ddot{w}_{2,x}^c=0
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

$$
\begin{aligned}
&\delta u_2^{\,c}:\\
&-\frac{h_c^2}{4}\frac{dN_{xx}^{\,t}}{dx}-\frac{h_c^2}{4}\frac{dN_{xx}^{\,b}}{dx}-\frac{dP_{xx}^{\,c}}{dx}+2M_{xz}^{c}+(\frac{h_c^2}{4}I_0^{\,t}+\frac{h_c^2}{4}I_0^{\,b}+I_2^{\,c})\ddot{u}_0^c+(-\frac{h_c^3}{8}I_0^{\,t}+\frac{h_c^3}{8}I_0^{\,b}\\
&+I_3^{\,c})\ddot{u}_1^{\,c}+(\frac{h_c^4}{16}I_0^{\,t}+\frac{h_c^4}{16}I_0^{\,b}+I_4^{\,c})\ddot{u}_2^c+(-\frac{h_c^{\,5}}{32}I_0^{\,t}+\frac{h_c^5}{32}I_0^{\,b}+I_5^{\,c})\ddot{u}_3^{\,c}+(\frac{h_c^2h_t}{8}I_0^{\,t}\\
&-\frac{h_c^2}{4}I_1^t-\frac{h_c^2h_b}{8}I_0^{\,b}-\frac{h_c^2}{4}I_1^b)\ddot{w}_{0,x}^c+(-\frac{h_c^3h_t}{16}I_0^{\,t}+\frac{h_c^3}{8}I_1^t-\frac{h_c^3h_b}{16}I_0^{\,b}-\frac{h_c^3}{8}I_1^b)\ddot{w}_{1,x}^{\,c}\\
&+(\frac{h_c^4h_t}{32}I_0^t-\frac{h_c^4}{16}I_1^t-\frac{h_c^4h_b}{32}I_0^b-\frac{h_c^4}{16}I_1^b)\ddot{w}_{2,x}^{\,c}=0
\end{aligned}
\tag{۱۵}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta u_3^{\,c}:\\
&\frac{h_c^3}{8}\frac{dN_{xx}^{\,t}}{dx}-\frac{h_c^3}{8}\frac{dN_{xx}^{\,b}}{dx}-\frac{dS_{xx}^{\,c}}{dx}+3P_{xz}^c+(-\frac{h_c^3}{8}I_0^{\,t}+\frac{h_c^3}{8}I_0^{\,b}+I_3^{\,c})\ddot{u}_0^c+(\frac{h_c^4}{16}I_0^{\,t}+\frac{h_c^4}{16}I_0^{\,b}\\
&+I_4^{\,c})\ddot{u}_1^{\,c}+(-\frac{h_c^5}{32}I_0^{\,t}+\frac{h_c^5}{32}I_0^{\,b}+I_5^{\,c})\ddot{u}_2^c+(\frac{h_c^{\,6}}{64}I_0^{\,t}+\frac{h_c^6}{64}I_0^{\,b}+I_6^{\,c})\ddot{u}_3^{\,c}+(\frac{h_c^2h_t}{8}I_0^{\,t}\\
&-\frac{h_c^2}{4}I_1^t-\frac{h_c^2h_b}{8}I_0^{\,b}-\frac{h_c^2}{4}I_1^b)\ddot{w}_{0,x}^c+(-\frac{h_c^3h_t}{16}I_0^{\,t}+\frac{h_c^3}{8}I_1^t-\frac{h_c^3h_b}{16}I_0^b-\frac{h_c^3}{8}I_1^b)\ddot{w}_{1,x}^{\,c}\\
&+(\frac{h_c^4h_t}{32}I_0^t-\frac{h_c^4}{16}I_1^t-\frac{h_c^4h_b}{32}I_0^b-\frac{h_c^4}{16}I_1^b)\ddot{w}_{2,x}^{\,c}=0
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta w_0^c:\\
&\frac{h_t}{2}\frac{d^2N_{xx}^t}{dx^2}-\frac{h_b}{2}\frac{d^2N_{xx}^b}{dx^2}-\frac{d^2M_{xx}^t}{dx^2}-\frac{d^2M_{xx}^b}{dx^2}-\frac{dQ_x^c}{dx}+K_w(w_0^c+\frac{h_c}{2}w_1^c+\frac{h_c^2}{4}w_2^c)\\
&+\overline{P}(t)(2w_{0,xx}^c+\frac{h_c^2}{2}w_{2,xx}^c)+(-\frac{h_t}{2}I_0^t+\frac{h_b}{2}I_0^b+I_1^b)\ddot{u}_{0,x}^c+(\frac{h_th_c}{4}I_0^t-\frac{h_c}{2}I_1^t+\frac{h_bh_c}{4}I_0^b\\
&+\frac{h_c}{2}I_1^b)\ddot{u}_{1,x}^c+(-\frac{h_th_c^2}{8}I_0^t+\frac{h_c^2}{4}I_1^t+\frac{h_bh_c^2}{8}I_0^b+\frac{h_c^2}{4}I_1^b)\ddot{u}_{2,x}^c+(\frac{h_th_c^3}{16}I_0^t-\frac{h_c^3}{8}I_1^t\\
&+\frac{h_bh_c^3}{16}I_0^b+\frac{h_c^3}{8}I_1^b)\ddot{u}_{3,x}^c+(-\frac{h_t^2}{4}I_0^t-I_2^t+h_tI_1^t-\frac{h_b^2}{4}I_0^b-I_2^b-h_bI_1^b)\ddot{w}_{0,xx}^c+(\frac{h_t^2h_c}{8}I_0^t\\
&+\frac{h_c}{2}I_2^t-\frac{h_ch_t}{2}I_1^t-\frac{h_b^2h_c}{8}I_0^b-\frac{h_c}{2}I_2^b-\frac{h_ch_b}{2}I_1^b)\ddot{w}_{1,xx}^c+(-\frac{h_b^2h_c^2}{16}I_0^b-\frac{h_c^2}{4}I_2^b\\
&-\frac{h_c^2h_b}{4}I_1^b-\frac{h_t^2h_c^2}{16}I_0^t-\frac{h_c^2}{4}I_2^t+\frac{h_c^2h_t}{4}I_1^b)\ddot{w}_{2,xx}^c+(I_0^b+I_0^c+I_0^t)\ddot{w}_0^c+(\frac{h_c}{2}I_0^b+I_1^c\\
&-\frac{h_c}{2}I_0^t)\ddot{w}_1^c+(\frac{h_c^2}{4}I_0^t+\frac{h_c^2}{4}I_0^b+I_2^c)\ddot{w}_2^c=0
\end{aligned}
\tag{۱۷}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta w_1^c:\\
&-\frac{h_c h_t}{4}\frac{d^2N_{xx}^t}{dx^2}-\frac{h_c h_b}{4}\frac{d^2N_{xx}^b}{dx^2}+\frac{h_c}{2}\frac{d^2M_{xx}^t}{dx^2}-\frac{h_c}{2}\frac{d^2M_{xx}^b}{dx^2}-\frac{dM_{xz}^c}{dx}+N_{zz}^c+K_w(\frac{h_c}{2})(w_0^c\\
&+\frac{h_c}{2}w_1^c+\frac{h_c^2}{4}w_2^c)+\bar{P}(t)(\frac{h_c^2}{2}w_{1,xx}^c)+(\frac{h_c h_t}{4}I_0^t-\frac{h_c}{2}I_1^t+\frac{h_c h_b}{4}I_0^b+\frac{h_c}{2}I_1^b)\ddot{u}_{0,x}^c+\\
&(-\frac{h_c^2 h_t}{8}I_0^t+\frac{h_c^2}{4}I_1^t+\frac{h_c^2 h_b}{8}I_0^b+\frac{h_c^2}{4}I_1^b)\ddot{u}_{1,x}^c+(\frac{h_c^3 h_t}{16}I_0^t-\frac{h_c^3}{8}I_1^t+\frac{h_c^3 h_b}{16}I_0^b+\frac{h_c^3}{8}I_1^b)\ddot{u}_{2,x}^c\\
&+(-\frac{h_c^4 h_t}{32}I_0^t+\frac{h_c^4}{16}I_1^t+\frac{h_c^4 h_b}{32}I_0^b+\frac{h_c^4}{16}I_1^b)\ddot{u}_{3,x}^c+(\frac{h_c h_t}{12}I_1^t+(\frac{h_c h_t^2}{8}I_0^t+\frac{h_c}{2}I_2^t-\frac{h_c h_t}{2}I_1^t\\
&-\frac{h_c h_b^2}{8}I_0^b-\frac{h_c h_b}{2}I_1^b-\frac{h_c}{2}I_2^b)\ddot{w}_{0,xx}^c+(-\frac{h_c^2 h_t^2}{16}I_0^t-\frac{h_c^2}{4}I_2^t+\frac{h_t h_c^2}{4}I_1^t-\frac{h_c^2 h_b^2}{16}I_0^b-\frac{h_c^2}{4}I_2^b\\
&-\frac{h_b h_c^2}{4}I_1^b)\ddot{w}_{1,xx}^c+(-\frac{h_c^3 h_b^2}{32}I_0^b-\frac{h_c^3}{8}I_2^b-\frac{h_b h_c^3}{8}I_1^b+\frac{h_c^3 h_t^2}{32}I_0^t+\frac{h_c^3}{8}I_2^t-\frac{h_t h_c^3}{8}I_1^t)\ddot{w}_{2,xx}^c\\
&+(-\frac{h_c}{2}I_0^t+\frac{h_c}{2}I_0^b+I_1^c)\ddot{w}_0^c+(\frac{h_c^2}{4}I_0^t+\frac{h_c^2}{4}I_0^b+I_2^c)\ddot{w}_1^c+(-\frac{h_c^3}{8}I_0^t+\frac{h_c^3}{8}I_0^b+I_3^c)\ddot{w}_2^c=0
\end{aligned}
\tag{۱۸}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta w_2^c:\\
&\frac{h_c^2 h_t}{8}\frac{d^2N_{xx}^t}{dx^2}-\frac{h_c^2 h_b}{8}\frac{d^2N_{xx}^b}{dx^2}-\frac{h_c^2}{4}\frac{d^2M_{xx}^t}{dx^2}-\frac{h_c^2}{4}\frac{d^2M_{xx}^b}{dx^2}-\frac{dP_{xz}^c}{dx}+2M_{zz}^c+K_w(\frac{h_c^2}{4})(w_0^c\\
&+\frac{h_c}{2}w_1^c+\frac{h_c^2}{4}w_2^c)+\bar{P}(t)(\frac{h_c^2}{2}w_{0,xx}^c+\frac{h_c^4}{8}w_{2,xx}^c)+(-\frac{h_c^2 h_t}{8}I_0^t+\frac{h_c^2}{4}I_1^t+\frac{h_c^2 h_b}{8}I_0^b+\frac{h_c^2}{4}I_1^b)\ddot{u}_{0,x}^c\\
&+(\frac{h_c^3 h_t}{16}I_0^t-\frac{h_c^3}{8}I_1^t+\frac{h_c^3 h_b}{16}I_0^b+\frac{h_c^3}{8}I_1^b)\ddot{u}_{1,x}^c+(-\frac{h_c^4 h_t}{32}I_0^t-\frac{h_c^4}{16}I_1^t+\frac{h_c^4 h_b}{32}I_0^b+\frac{h_c^4}{16}I_1^b)\ddot{u}_{2,x}^c\\
&+(\frac{h_c^5 h_t}{64}I_0^t-\frac{h_c^5}{32}I_1^t+\frac{h_c^5 h_b}{64}I_0^b+\frac{h_c^5}{32}I_1^b)\ddot{u}_{3,x}^c+(-\frac{h_c^2 h_t^2}{16}I_0^t-\frac{h_c^2}{4}I_2^t+\frac{h_c^2 h_t}{4}I_1^t-\frac{h_c^2 h_b^2}{16}I_0^b\\
&-\frac{h_c^2}{4}I_2^b-\frac{h_b h_c^2}{4}I_1^b)\ddot{w}_{0,xx}^c+(\frac{h_c^3 h_t^2}{32}I_0^t+\frac{h_c^3}{8}I_2^t-\frac{h_t h_c^3}{8}I_1^t-\frac{h_c^3 h_b^2}{32}I_0^b-\frac{h_c^3}{8}I_2^b-\frac{h_b h_c^3}{8}I_1^b)\ddot{w}_{1,xx}^c\\
&+(-\frac{h_c^4 h_t^2}{64}I_0^t-\frac{h_c^4}{16}I_2^t+\frac{h_t h_c^4}{16}I_1^t-\frac{h_c^4 h_b^2}{64}I_0^b-\frac{h_c^4}{16}I_2^b-\frac{h_b h_c^4}{16}I_1^b)\ddot{w}_{2,xx}^c+(\frac{h_c^2}{4}I_0^t+\frac{h_c^2}{4}I_0^b\\
&+I_2^c)\ddot{w}_0^c+(-\frac{h_c^3}{8}I_0^t+\frac{h_c^3}{8}I_0^b+I_3^c)\ddot{w}_1^c+(\frac{h_c^4}{16}I_0^t+\frac{h_c^4}{16}I_0^b+I_4^c)\ddot{w}_2^c=0
\end{aligned}
\tag{۱۹}
$$

در معادلات (۱۹-۱۳)، I_n^i (i = t, b, c) (n = 0, 1, 2) گشتاورهای اینرسی برای رویه‌ها و هسته است که به صورت زیر تعریف شده است:

$$I_n^i=\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} z_i^n\rho_i dz_i \quad (\text{i=t,b,c})$$

حل دقیق تحلیلی معادلات (۱۹-۱۳) برای تیر ساندویچی با شرایط تکیه‌گاهی ساده به صورت زیر تعریف شده است:

$$w_0(0,t)=w_0(L,t)=0,\quad M_{xx}(0,t)=M_{xx}(L,t)=0$$

برای حل معادلات دیفرانسیل (۱۹-۱۳) تیر می‌توان از روش باقیمانده وزنی به شیوه توابع وزنی گلرکین به‌صورت رابطه (۲۰) استفاده کرد [۴۰]:

$$u_0^c = \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\varphi_{ai}(x), \qquad w = \sum_{i=1}^{N} b_i(t)\varphi_{bi}(x), \tag{۲۰}$$

که N تعداد شکل مود[1] های تحلیل، ϕ_{ai}, ϕ_{bi}توابع شکلی هستند که شرایط مرزی را ارضا می‌کنند. برای تیر با شرایط تکیه‌گاهی ساده داریم:

$$\varphi_{ai}(x) = \cos(\frac{i\pi x}{L}), \qquad \varphi_{bi}(x) = \sin(\frac{i\pi x}{L}) \tag{۲۱}$$

با جایگذاری روابط (۲۱-۲۰) در روابط (۱۹-۱۳)، معادله حرکت به‌صورت رابطه (۲۲) ارائه می‌شود:

$$\left[M\right]\left\{\ddot{f}\right\} + \left[K\right]\left\{f\right\} - P_t \cos\Omega\, t\left[H\right]\left\{f\right\} = 0 \tag{۲۲}$$

که در رابطه (۲۲) $\dot{(.)} = d()/dt$، $\left\{f\right\} = \left\{\left\{a_i\right\}^T, \left\{b_i\right\}^T\right\}^T$ و $\left[K\right] = \left[K_1\right] - P_0\left[H\right] - \left[K_f\right]$ است.

۲-۴- تحلیل ناپایداری دینامیکی

با اعمال نیروی نوسانی به یک سیستم، ممکن است که دامنه ارتعاشات به صورت نامحدود افزایش یابد. لذا مطالعه و بررسی نواحی ناپایداری سیستم و تعیین مرزهای نواحی ناپایداری دینامیکی دارای اهمیت است. رابطه (۲۲) معادله حاکم بر رفتار ناپایداری تیر بر اساس معادله متیو[2] است. حل رابطه (۲۲) می‌تواند پاسخ‌های محدود و نامحدود را نتیجه دهد. پاسخ‌های نامحدود بیانگر ناپایداری دینامیکی و محدوده این پاسخ‌ها، نواحی ناپایداری دینامیکی را مشخص می‌کنند. بر اساس روش بالوتین[3]، مرزهای نواحی ناپایداری دینامیکی توسط حل با بازه (پریود) های زمانی T و 2T تعیین می‌شوند. نواحی ناپایداری در مرزهای حل با بازه زمانی 2T دارای اهمیت اساسی است؛ بنابراین با تعریف $\left\{f\right\}$ به‌صورت سری داریم:

$$\left\{f\right\} = \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left[\left\{a_i\right\}\sin\frac{i\Omega t}{2} + \left\{b_i\right\}\cos\frac{i\Omega t}{2}\right] \tag{۲۳}$$

که $T = \frac{2\pi}{\Omega}$، $\left\{a_i\right\}$ و $\left\{b_i\right\}$ بردارهای وابسته به زمان t هستند.

با جایگذاری رابطه (۲۳) در رابطه (۲۲) و ساده‌سازی داریم:

$$\left|\left[K_e\right] - \frac{\Omega^2}{4}\left[M\right] \pm 0.5P_t\left[H\right]\right| = 0 \tag{۲۴}$$

رابطه (۲۴) یک مسئله مقدار ویژه برای مقادیر معلوم P_0 و P_t است. علامت‌های مثبت و منفی مرزهای ناحیه ناپایداری دینامیکی را تعیین می‌کنند.

[1] Mode shapes
[2] Mathieu type equations
[3] Bolotin's approach

۳- نتایج و بحث

در این بخش بر روی نتایج حاصل از تعدادی مثال به‌منظور تصدیق و صحه‌گذاری بحث شده است. مشخصه‌های دینامیکی از قبیل فرکانس‌های آزاد و ناپایداری دینامیکی سیستم با استفاده از پارامترهای مختلف سیستم مورد مطالعه قرار گرفته است. به‌منظور دستیابی به این اهداف، کد برنامه‌نویسی متلب استخراج شده است. برای تصدیق و صحه‌گذاری کد استخراج شده، فرکانس‌های طبیعی بدون در نظر گرفتن نیروی محوری با تحقیقات قبلی مقایسه شده است که منجر به انطباق خوبی بین نتایج شده است.

مثال ۱: ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته نرم

در این مثال ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی با شرایط مرزی ساده بررسی شده است. خواص مکانیکی و هندسی تیر در جدول (۱) ارائه شده است. به دلیل عدم وجود تحقیقات کافی در زمینه تحلیل ناپایداری دینامیکی تیرهای ساندویچی با شرایط مشابه پژوهش حاضر، برای تصدیق و صحه‌گذاری روش تحلیلی استفاده‌شده (HSAPT)، فرکانس‌های طبیعی با نتایج تجربی و تحلیلی مرجع [۶] مقایسه شده است. همان‌طور که در جدول (۲) نشان داده شده است انطباق مناسبی بین نتایج وجود دارد.

جدول ۱- خواص مکانیکی و هندسی تیر ساندویچی [۶]

رویه‌ها لمینیت اورتوتروپ (۰/۹۰)	$E_1=131GPa, E_2=E_3=10.34$ GPa, $G_{12}=G_{13}=6.895GPa, G_{23}=6.205GPa$ $v_{12}=v_{13}=0.22, v_{23}=0.49, \rho=1627\,kg/m^3$
هسته همگن	$E=6.90$ MPa, G=3.45 MPa, $\rho=97\,kg/m^3$, $v=0$
نسبت ضخامت هسته به رویه‌ها	$h_c/h_i=10:1,\ (i=b,t)$
نسبت طول به ضخامت تیر	$L/h=10$

جدول ۲- مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدون بعد ω

شماره مود	مرجع [۶]	پژوهش حاضر HSAPT	اختلاف(٪)
۱	۱/۲۸۳۶	۱/۲۸۲۸	-۰/۰۶
۲	۲/۸۷۵۸	۲/۸۷۰۶	-۰/۱۸
۳	۴/۹۶۸۲	۴/۹۵۸۰	-۰/۲
۴	۷/۶۷۷۱	۷/۶۶۶۷	-۰/۱۳
۵	۱۱/۰۵۷۸	۱۱/۰۵۴۲	-۰/۰۳

جدول ۳- خواص مکانیکی و هندسی تیر ساندویچی [۶]

رویه‌ها	$E=10658\ \text{Mpa},\ G=4000\ \text{Mpa},\ \rho=1446\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
هسته	$E_c=115\ \text{MPa},\ \rho=199\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3},\ \nu=0.3$
خواص هندسی	$L=254mm,\ \text{h}_\text{t}=\text{h}_\text{b}=0.762mm,\ \text{h}_\text{c}=12.7mm,\ \text{b=25.4mm}$

جدول ۴- مقایسه فرکانس‌های طبیعی تیر ساندویچی

شماره مود	مرجع [۶]	پژوهش حاضر	
		HSAPT	اختلاف (٪)
۱	۲۸۲/۵	۲۸۴/۶	۰/۷۴
۲	۹۳۲/۵	۹۳۷/۸	۰/۵۸
۳	۱۶۹۷/۶	۱۷۰۵/۹	۰/۴۸
۴	۲۴۸۰	۲۴۹۰/۵	۰/۴۲
۵	۳۲۵۶/۸	۳۲۶۸/۵	۰/۳۶

مثال ۲: تحلیل ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی با رویه‌ها و هسته همگن

در این مثال ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی همگن با شرایط تکیه‌گاهی ساده بررسی شده است. خواص مکانیکی و هندسه تیر در جدول (۳) ارائه شده است. نتایج پژوهش حاضر در مقایسه با نتایج حاصل از مرجع [۶] در جدول (۴) نشان داده شده است که بیانگر انطباق مناسبی بین نتایج است. فرکانس‌های استخراج شده در مرجع [۶] حاصل نتایج تجربی و حل تحلیلی است.

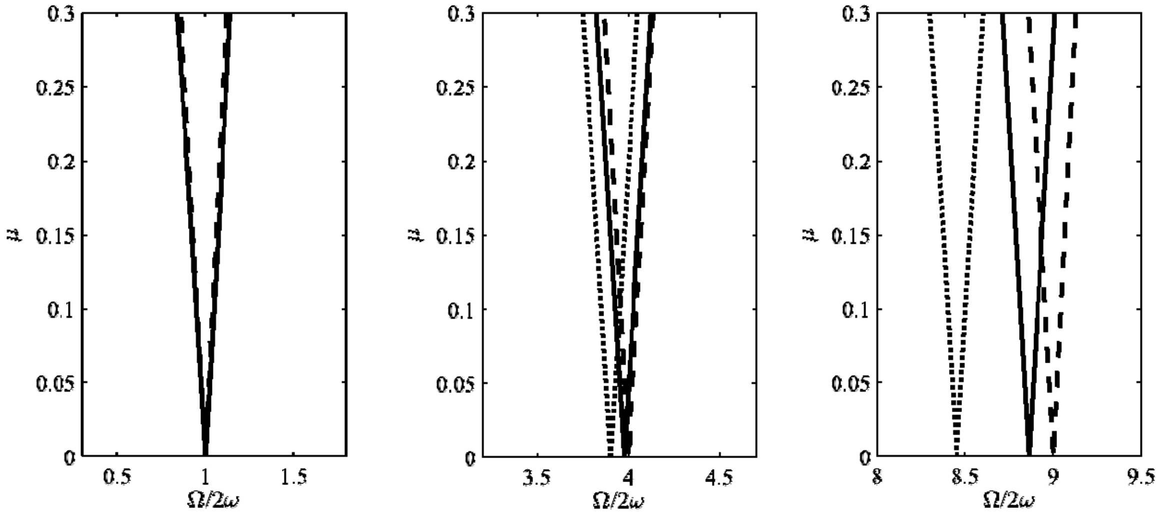
مثال ۳: تحلیل ناپایداری دینامیکی تیر همگن

در این مثال ناپایداری دینامیکی تیر همگن با شرایط مرزی ساده بررسی شده است. خواص تیر همراه با هندسه تیر در جدول (۵) ارائه شده است. شکل (۲) نواحی ناپایداری دینامیکی پژوهش حاضر را در مقایسه با مرجع [۱۰] نشان می‌دهد. همان‌طور که نشان داده شده است به دلیل اعمال شرایط مرزی بر رویه‌ها با کاهش نسبت ضخامت هسته به ضخامت تیر نواحی ناپایداری به نواحی ناپایداری مرجع [۱۰] نزدیک‌تر شده است؛ بنابراین انطباق مناسبی بین نتایج در مقایسه با مرجع [۱۰] مشاهده شده است.

$\mu=P_t/2(P_{cr}-P_0)$ پارامتر تحریک است.

جدول ۵- خواص مکانیکی و هندسی تیر همگن

تیر	$E = 70$ GPa, $\nu = 0.32, \rho{=}2710\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$,
خواص هندسی	$l = 370mm,\ \text{h}_\text{t} = \text{h}_\text{b} = 2mm,\ \text{h}_\text{c} = 21mm,\ \text{b=40mm}$

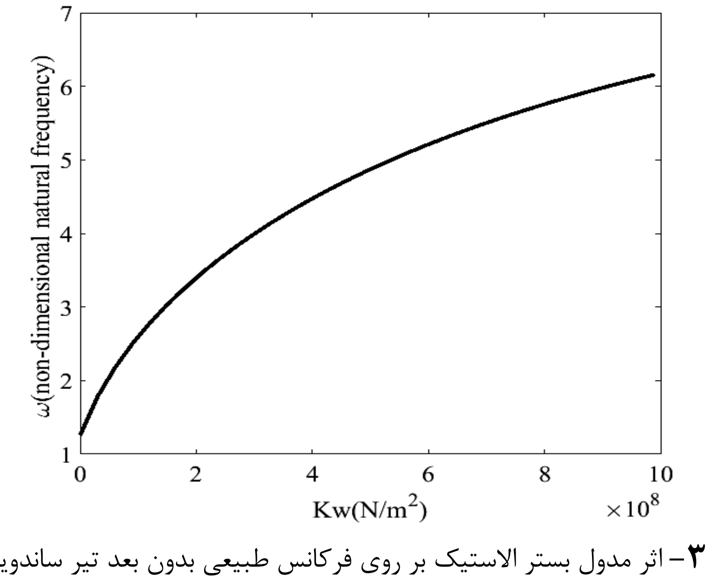


شکل۲- مقایسه نواحی ناپایداری با استفاده از تئوری HSAPT و مرجع [۱۰]

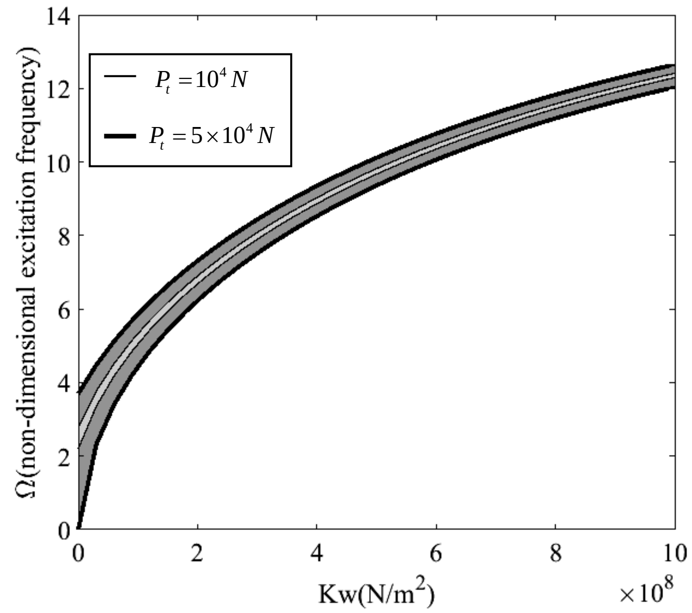
تئوری HSAPT با نسبت ($h_c/h = 0.84$)، .....، تئوری HSAPT با نسبت ($h_c/h = 0.05$)،ـــ، و مرجع [۱۰]،- -

مثال ۴: تحلیل ناپایداری دینامیکی تیر ساندویچی با هسته نرم بر روی بستر الاستیک

در این مثال ناپایداری دینامیکی تیر ساندویچی با شرایط مرزی ساده بررسی شده است. خواص مکانیکی و هندسه تیر ساندویچی در جدول (۱) ارائه شده است. شکل (۳)، اثر بستر وینکلر بر روی فرکانس طبیعی اول را نشان می‌دهد.

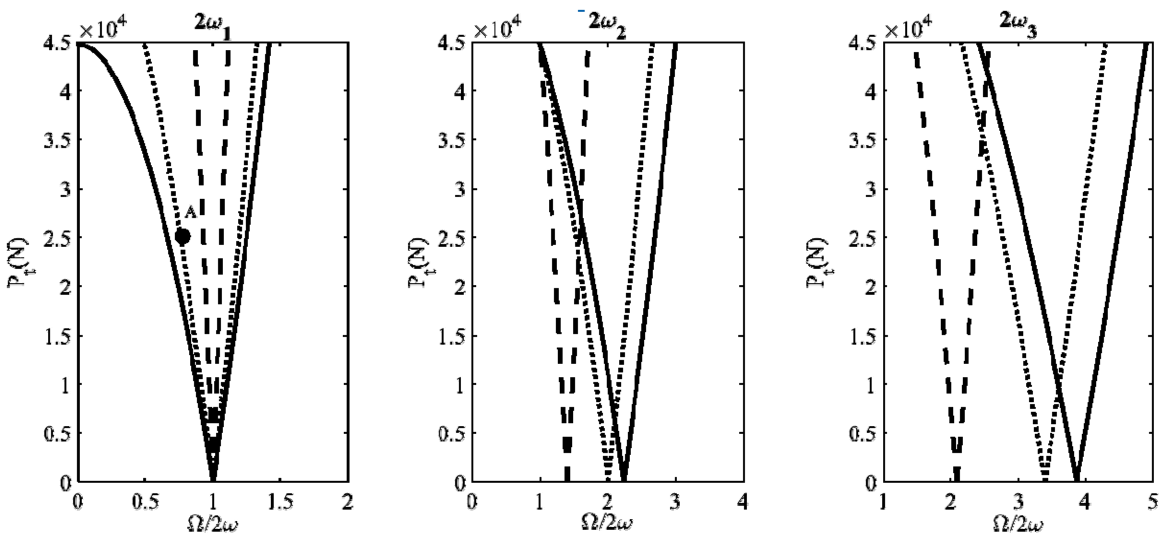


شکل۳- اثر مدول بستر الاستیک بر روی فرکانس طبیعی بدون بعد تیر ساندویچی

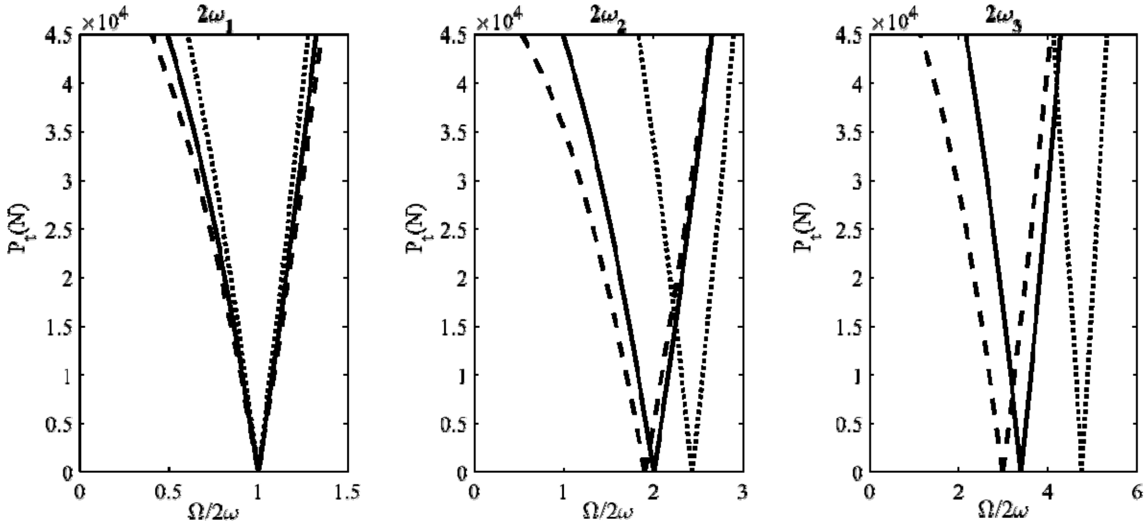


شکل۴- اثر مدول بستر الاستیک بر روی فرکانس تحریک بدون بعد تیر ساندویچی برای ($P_0 = 0N$).

همان‌طور که در شکل(۳) نشان داده‌شده است با افزایش ضریب بستر، فرکانس طبیعی افزایش‌یافته است که به دلیل افزایش سفتی تیر ساندویچی است. $\omega_{non-\dim} = \omega \frac{L^2}{h}\sqrt{(\rho/E_2)_f}$ فرکانس بدون بعد است. همان‌طور که در شکل(۴) نشان داده شده است، با افزایش مدول بستر الاستیک ناحیه ناپایداری دینامیکی در فرکانس‌های تحریک بیشتر اتفاق می‌افتد. همان‌طور که در شکل(۵) نشان داده شده است، با افزایش مدول بستر نواحی ناپایداری باریک‌تر شده است که به دلیل افزایش سفتی تیر و متعاقب آن پایداری بیشتر تیر ساندویچی است. همچنین با افزایش مدول بستر ناحیه ناپایداری در نسبت‌های کمتر ${\Omega}/{2\omega}$ اتفاق می‌افتد.



شکل ۵- اثر مدول بستر الاستیک بر روی نواحی ناپایداری دینامیکی تیر ساندویچی برای ($P_0 = 0$). تیر ساندویچی بدون بستر الاستیک (**−**)، تیر ساندویچی با بستر الاستیک و مدول $K_w = 10^7 (N/m^2)$ (**....**)، تیر ساندویچی با بستر الاستیک و مدول $K_w = 10^8 (N/m^2)$ (**---**)

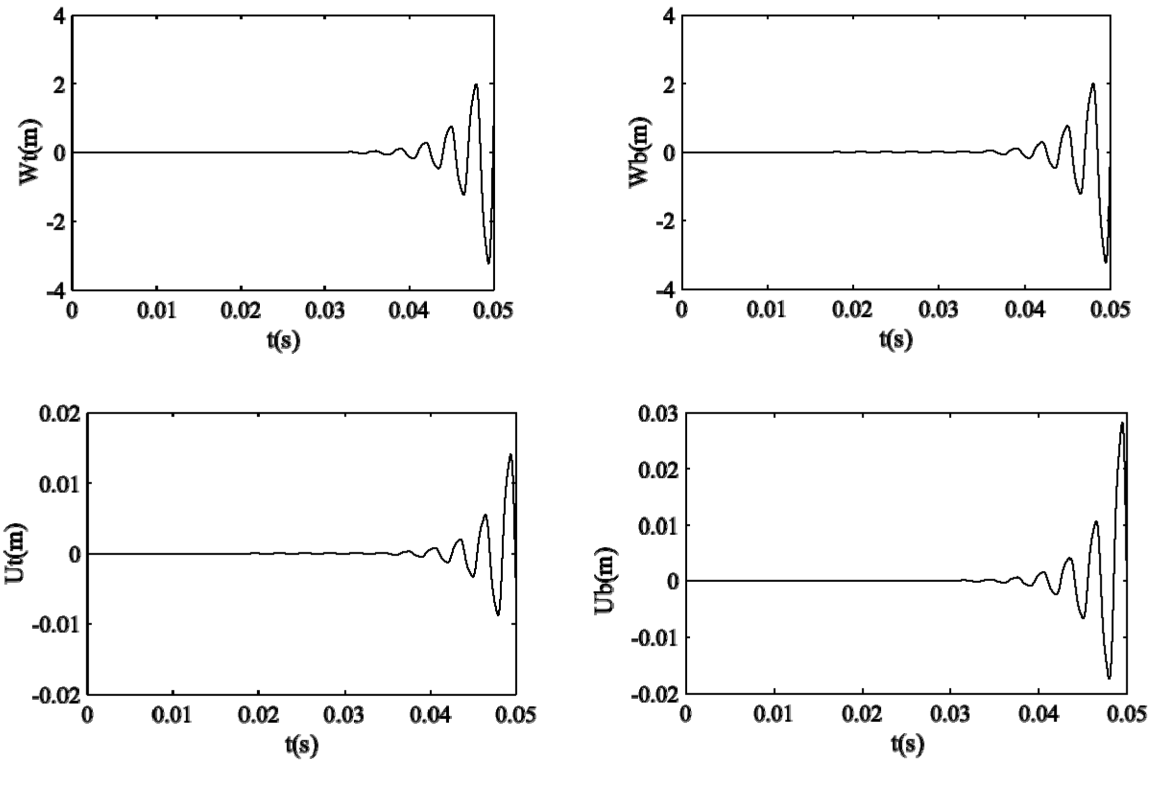


شکل ۶– اثر زاویه الیاف کامپوزیت بر روی نواحی ناپایداری دینامیکی تیر ساندویچی برای ($P_0 = 10^4 N$) و ($K_w = 10^7 (N/m^2)$). $(0^0/0^0)$ (...)، $(90^0/90^0)$ (---)، $(0^0/90^0)$ (−)

همان‌طور که در شکل (۶) نشان داده شده است، با افزایش زاویه الیاف نواحی ناپایداری عریض‌تر شده است که به دلیل کاهش سفتی تیر و متعاقب آن ناپایداری بیشتر تیر ساندویچی است. همچنین با افزایش زاویه الیاف، ناحیه ناپایداری در نسبت‌های کمتر $\Omega/2\omega$ اتفاق می‌افتد.

(الف)

(ب)

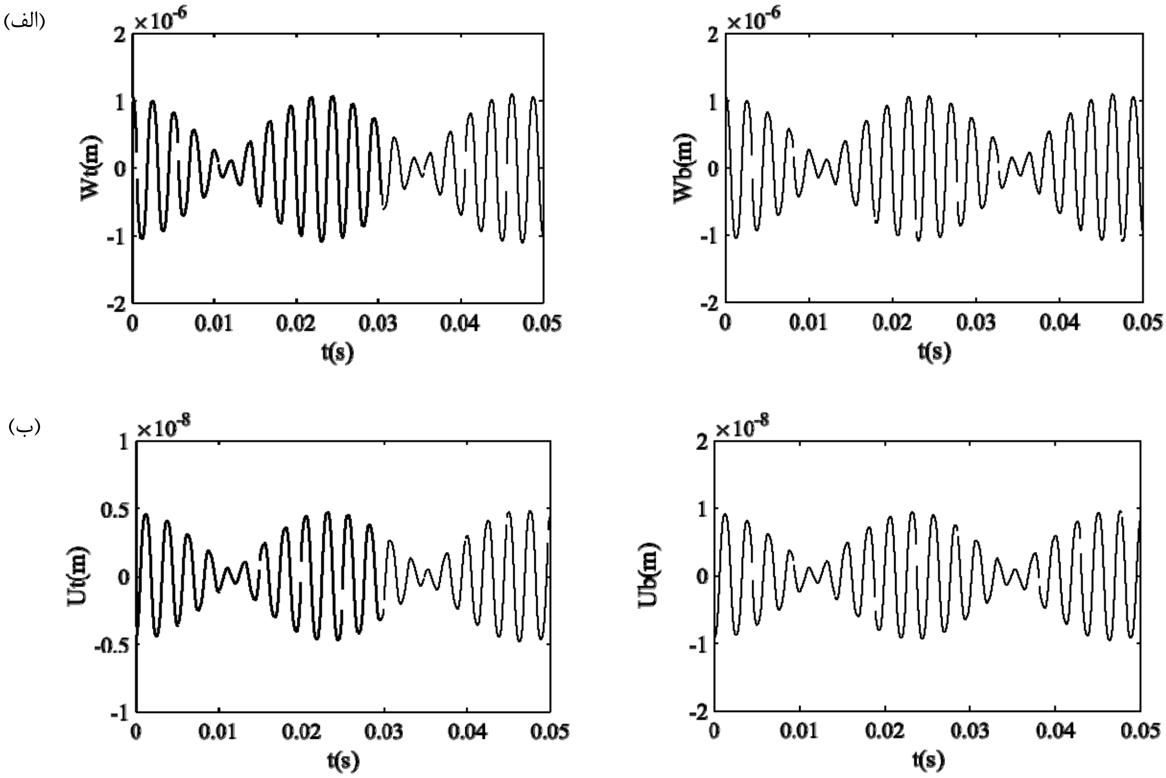


شکل ۷– پاسخ زمانی تیر ساندویچی در $P_t = 2\times10^4 N$. پاسخ رویه‌ها الف) در جهت عرضی W ب) در جهت افقی U برای ($P_0 = 0N$) و ($K_w = 0 (N/m^2)$).

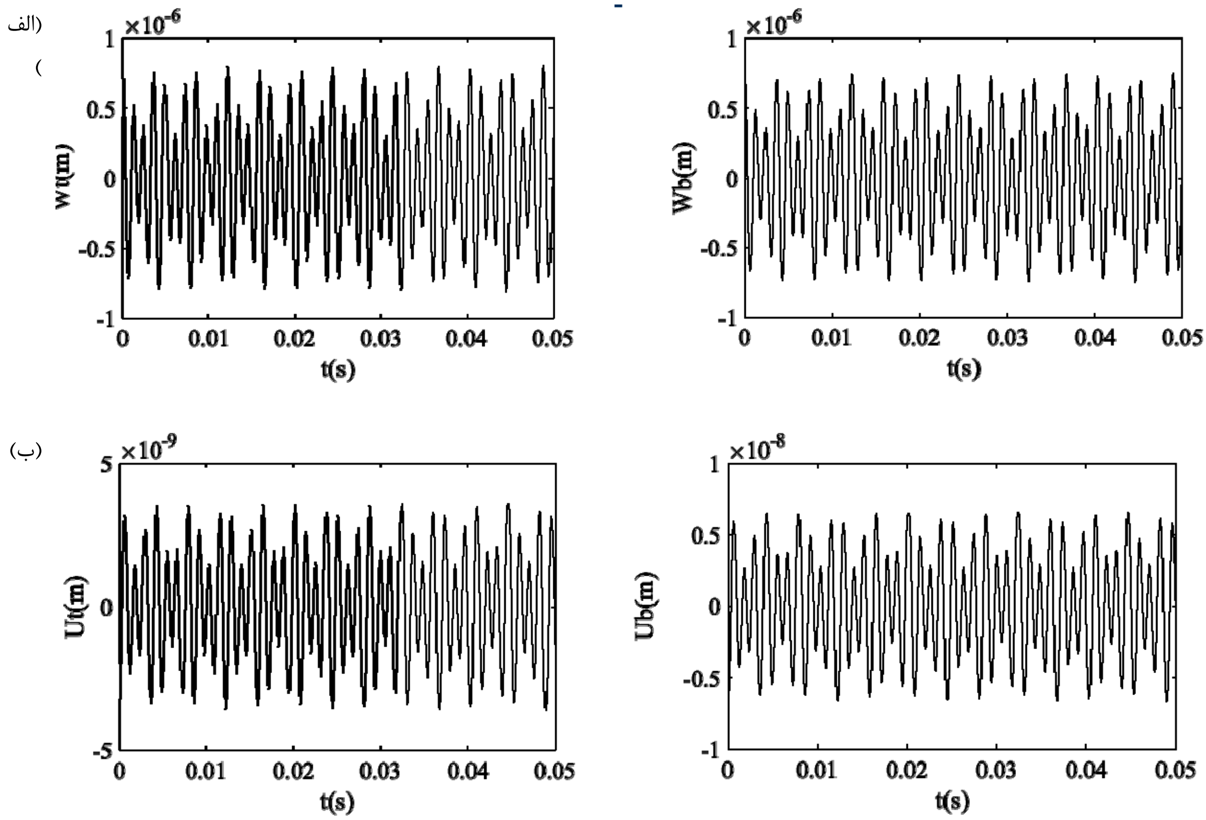
با حل رابطه (۲۲) پارامترهای مختلف سیستم به‌منظور تصدیق نواحی ناپایداری به دست می‌آید. در شکل‌های (۹-۷) پاسخ‌های زمانی نقطه A ($\Omega/2\omega = 0.8$ و $P_t = 2\times10^4 N$) **که** در شکل (۵) نشان داده شده است، رسم شده است. همان‌طور که در شکل‌های (۹-۷) نشان داده شده است، نواحی پایدار و ناپایدار انطباق مناسبی نسبت به حل معادله حرکت و استخراج مرز نواحی ناپایداری دینامیکی دارند. با توجه به نمودار شکل (۵)، نقطه A داخل ناحیه ناپایداری منحنی با $K_w = 0(N/m^2)$ قرار دارد؛ بنابراین سیستم بایستی ناپایدار باشد. همان‌طور که در شکل (۷) نشان داده شده است جابجایی عرضی و افقی رویه‌ها در تیر ساندویچی با گذشت زمان به سمت بی‌نهایت میل می‌کند که بیانگر ناپایداری سیستم است.

با توجه به نمودار شکل (۵)، نقطه A بر روی مرز ناحیه ناپایداری منحنی با $K_w = 10^7 (N/m^2)$ قرار دارد. همان‌طور که در شکل (۸) نشان داده شده است جابجایی عرضی و افقی رویه‌ها در تیر ساندویچی با گذشت زمان دارای پایداری نسبی است، اما با گذشت زمان به سمت ناپایداری میل می‌کند.

با توجه به نمودار شکل (۵)، نقطه A خارج از ناحیه ناپایداری منحنی با $K_w = 10^8 (N/m^2)$ قرار دارد. همان‌طور که در شکل (۹) نشان داده شده است جابجایی عرضی و افقی رویه‌ها در تیر ساندویچی باگذشت زمان دارای پایداری است، بنابراین سیستم پایدار است.



شکل ۸– پاسخ زمانی تیر ساندویچی در $P_t = 2\times10^4 N$. پاسخ رویه‌ها الف) در جهت عرضی W ب) در جهت افقی U برای ($P_0 = 0N$) و ($K_w = 10^7 (N/m^2)$).



شکل ۹- پاسخ زمانی تیر ساندویچی در $P_t = 2\times 10^4 N$. پاسخ رویه‌ها الف) در جهت عرضی W ب) در جهت افقی U برای ($P_0 = 0N$) و ($K_w = 10^8 (N/m^2)$).

۴-نتیجه‌گیری

هدف از انجام این پژوهش با توجه به خلأ نتایج مطالعات پیشین در زمینه ناپایداری دینامیکی تیرهای ساندویچی، استفاده از روش مرتبه بالا برای تحلیل تیر ساندویچی با هسته نرم بر روی بستر الاستیک و نیز به دست آوردن نواحی ناپایداری دینامیکی و تغییر شکل‌های تیر به دلیل اعمال بارمحوری نوسانی است. همچنین به بررسی اثر تغییرات مدول بستر الاستیک بر روی فرکانس طبیعی، فرکانس تحریک و نواحی ناپایداری پرداخته شده است. تأثیر زاویه قرارگیری الیاف رویه‌های کامپوزیتی بر روی نواحی ناپایداری نیز مورد بررسی قرار گرفته است. برای استخراج روابط حاکم از اصل همیلتون و برای حل معادله‌های به دست آمده از روش گلرگین استفاده شده است؛ بنابراین نتایج این پژوهش به صورت زیر ارائه می‌گردد:

۱- با افزایش مدول بستر الاستیک، فرکانس طبیعی سیستم افزایش می‌یابد که به دلیل افزایش سفتی تیر است.

۲- با افزایش مدول بستر الاستیک، ناحیه ناپایداری دینامیکی در فرکانس‌های تحریک بالاتر رخ می‌دهد. در واقع درصورتی‌که تیر با فرکانس تحریک مشخصی دچار ناپایداری دینامیکی شده باشد،

درصورتی‌که بر روی بستر الاستیک قرار گیرد و همان فرکانس تحریک به آن اعمال شود پایدار خواهد بود. با افزایش مقدار فرکانس تحریک، تیر در معرض ناپایداری قرار خواهد گرفت.

۳- با افزایش مدول بستر الاستیک، ناحیه ناپایداری باریک‌تر و تیر پایدارتر می‌شود. این امر به دلیل افزایش سفتی تیر است.

۴- با افزایش مدول بستر الاستیک، نواحی ناپایداری در مقادیر کمتری از نسبت $\Omega/2\omega$ ایجاد می‌شود. در واقع فرکانس تحریک افزایش می‌یابد ولی میزان افزایش فرکانس طبیعی بیشتر از میزان افزایش فرکانس تحریک است؛ بنابراین نسبت $\Omega/2\omega$ کاهش می‌یابد.

۵- هر چه زاویه الیاف کامپوزیت به سمت صفر میل کند، ناحیه ناپایداری باریک‌تر و تیر پایدارتر می‌شود. زیرا سفتی معادل تیر افزایش می یابد. همچنین در فرکانس‌های دوم و بالاتر تحریک با کاهش زاویه الیاف کامپوزیت، نواحی ناپایداری در مقادیر کمتری از نسبت $\Omega/2\omega$ رخ می‌دهد.

مراجع

[1] Frostig, Y., “Buckling of Sandwich Panels with Flexible Core-high Order Theory”, International Journal of Solids and Structures, Vol. 35, pp. 183-204, (1998)

[2] Frostig, Y., and Thomsen, O.T., “Higher-order Free Vibration of Sandwich Panel with a Flexible Core”, International Journal of Solid and Structures, Vol. 41, pp. 1697-1724, (2004).

[3] Malekzadeh, K., Khalili, M.R., and Mittal, R.K., “Local and Global Damped Vibrations of Plates with a Viscoelastic Soft Flexible Core: An Improved High-order Approach”, Journal of Sandwich Structures and Materials, Vol. 7, pp. 431-456, (2005a).

[4] Rahmani, O., Khalili, S.M.R., Malekzadeh, K., and Hadavinia, H., “Free Vibration Analysis of Sandwich Structures with a Flexible Functionally Graded Syntactic Core”, Composite Structures, Vol. 91, pp. 229-235, (2009).

[5] Malekzadeh Fard, K., “Higher Order Free Vibration of Sandwich Curved Beams with a Functionally Graded Core”, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 49, No. 5, 537-554, (2014).

[6] Khdeir, A.A., and Aldraihem, O.J., “Free Vibration of Sandwich Beams with Soft Core”, Composite Structures, Vol. 154, pp. 179-189. doi:10.1016/j.compstruct.2016.07.045. (2016).

[7] Burney, S.Z.H., and Jaeger, L.G., “A Method of Determining the Regions of Instability of a Column by a Numerical Method Approach”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 15, No. 1, pp. 75-91, (1971).

[8] Iwatsubo, T., Sugiyama, Y., and Ishihara, K., “Stability and Non-stationary Vibration of Columns under Periodic Loads”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 23, No. 2, pp. 245-257, (1972).

[9] Iwatsubo, T., Saigo, M., and Sugiyama, Y., “Parametric Instability of Clamped-clamped and Clamped-simply Supported Columns under Periodic Axial Load”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 30, No. 1, pp. 65-77, (1973).

[10] Iwatsubo, T., Sugnama, Y., and Ogino, S., “Simple and Combination Resonances of Columns under Periodic Axial Loads”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 33, No. 2, pp. 211-221, (1974).

[11] Kar, R.C., and Sujata, T., “Dynamic Stability of a Tapered Symmetric Sandwich Beam”, Computers & Structures, Vol. 40, No. 6, pp. 1441-1449, (1991).

[12] Ray, K., and Kar, R.C., “Parametric Instability of a Sandwich Beam under Various Boundary Conditions”, Comparers & Structures, Vol. 55, No. 5, pp. 857-870, (1995).

[13] Ray, K., and Kar, R.C., “Parametric Instability of a Symmetric Sandwich Beam with Higher Order Effects”, Computers & Structures, Vol. 60, No. 5, pp. 817-824, (1996).

[14] Dwivedy, S.K., Sahu, K.C., and Babu, Sk., “Parametric Instability Regions of Three-layered Soft-cored Sandwich Beam using Higher-order Theory”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 304, pp. 326-344, (2007).

[15] Dwivedy, S.K., Mahendra, N., and Sahu, K.C., “Parametric Instability Regions of a Soft and Magnetorheological Elastomer Cored Sandwich Beam”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 325, pp. 686-704, (2009).

[16] Dwivedy, S.K., and Srinivas, M., “Dynamic Instability of MRE Embedded Soft Cored Sandwich Beam with Non-conductive Skins”, Shock and Vibration, Vol. 18, pp. 759-788, (2011).

[17] Song, Z., Li, W., and Liu, G.R., “Stability and Non-stationary Vibration Analysis of Beams Subjected to Periodic Axial Forces using Discrete Singular Convolution”, Structural Engineering & Mechanics, Vol. 44, No. 4, pp. 487-499, (2012).

[18] Huang, Y.Q., Lu, H.W., Fu, J.Y., Liu, A.R., and Gu, M., “Dynamic Stability of Euler Beams under Axial Unsteady Wind Force”, Mathematical Problems in Engineering, Article ID 434868, 12 pages, (2014).

[19] Sahoo, Sh., Sahu, N.Ch., and Nayak, B., “Parametric Instability Regions of a MRE Cored Sandwich Beam Subjected to Periodic Axial Load”, Int. J. of Multidisciplinary and Current Research, 2:2321-3124 March /April, (2014).

[20] Smyczynski, M.J., and Magnucka-Blandzi, E., “Static and Dynamic Stability of an Axially Compressed Five-layer Sandwich Beam”, Thin-Walled Structures, Vol. 90, pp. 23-30, (2015).

[21] Sahoo, R., and Singh, B.N., “Dynamic Instability of Laminated-composite and Sandwich Plates using a New Inverse Trigonometric Zigzag Theory”, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 137, 061001-1, (2015).

[22] Dash, P.R., Pradhan, M., and Bisoi, A., “Parametric Instability of an Asymmetric Sandwich Beam with Thermal Gradient under Various Boundary Conditions by Computational Method”, Procedia Engineering, Vol. 144, pp. 900-907, (2016).

[23] Kumar, V., Sinha, P.K., Darbari, A.S., and Singh, S.K., “Study and Analysis of Sandwich Beam with Graded Material for Dynamic Stability and Free Vibration”, International Journal of Information Research and Review, Vol. 03, No. 1, pp. 1762-1768, (2016).

[24] Ahuja, R., and Duffieled, R.C., “Parametric Instability of Variable Cross-section Beams Resting on an Elastic Foundation”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 39, No. 2, pp. 159-174, (1975).

[25] Doyle, P.F., and Pavlovic, M.N., “Vibration of Beams on Partial Elastic Foundation”, Eartgquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, pp. 663-674, (1982).

[26] Eisenberger, M., Yankelevsky, Z., and Clastqrnik, J., “Stability of Beams on Elastic Foundation”, Computers & Structures, Vol. 24, No. 1, pp. 135-139, (1986).

[27] Yokoyama, T., “Parametric Instability of Timoshenko Beams Resting on an Elastic Foundation”, Computers & Structures, Vol. 28, No. 2, pp. 207-216, (1988).

[28] Omidi, N., Khorramabadi, M.K., and Niknejad, A., “Dynamic Stability of Functionally Graded Beams with Piezoelectric Layers Located on a Continuous Elastic Foundation”, Journal of Solid Mechanics, Vol. 1, No. 2, pp. 130-136, (2009).

[29] Pradhan, S.C., and Murmu, T., “Thermo-mechanical Vibration of FGM Sandwich Beam under Variable Elastic Foundations using Differential Quadrature Method”, Journal of Sound and Vibration Vol. 321, pp. 342-362, (2009).

[30] Tornabene, F., Fantuzzi, N., Viola, E., and Reddy, J.N., “Winkler–Pasternak Foundation Effect on the Static and Dynamic Analyses of Laminated Doubly-Curved and Degenerate Shells and Panels”, Composites Part B: Engineering, Vol. 57, pp. 269-296, (2014).

[31] Pourasghar, A., and Chen, Z., “Thermoelastic Response of CNT Reinforced Cylindrical Panel Resting on Elastic Foundation using Theory of Elasticity”, Composites Part B: Engineering, Vol. 99, pp. 436-444, (2016).

[32] Moradi-Dastjerdi, R., and Momeni-Khabisi, H., “Vibrational Behavior of Sandwich Plates with Functionally Graded Wavy Carbon Nanotube-reinforced Face Sheets Resting on Pasternak Elastic Foundation”, JVC/Journal of Vibration and Control, Vol. 24, No. 11, pp. 2327-2343, (2018).

[33] Akour, S.N., “Dynamics of Nonlinear Beam on Elastic Foundation”, Proceedings of the World Congress on Engineering, Vol. II, London, U.K, (2010).

[34] Mohanty, S.C., Dash, R.R., and Rout, T., "Parametric Instability of a Functionally Graded Timoshenko Beam on Winkler's Elastic Foundation", Nuclear Engineering and Design, Vol. 241, pp. 2698-2715, (2011).

[35] Bose, S., Chugh, P., and Gupta, A., "Effect of Elastic Foundation & Damping on Parametric Instability of Beams", Int. Conf. on Structural and Civil Engineering, Bangalore, India, 3-4 August, (2012).

[36] Arefi, M., "Nonlinear Analysis of a Functionally Graded Beam Resting on the Elastic Nonlinear Foundation", Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Sofia, Vol. 44, No. 2, pp. 71-82, (2014).

[37] Pradhan, M., and Dash, P.R., "Stability of an Asymmetric Tapered Sandwich Beam Resting on a Variable Pasternak Foundation Subjected to a Pulsating Axial Load with Thermal Gradient", Composite Structures, Vol. 140, pp. 816-834, (2016).

[38] Pradhan, M., Mishra, M.K., and Dash, P.R., "Free Vibration Analysis of an Asymmetric Sandwich Beam Resting on a Variable Pasternak Foundation", Procedia Engineering, Vol. 144, pp. 116-123, (2016).

[39] Sirati, D., Hayati, M., and Askari, M., "Static Analysis of Sandwich Beams with FGM Core Resting on Elastic Foundation", Journal of Automotive and Applied Mechanics, Vol. 4, No. 1, pp. 24-30, (2016).

[40] Tossapanon, P., and Wattanasakulpong, N., "Stability and Free Vibration of Functionally Graded Sandwich Beams Resting on Two-parameter Elastic Foundation", Composite Structures, Vol. 142, pp. 215-225, (2016).

[41] Bolotin, V.V., "*The Dynamic Stability of Elastic Systems*", Holden-Day, San Francisco, (1964).

[42] Reddy, N.R., "*Theory and Analysis of Elastic Plate and Shells*", Second Edition, London, Taylor & Francis, pp. 547, (2007).

[43] Reddy, J.N., "*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*", Theory and Analysis, 2nd Edition, CRC Press, New York, (2004).

فهرست نمادهای انگلیسی

P_0: نیروی استاتیکی

P_t: نیروی دینامیکی(دامنه نیروی نوسانی)

dV_t, dV_c, dV_b: المان حجم رویه بالا، المان حجم هسته، المان حجم رویه پایین

N_{xx}^i: نیروی محوری قائم در واحد طول رویه‌ها ($i = t, b$)

M_{xx}^i: گشتاور خمشی قائم در واحد طول لبه رویه‌ها ($i = t, b$)

N_{xx}^{c}: نیروی محوری قائم در واحد طول هسته
$M_{zz}^{c}, P_{zz}^{c}, S_{zz}^{c}$: گشتاور خمشی قائم در واحد طول لبه هسته
N_{zz}^{c}: نیروی محوری قائم در واحد طول هسته
Q_{xz}^{c}: نیروی برشی در واحد طول هسته
$M_{xx}^{c}, P_{xx}^{c}, S_{xx}^{c}, M_{xz}^{c}, P_{xz}^{c}, S_{xz}^{c}$: گشتاورهای خمشی و برشی در واحد طول لبه هسته
u_k, w_k: مجهولات جابجایی صفحه‌ای هسته ($k = 0,1,2,3$)
u_c, w_c: اجزای جابجایی هسته
u_o^i, w_o^i: اجزای جابجایی رویه‌ها
z_t, z_c, z_b: مختصات عرضی در صفحه میانی رویه‌ها و هسته

نمادهای یونانی

ω: فرکانس طبیعی
Ω: فرکانس تحریک نیروی محوری
ε_{0xx}^{i}: اجزای کرنش صفحه میانی رویه‌ها($i = t,b$)
$\varepsilon_{zz}^{c}, \varepsilon_{xx}^{c}$: کرنش‌های قائم هسته
γ_{xz}^{c}: کرنش برشی هسته

Abstract

The purpose of the present work was to study the dynamic instability of a three-layered sandwich beam with flexible core and simply supported boundary conditions subjected to a periodic axial load resting on elastic foundation. A higher-order theory was used for analysis of sandwich beams.
In this theory, the classical theory was used for the face sheets and quadratic and cubic functions were assumed for the core, respectively. The elastic foundation was modeled as Winkler's type. The dynamic instability regions were investigated for simply supported conditions by Bolotin's method. The governing equations derived by the principle of minimum potential energy. The results showed that the responses of the dynamic instability of the system were influenced by the excitation frequency, the foundation modulus and the angle of the plies. Comparison of the present results with the published results in the literature for the special case confirmed the accuracy of the proposed theory.