نشریه مهندسی مکانیک
انجمن مهندسان مکانیک ایران
مقاله علمی پژوهشی
DOI: 10.30506/ijmep.2020.101220.1513

محاسبه ضرایب شدت تنش در نیم صفحه ساخته شده از مواد ارتوتروپیک تابعی تضعیف شده توسط چندین ترک لبه‌ای تحت بارگذاری ضربه‌ای

مجتبی محمودی منفرد[۱]
استادیار

رسول باقری[۲]
استادیار

با استفاده از روش توزیع نابجایی[۳] تحلیل تنش در نیم صفحه‌ی ساخته شده از مواد ارتوتروپیک تابعی تضعیف شده توسط چندین ترک لبه‌ای تحت بار خارج صفحه‌ای ضربه‌ای انجام شده است. ابتدا حل نابجایی[۴] با تشکیل معادله حاکم و اعمال شرایط مرزی و پیوستگی در محل نابجایی با استفاده از تبدیلات فوریه و لاپلاس انجام می‌گردد. با استفاده از این حل، معادلات انتگرالی تکین از نوع کوشی برای ترک‌های لبه‌ای در نیم صفحه ی ساخته شده از مواد ارتوتروپیک تابعی تشکیل می‌شوند. سپس با استفاده از روش عددی این معادلات حل گردیده تا تابع توزیع نابجایی روی ترک‌ها بدست آید. چندین مثال حل شده تا اثرات ثابت‌های ماده، پارامتر ناهمگنی و موقیت ترک بر روی ضریب شدت تنش دینامیکی در نیم صفحه ساخته شده از ماده ارتوتروپیک تابعی مورد مطالعه قرار بگیرد.

واژه‌های راهنما: نابجایی ولترا- بارگذاری خارج صفحه‌ای ضربه‌ای- نیم صفحه‌ی ساخته شده از مواد ارتوتروپیک تابعی- ضرایب شدت تنش دینامیکی

۱- مقدمه

مطالعات بر روی مواد کاربردی جدیدی که مواد تابعی[۵] نامیده می‌شوند نشان می‌دهد که این مواد قابلیت مقاومت در دماهای بسیار بالا و تحمل تغییرات دمای زیاد بین دو سطح خود را دارا می‌باشند. این مطالعات به منظور مهیا کردن موادی صورت گرفت که در ساختارهای فضایی، بدنه هواپیماها، جت‌ها یا در رآکتورهای هسته‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. مواد تابعی ترکیبی از مواد مختلفی مانند سرامیک و یا فلزات می‌باشند که از لحاظ میکروسکوپی خواص ماده هموژن و یا همگن را ندارند. بنابراین تحلیل تنش در مواد تابعی شامل ترک تحت بارگذاری دینامیکی از اهمیت بسزایی برخوردار است. در ابتدا مروری بر تحقیقات انجام شده در زمینه تحلیل تنش محیط‌های ساخته شده از مواد تابعی حاوی ترک تحت بار دینامیکی انجام می‌گیرد.

---

[۱] نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد هشتگرد، دانشگاه آزاد اسلامی، هشتگرد، ایران
mo_m_monfared@yahoo.com
[۲] استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران
تاریخ دریافت: ۹۷/۱۰/۱۶، تاریخ پذیرش: ۹۸/۰۴/۲۳

[3] Distributed dislocation technique
[4] Dislocation
[5] Functionally graded materials

اولین تحلیل دینامیکی ترک توسط A.W. Maue [۱] انجام شده است. وی اثر امواج تنش هارمونیک را روی یک ترک نیمه بینهایت واقع در محیط نامحدود بررسی نمود و برای حل مسأله از روش وینر-هاف[1] استفاده کرد. G. Sih [۲] مسائل الاستودینامیکی برای ترک در حال رشد را ارائه داد و میدان‌های جابجایی و تنش دینامیکی را برای یک ترک با طول محدود بدست آورد. او همچنین پراش امواج برشی از یک ترک را حل نمود و سپس برخورد امواج ضربه‌ای به محیط حاوی ترک را نیز مورد مطالعه قرار داد. نیم صفحه‌ی همسانگرد تضعیف شده توسط یک ترک محدود تحت بارگذاری درون صفحه‌ای ضربه‌ای توسط S. Itou [۳] مورد بررسی قرار گرفت. ترک بصورت عمود بر مرز نیم صفحه قرار گرفته بود و همچنین سطوح ترک تحت فشار یکنواخت با تابع پله‌ای وابسته به زمان بارگذاری شده بود. اثر مرز نیم صفحه بر روی ضریب شدت تنش دینامیکی در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفت بطوریکه با افزایش مرز ضریب شدت تنش کاهش می‌یافت. Y.S. Ing, C.C. Ma [۴] یک ترک محدود در محیط الاستیک تحت بارگذاری دینامیکی گذرای خارج صفحه‌ای را مورد مطالعه قرار داده‌اند. آنها با استفاده از تبدیل فوریه و لاپلاس ضریب شدت تنش دینامیکی را بصورت حل صریح بدست آورند. نتایج تحقیق آنها نشان داد که ضریب شدت تنش دینامیکی با گذر زمان بصورت نوسانی به مقادیر استاتیکی همگر می‌شود. C. Zhang [۵] ضریب شدت تنش دینامیکی برای یک ترک واقع در یک صفحه ناهمسانگرد تحت بارگذاری ضربه‌ای پادصفحه‌ای را انجام داد. در این تحقیق، اثرات ناهمسانگردی و تغییرات زمان بر روی ضرایب شدت تنش مطالعه گردید.

C.W. Shul, K. Y., Lee [۶] اثرات بار ضربه‌ای متقارن را روی ترک گریفیث در یک ماده ارتوتروپیک بررسی کردند. آنها از روش تبدیلات انتگرالی برای بدست آوردن ضریب شدت تنش بهره بردند. آنها نشان دادند که فراجهش نمونه در ضریب تمرکز تنش دینامیکی به اندازه ۲۲٪ از ضریب تمرکز تنش استاتیکی بیشتر است و اینکه مقدار فراجهش تحت تاثیر مشخصات ماده و همچنین موقعیت نسبی بین ترک و نیروهای اعمالی می‌باشد. ترک داخلی عمود بر مرز باریکه ساخته شده از ماده ارتوتروپیک تابعی تحت بارگذاری گذرا توسط J. Chen و همکارانش [۷] مورد بررسی قرار گرفت. در این تحقیق از دانسیته نابجایی برای تشکیل معادلات انتگرالی استفاده شده بود. افزایش ضریب شدت تنش با افزایش ناهمگنی ماده و تأثیر اندک ثابت‌های ارتوتروپیک بر روی ضریب شدت تنش در این مطالعه گزارش گردید. مدل لایه‌ای در باریکه ساخته شده از ماده تابعی تضعیف شده توسط ترک‌های موازی تحت بارگذاری گذرا توسط

N. Noda, B. Wang [۸] ارائه شد. با استفاده از تبدیلات لاپلاس و فوریه، مسأله مورد نظر به یک دستگاه معادلات تکین منجر گردید که این معادلات توسط روش‌های عددی حل شدند. همچنین در نتایج عددی، دو ترک موازی در باریکه ساخته شده از ماده تابعی آنالیز شده بود که اثرات ضریب ناهمگنی و موقعیت ترک بر روی ضرایب شدت تنش مورد بررسی قرار گرفته شده بود. W. Feng و همکارانش [۹] با استفاده از تبدیلات فوریه کسینوسی و لاپلاس ترک داخلی موازی مرز باریکه ساخته شده از ماده ارتوتروپیک تابعی تحت بار گذرا را بررسی کردند. آنها مشاهده کردند که ضریب ناهمگنی نسبت به ضرایب ارتوتروپیک بر روی ضریب شدت تاثیر چشم گیری دارد. ترک‌های واقع در فصل مشترک بین دو نیم صفحه همگن و لایه ناهمگن تحت بار ضربه‌ای توسط S. Itou [۱۰] مطالعه گردید.

---

[1] Wiener-Hopf

با استفاده از تبدیل فوریه مسأله به دو جفت معادلات انتگرالی در فضای لاپلاس کاهش یافت که برای حل این معادلات اختلاف بین جابجایی سطوح ترک توسط یک سری بیان گردید که با استفاده از روش اشمیت[1] ضرایب مجهول این سری محاسبه گردید و در نهایت ضرایب شدت تنش بدست آمد. A. Hejazi و همکارانش [۱۱] تحلیل تنش در یک نیم صفحه ساخته شده از ماده ارتوتروپیک تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای گذرا، تضعیف شده توسط چندین ترک را انجام دادند. با استفاده از تبدیلات فوریه، جابجایی‌ها و تنش‌ها در فضای لاپلاس حاصل گردید و سپس با استفاده از روش کاگنیارد-دی هوپ[2] معکوس تبدیل لاپلاس محاسبه گردید که در نهایت اثر ضریب ارتوتروپیک، تغییرات طول ترک و اثر زمان بر روی ضریب شدت تنش مورد بررسی قرار گرفت. نتیجه حاصل از این مطالعه تاثیر قابل توجه زمان و طول ترک بر روی ضریب شدت تنش را نشان داد. تحلیل تنش دینامیکی گذرا در صفحه بینهایت همسانگرد تضعیف شده با چندین ترک منحنی توسط M. Ayatollahi, M.M. Monfared [۱۲] مورد بررسی قرار گرفت. در این مطالعه با استفاده از تبدیل فوریه، جابجایی‌ها و تنش‌ها در فضای لاپلاس بدست آمد که در نهایت با استفاده از توزیع دانسیته نابجایی بر روی سطوح ترک ضرایب شدت تنش در نوک ترک‌ها محاسبه گردید

J. Chen K. Wu, [۱۳] ضریب شدت تنش دینامیکی در یک صفحه همگن تضعیف شده توسط چندین ترک هم راستا تحت بارگذاری گذرا مورد مطالعه قرار گرفت. در این مطالعه حل مسأله منجر به معادلات انتگرالی گردید که با استفاده از روش گوس- چبیشف[3] حل شد و سپس ضرایب شدت تنش دینامیکی با روش عددی معکوس لاپلاس بدست آمد. چندین ترک واقع در فصل مشترک بین دولایه همسانگرد و ناهمسانگرد تحت بارگذاری ضربه‌ای با استفاده از روش نابجایی توسط P. Yousefi و همکارانش [۱۴] مورد بررسی قرار گرفت. در این تحقیق اثرات ناهمسانگردی، اندرکنش بین ترک‌ها و اثرات زمان بر روی ضرایب شدت تنش دینامیکی بررسی شد. نیم صفحه‌ی ساخته شده از ماده ارتوتروپیک تابعی تضعیف شده توسط چندین ترک لبه‌ای و داخلی تحت بار ضربه‌ای در این مقاله انجام شده است. ابتدا معادله حاکم بر محیط ارتوتروپیک تابعی با توجه به بارگذاری خارج صفحه‌ای بدست آمده است.

سپس با استفاده از تبدیلات فوریه و لاپلاس معادله حاکم به معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه‌ی دوم تبدیل شده که با ارضاء کردن شرایط مرزی و همچنین شرط چند مقداری بودن جابجایی‌ها روی لبه‌های برش مقدار جابجایی‌ها و در نهایت تنش‌ها در فضای لاپلاس بدست آمده است. حل مسأله منجر به معادلات انتگرالی بر روی سطوح ترک‌ها شده که این معادلات دارای تکینگی از نوع کوشی بوده و حل آنها توسط روش عددی گاوس- چبیشف[4] انجام می‌گردد. همچنین محاسبه معکوس لاپلاس با استفاده از روش استهفست[5] [۱۵] انجام شده است که درنهایت ضرایب شدت تنش برای نوک ترک‌های داخلی و لبه‌ای بدست آمده است. مزیت این روش دراین است که آنالیز تعداد ترک‌های بکار رفته در روش حل تاثیری ندارد.

---

[1] Schmidt
[2] Cagniard-de Hoop
[3] Gauss- Chebyshev
[4] Chebyshev- Gauss
[5] Estehfest

۲- حل نابجایی خارج صفحه‌ای

نیم صفحه ساخته شده از ماده ارتوتروپیک تابعی دارای مرز h می‌باشد که در شکل (۱) نشان داده شده است. مطابق شکل (۱)، برش در محیط بصورت عمود بر مرز و از نقطه $(0,\xi)$ ایجاد شده است. مؤلفه‌های جابجایی با u,v و w به ترتیب درراستای محورهای x,y و z نمایش داده می‌شوند. در این مقاله مؤلفه‌های جابجایی درون صفحه‌ای به دلیل بررسی مود سوم مکانیک شکست صفر بوده و فقط مؤلفه تغییر مکان عمود بر صفحه w که تابعی از مختصات درون صفحه‌ای x,y و زمان t است وجود خواهد داشت که بصورت زیر قابل نمایش می‌باشند:

$$u=0,\ v=0, w=w(x,y,t) \tag{۱}$$

برای تغییر شکل‌های خارج صفحه‌ای، روابط بین تنش و جابجایی در ماده تابعی ارتوتروپیک بصورت زیر می‌باشند:

$$\sigma_{zx}=\mu_x(y)\frac{\partial w}{\partial x},\ \sigma_{zy}=\mu_y(y)\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{۲}$$

که در آن $\mu_x(y)$ و $\mu_y(y)$ به ترتیب مدول‌های برشی ارتوتروپیک در جهات x و y می باشند که بصورت توابعی از متغیر y در نظر گرفته شده‌اند. جهت ساده سازی معادلات ریاضی مدول‌های برشی الاستیسیته بصورت زیر فرض شده‌اند:

$$\mu_y(y)=\mu_{y0}e^{2\beta y},\ \mu_x(y)=\mu_{x0}e^{2\beta y}. \tag{۳}$$

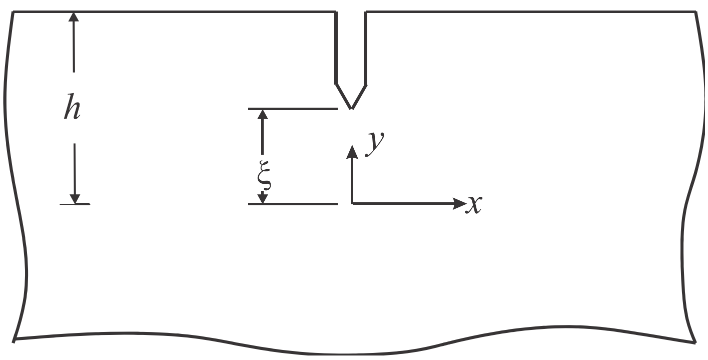
که در آن μ_{x0} و μ_{y0} ثابت‌های ارتوتروپیک در $y=0$ و همچنین β ثابت ناهمگنی ماده است. در صورت نبود نیروهای جسمی، معادله حرکت برای بارگذاری خارج صفحه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}=\rho(y)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{۴}$$

در رابطه بالا $\rho(y)$ چگالی ماده تابعی است که بصورت $\rho(y)=\rho_0 e^{2\beta y}$ در نظر گرفته شده است. با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۴) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{f^2}[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\beta\frac{\partial w}{\partial y}]=c^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{۵}$$

که در رابطه بالا $f=\sqrt{\frac{\mu_{x0}}{\mu_{y0}}}$ ، $c=\frac{1}{C}$ و $C=\sqrt{\frac{\mu_{x0}}{\rho_0}}$ سرعت انتشار موج برشی در ماده است.



شکل۱- نمایش نابجایی در نیم صفحه

رابطه (۵) بیانگر دستگاه معادلات با مشتقات جزئی است. حل تحلیلی دستگاه معادلات با مشتقات جزئی رابطه (۵) نیازمند بررسی شرایط مرزی مسأله است. مطابق شکل (۱) نابجایی در نقطه $(0,\xi)$ در نیم صفحه قرار گرفته است. مؤلفه تغییر مکان براساس تئوری ولترا در محل نابجایی به دلیل چند مقداری بودن تغییر مکان روی خط نابجایی دارای ناپیوستگی بوده و در نتیجه می توان رابطه زیر را در نظر گرفت:

$$w(0^+,y,t)-w(0^-,y,t)=b_z(t)H(y-\xi) \tag{۶}$$

که $H(.)$ تابع واحد پله‌ای و b_z مؤلفه بردار برگرز[1] هستند. همچنین مؤلفه‌های تنش روی خط نابجایی دارای پیوستگی می‌باشند که این شرط عبارت است از:

$$\sigma_{zx}(0^+,y,t)=\sigma_{zx}(0^-,y,t) \tag{۷}$$

با توجه به شکل (۱)، شرایط مرزی، شرایط پیوستگی و شرایط حدی مسأله به ترتیب بصورت زیر می‌باشند:

$$\begin{gathered}\sigma_{zy}(x,h)=0,\\ \sigma_{zx}(0^+,y,t)=\sigma_{zx}(0^-,y,t),\\ \lim_{|x|\to\infty} w(x,y,t)=\lim_{|x|\to\infty}\sigma_{zx}(x,y,t)=\lim_{|x|\to\infty}\sigma_{zy}(x,y,t)=0.\end{gathered} \tag{۸}$$

برای حل مسأله از تبدیلات فوریه سینوسی و لاپلاس استفاده شده است که به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}F(\lambda)&=\int_0^\infty f(x)\sin(\lambda x)\,dx,\\ L(s)&=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt,\ s>0.\end{aligned} \tag{۹}$$

معکوس تبدیل فوریه عبارت است از:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\lambda)\sin(\lambda x)\,d\lambda \tag{۱۰}$$

با توجه به تقارن مسأله نسبت به محور y شرایط (۸) بصورت زیر تبدیل می شوند:

$$\begin{aligned}&\sigma_{zy}(x,h,t)=0,\\ &w(0^+,y,t)=\frac{b_z(t)}{2}H(y-\xi),\\ &\lim_{|x|\to\infty} w=0.\end{aligned} \tag{۱۱}$$

برای حل معادله (۵) با شرایط (۱۱)، مناسب است که نیم صفحه به دو ناحیه $y<\xi$ و $\xi<y<h$ تقسیم شود. شرایط پیوستگی نیازمند در دو ناحیه بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}&w(x,\xi^+,t)=w(x,\xi^-,t),\\ &\sigma_{zy}(x,\xi^+,t)=\sigma_{zy}(x,\xi^-,t).\end{aligned} \tag{۱۲}$$

با اعمال تبدیلات (۹) به معادله (۵) و با استفاده از حذف شدن تغییر مکان در فواصل دور از نابجایی و همچنین شرایط اولیه صفر برای لاپلاس معادله دیفرانسیل درجه دوم کامل بصورت زیر حاصل می‌شود:

---

[1] Burgers vector

$$\frac{d^2W^*}{dy^2}+2\beta\frac{dW^*}{dy}-f^2(\lambda^2+s^2c^2)W^*=-f^2\lambda\frac{b_z(s)}{2}H(y-\xi) \qquad (۱۳)$$

که در آن W^* تبدیل یافته فوریه و لاپلاس w است. معادله بالا را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2W^*}{dy^2}+2\beta\frac{dW^*}{dy}-f^2(\lambda^2+s^2c^2)W^*=0, && y<\xi\\ &\frac{d^2W^*}{dy^2}+2\beta\frac{dW^*}{dy}-f^2(\lambda^2+s^2c^2)W^*=-f^2\lambda\frac{b_z(s)}{2}, && \xi<y<h\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

حل معادله‌های دیفرانسیل رابطه (۱۴) عبارت است از:

$$\begin{aligned}&W^*(\lambda,y,s)=A_1e^{(-\beta+\alpha)y}, && y<\xi\\ &W^*(\lambda,y,s)=A_2e^{(-\beta+\alpha)y}+B_2e^{-(\beta+\alpha)y}+\frac{\lambda b_z(s)}{2(\lambda^2+s^2c^2)}, && \xi<y<h\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

که در آن $\alpha=\sqrt{\beta^2+f^2(\lambda^2+s^2c^2)}$ و A_1,A_2,B_2 ضرایب مجهول می‌باشند. با استفاده از اولین ترم رابطه (۱۱) و رابطه (۱۲) ضرایب مجهول معادله بالا بصورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\B_2\end{bmatrix}=\frac{\lambda e^{(\alpha+\beta)\xi}b_z(s)}{4\alpha(\lambda^2+s^2c^2)}\begin{bmatrix}(\alpha+\beta)(e^{-2\alpha\xi}-e^{-2\alpha h})\\-(\alpha+\beta)e^{-2\alpha h}\\(\beta-\alpha)\end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

با جایگذاری رابطه (۱۶) در رابطه (۱۵) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}&W^*(\lambda,y,s)=\frac{\lambda b_z(s)(\alpha+\beta)e^{(\xi-y)\beta}}{4\alpha(\lambda^2+s^2c^2)}[e^{-\alpha(\xi-y)}-e^{\alpha(y+\xi-2h)}],\quad y<\xi,\\ &W^*(\lambda,y,s)=-\frac{\lambda b_z(s)e^{(\xi-y)\beta}}{4\alpha(\lambda^2+s^2c^2)}[(\alpha+\beta)e^{\alpha(y+\xi-2h)}+(\alpha-\beta)e^{-\alpha(y-\xi)}]+\frac{\lambda b_z(s)}{2(\lambda^2+s^2c^2)},\quad \xi<y<h.\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

با اعمال رابطه (۱۰) به رابطه (۱۷) مؤلفه‌های جابجایی در دو ناحیه بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&W(x,y,s)=\frac{b_z(s)e^{(\xi-y)\beta}}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda(\alpha+\beta)\sin(\lambda x)}{\alpha(\lambda^2+s^2c^2)}[e^{-\alpha(\xi-y)}-e^{\alpha(\xi+y-2h)}]d\lambda,\quad y<\xi,\\ &W(x,y,s)=\frac{-b_z(s)e^{\beta(\xi-y)}}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda\sin(\lambda x)}{\alpha(\lambda^2+s^2c^2)}[(\alpha-\beta)e^{-\alpha(y-\xi)}+(\alpha+\beta)e^{\alpha(\xi+y-2h)}]d\lambda\\ &\qquad+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x)e^{-sc|x|}b_z(s),\quad \xi<y<h.\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

در رابطه بالا sgn نشان دهنده‌ی تابع علامت است. با جایگذاری رابطه (۱۸) در رابطه (۲) مؤلفه‌های تنش مطابق زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} \sigma_{zx}(x,y,s) = \int_0^\infty I_{zx1}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y<\xi \\ \sigma_{zy}(x,y,s) = \int_0^\infty I_{zy1}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sigma_{zx}(x,y,s) = -\frac{\mu_{x0}}{2} s\,c\,e^{-sc|x|+2\beta y} b_z(s) + \int_0^\infty I_{zx2}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \xi<y<h. \\ \sigma_{zy}(x,y,s) = \int_0^\infty I_{zy2}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda, \end{cases} \qquad (۱۹)$$

در رابطه (۱۹) انتگرندهای انتگرال‌ها بصورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} I_{zx1}(x,y,s,\lambda) &= \frac{\mu_{x0} b_z(s) e^{\beta(\xi+y)} \lambda^2(\alpha+\beta)}{2\pi\alpha(\lambda^2+s^2c^2)}[e^{-\alpha(\xi-y)} - e^{\alpha(y+\xi-2h)}]\cos(\lambda x), \\ I_{zy1}(x,y,s,\lambda) &= -\frac{\mu_{y0} b_z(s) e^{\beta(\xi+y)} \lambda(\alpha^2-\beta^2)}{2\pi\alpha(\lambda^2+s^2c^2)}[e^{-\alpha(\xi-y)} - e^{\alpha(y+\xi-2h)}]\sin(\lambda x)d\lambda, \\ I_{zx2}(x,y,s,\lambda) &= \frac{-\mu_{x0} b_z(s) e^{\beta(\xi+y)} \lambda^2}{2\pi\alpha(\lambda^2+s^2c^2)}[(\alpha-\beta)e^{-\alpha(y-\xi)} + (\alpha+\beta)e^{\alpha(y+\xi-2h)}]\cos(\lambda x), \\ I_{zy2}(x,y,s,\lambda) &= \frac{-\mu_{y0} b_z(s) e^{\beta(\xi+y)} \lambda}{2\pi\alpha(\lambda^2+s^2c^2)}(\beta^2-\alpha^2)[e^{-\alpha(y-\xi)} - e^{\alpha(y+\xi-2h)}]\sin(\lambda x). \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

۲-۱- بررسی رفتار انتگرندها

به منظورتعیین رفتارتکینگی مؤلفه‌های تنش، باید رفتار مجانبی انتگرندها در حدود بالا و پایین انتگرال‌گیری را بررسی نمود. چون انتگرندها برای $0 < \lambda < \infty$ توابع پیوسته‌ای نسبت به پارامتر λ هستند.

تکینگی مؤلفه‌های تنش در $\lambda = 0$ و یا هنگامیکه λ به سمت بینهایت $\lambda \to \infty$ میل می‌کند اتفاق می‌افتند. انتگرندهای روابط (۲۰) وقتیکه $\lambda \to 0$ مقداری ثابت می‌باشند در نتیجه رفتار انتگرندها در رابطه (۲۰) مربوط به مؤلفه‌های تنش در نقطه $\lambda = 0$ محدود خواهند بود. با میل دادن انتگرندها به بینهایت در رابطه (۲۰) نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} I_{zx1\infty}(x,y,s,\lambda) &= \frac{\mu_{x0} b_z(s) e^{\beta(\xi+y)}}{2\pi} e^{-f\lambda(\xi-y)} \cos(\lambda x), \\ I_{zy1\infty}(x,y,s,\lambda) &= \frac{\mu_{y0} b_z(s) e^{\beta(\xi+y)}}{2\pi} e^{-f\lambda(\xi-y)} \sin(\lambda x), \\ I_{zx2\infty}(x,y,s,\lambda) &= -\frac{\mu_{0x} b_z(s) e^{\beta(\xi+y)}}{2\pi} e^{-f\lambda(y-\xi)} \cos(\lambda x), \\ I_{zy2\infty}(x,y,s,\lambda) &= \frac{\mu_{0y} b_z(s) e^{\beta(\xi+y)}}{2\pi} e^{-f\lambda(y-\xi)} \sin(\lambda x). \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

روابط مجانبی (۲۱) را از انتگرندهای (۲۰) کم و اضافه کرده تا بتوان جملات مربوط به تکینگی میدان تنش را بدست آورد.

$$\sigma_{zx1}(x,y,s)=\int_0^\infty I_{zx1}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda=\int_0^\infty I_{zx1\infty}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda+\int_0^\infty [I_{zx1}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda-I_{zx1\infty}(x,y,s,\lambda)]\,d\lambda,$$
$$\sigma_{zy1}(x,y,s)=\int_0^\infty I_{zy1}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda=\int_0^\infty I_{zy1\infty}(x,y,s,\lambda)d\lambda+\int_0^\infty [I_{zy1}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda-I_{zy1\infty}(x,y,s,\lambda)]\,d\lambda,$$
$$y<\xi$$
$$\sigma_{zx2}(x,y,s)=\int_0^\infty I_{zx2}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda=\int_0^\infty I_{zx2\infty}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda+\int_0^\infty [I_{zx2}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda-I_{zx2\infty}(x,y,s,\lambda)]\,d\lambda,$$
$$\sigma_{zy2}(x,y,s)=\int_0^\infty I_{zy2}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda=\int_0^\infty I_{zy2\infty}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda+\int_0^\infty [I_{zy2}(x,y,s,\lambda)\,d\lambda-I_{zy2\infty}(x,y,s,\lambda)]\,d\lambda.$$
$$\xi<y<h$$
(۲۲)

درنهایت مؤلفه‌های میدان تنش را برای هر دو ناحیه می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\sigma_{zx1}(x,y,s)=\frac{f\,\mu_{x0}b_z(s)e^{\beta(\xi+y)}}{2\pi}\frac{(\xi-y)}{x^2+f^2(\xi-y)^2}+\int_0^\infty [I_{zx1}(x,y,s,\lambda)d\lambda-I_{zx1\infty}(x,y,s,\lambda)]\,d\lambda,$$
$$\sigma_{zy1}(x,y,s)=\frac{\mu_{y0}b_z(s)e^{\beta(\xi+y)}}{2\pi}\frac{x}{x^2+f^2(\xi-y)^2}+\int_0^\infty [I_{zy1}(x,y,s,\lambda)d\lambda-I_{zy1\infty}(x,y,s,\lambda)]\,d\lambda,$$
$$y<\xi$$
$$\sigma_{zx2}(x,y,s)=-\frac{1}{2}\mu_{x0}s\,c\,e^{-sc|x|+2\beta y}b_z(s)-\frac{f\,\mu_{0x}b_z(s)e^{\beta(\xi+y)}}{2\pi}\frac{y-\xi}{x^2+f^2(y-\xi)^2}$$
$$+\int_0^\infty [I_{zx2}(x,y,s,\lambda)d\lambda-I_{zx2\infty}(x,y,s,\lambda)]\,d\lambda,$$
$$\sigma_{zy2}(x,y,s)=\frac{\mu_{0y}b_z(s)e^{\beta(\xi+y)}}{2\pi}\frac{x}{x^2+f^2(y-\xi)^2}+\int_0^\infty [I_{zy2}(x,y,s,\lambda)d\lambda-I_{zy2\infty}(x,y,s,\lambda)]\,d\lambda.$$
$$\xi<y<h$$
(۲۳)

مؤلفه‌های تنش بدست آمده در بالا دارای تکینگی از نوع کوشی می باشند زمانیکه $y\to\xi$ و $x\to 0$ میل می‌کنند. این انتگرال‌ها با بزرگ شدن حد انتگرال به سرعت همگرا شده و با روش های عددی مناسب به راحتی قابل محاسبه می‌باشند.

۳- معادلات انتگرالی در محیط‌های حاوی ترک

در بخش ۲ حل یک نابجایی واقع در نیم صفحه ارتوتروپیک تابعی بصورت کامل بیان گردید، که از این حل می‌توان برای یافتن ضرایب شدت تنش در نوک ترک‌های داخلی و لبه‌ای واقع در نیم صفحه تحت بارگذاری مود سوم مکانیک شکست استفاده نمود. معادلات پارامتری ترک‌ها بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$x_i=x_{0i},\quad y_i=y_{0i}+pa_i\qquad i=1,2,\dots,N\qquad -1\le p\le 1\qquad (۲۴)$$

که در آن (x_{0i}, y_{0i}) مختصات وسط ترک iام و a_i نصف طول ترک iام می‌باشد. با قراردادن توزیع نابجایی با چگالی $b_{zi}(q,s)da$ در راستای ترک در نقطه‌ای از ترک j ام به مختصات $(x_i(p), y_i(p))$ روی المان بینهایت کوچک da، میدان تنش ایجاد شده روی سطح ترک i ام در صورتیکه N ترک وجود داشته باشد بدست می‌آید که عبارتست از:

$$\sigma_{zx}(x_i(p), y_i(p), s) = \sum_{j=1}^{N}\int_{-1}^{1} k_{ij}(p,q,s) b_{zj}(q,s) da,\ \ i=1,2,...,N, -1 \le p \le 1.\ \ i=1,2,...,N \tag{۲۵}$$

که در رابطه (۲۵) $da = \sqrt{[x_j'(q)]^2 + [y_j'(q)]^2}\, dq = a_j dq$ المان طول روی مرز ترک می باشد. کرنل‌ها در معادله (۲۵) دارای تکینگی از نوع کوشی خواهند بود زمانیکه $i = j$ و $p \to q$ بنابراین با استفاده از بسط سری تیلور زیر:

$$\begin{aligned} x_i(p) &= x_i(q) + (p-q)x_i'(q) + \frac{(p-q)^2}{2!} x_i''(q) + ..., \\ y_i(p) &= y_i(q) + (p-q)y_i'(q) + \frac{(p-q)^2}{2!} y_i''(q) + ... \end{aligned} \tag{۲۶}$$

کرنل‌های معادله (۲۵) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$k_{ii}(p,q,s) = \frac{A_{,-1i}(q,s)}{p-q} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{,mi}(q,s)(p-q)^m. \tag{۲۷}$$

که ضریب ترم تکین بصورت زیر است:

$$A_{,-1i} = \frac{-\mu_{0x} e^{2\beta y_i(q)}}{2\pi f a_i} \tag{۲۸}$$

مطابق اصل باکنر [۱۶] مؤلفه تنش ناشی از بارگذاری خارجی در محل ترک‌ها در صفحه بدون ترک بعد از تغییر علامت در رابطه (۲۵) قرار گرفته و دانسیته نابجایی $b_{zi}(q,s)da$ باید محاسبه گردد. توابع دانسیته نابجایی علاوه بر ارضاء معادلات انتگرالی بایستی به نحوی محاسبه گردند که اختلاف تغییر مکان لبه‌های ترک در نوک‌های ترک صفر باشد که این شرایط به وسیله یک سری معادلات همانند زیر اعمال خواهد شد:

$$w_j^+(p,s) - w_j^-(p,s) = a_j \int_{-1}^{p} b_{zj}(q,s) dq,\quad j \in \{1,...,N\}. \tag{۲۹}$$

میدان جابجایی در خارج سطوح ترک تک مقداری خواهد بود. بر این اساس شرایط بسته شدن دهانه ترک بصورت زیر است:

$$\int_{-1}^{1} b_{zj}(q,s) dq = 0,\quad j \in \{1,...,N\}. \tag{۳۰}$$

اگر حل الاستیسیته یک مسأله ترک موجود باشد، ضریب شدت تنش برای هر نوک ترک از رفتار مجانبی تنش ها یا از تغییر مکان‌های نسبی لبه‌های ترک بدست آورد.

ضرایب شدت تنش مود سوم بر حسب تنش‌های بدست آمده در نوک ترک‌های عمودی برای نوک سمت راست و چپ به صورت زیر برای ترک i ام بیان می‌شود [۱۷]:

$$k_{IIIR}=\lim_{r_R\to 0}\sqrt{2r_R}\,\sigma_{zx}(r_R,0,s),$$
$$k_{IIIL}=\lim_{r_L\to 0}\sqrt{2r_L}\,\sigma_{zx}(r_L,\pi,s). \quad (۳۱)$$

که اندیس های R,L نوک راست و چپ ترک می باشد و r فاصله از نوک ترک است که بر حسب توابع پارامتری عبارتند از :

$$r_L=\left[(x_i(p)-x_i(-1))^2+(y_i(p)-y_i(-1))^2\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$r_R=\left[(x_i(p)-x_i(1))^2+(y_i(p)-y_i(1))^2\right]^{\frac{1}{2}},\ -1\le p\le 1. \quad (۳۲)$$

محاسبه عددی معکوس لاپلاس با استفاده از روش استهفست[1] [۱۵] انجام خواهد گرفت. استهفست با گسسته سازی روی محور حقیقی، حل انتگرال لاپلاس معکوس را بصورت زیر پیشنهاد داد:

$$f(t)\approx\frac{\ln 2}{t}\sum_{n=1}^{M}H_nF(\frac{\ln 2}{t}n). \quad (۳۳)$$

در معادله بالا $F(.)$ لاپلاس معادله $f(t)$ است ، M عددی زوج است و H_n بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$H_n=(-1)^{\frac{M}{2}+n}\sum_{k=[0.5(n+1)]}^{\min(\frac{M}{2},n)}\frac{k^{\frac{M}{2}}(2k)!}{(\frac{M}{2}-k)!k!(k-1)!(n-k)!(2k-n)!}. \quad (۳۴)$$

مطابق معادله (۳۴) محاسبه $f(t)$ در یک زمان مشخص t، نیازمند گسسته سازی $F(s)$ در M نقطه $s=(\frac{\ln 2}{t})n,\ \ n\in\{1,2,...,M\}$ است. با اعمال شیوه بیان شده به معادلات (۲۵) و (۳۰) نتایج زیر به ترتیب بدست می‌آید:

$$\sigma_{zx}(x_i(p),y_i(p),\frac{\ln 2}{t}n)=\sum_{j=1}^{N}\int_{-1}^{1}a_jk_{ij}(p,q,\frac{\ln 2}{t}n)b_{zj}(q,\frac{\ln 2}{t}n)dq,\ i=1,2,...,N\ ,-1\le p\le 1.$$
$$\int_{-1}^{1}b_{zj}(q,\frac{\ln 2}{t}n)dq=0,\quad j\in\{1,...,N\},\ \ n\in\{1,...,M\}. \quad (۳۵)$$

رفتار میدان تنش در نوک ترک در محیط ساخته شده از ماده ارتوتروپیک تابعی دارای تکینگی $\frac{1}{\sqrt{r}}$ $\frac{1}{\sqrt{r}}$است که r فاصله از نوک ترک می باشد. بنابراین رفتار دانسیته نابجایی یا مشتق تغییر مکان (کرنش) در نوک ترک همان تکینگی $\frac{1}{\sqrt{r}}$ است.

در نتیجه برای ترک‌های احاطه شده در محیط هر دو نوک ترک تکینگی دارد و برای ترک‌های لبه‌ای فقط یک نوک دارای تکینگی است پس می‌توان دانسیته نابجایی را برای ترک‌های داخل محیط وقتی که طول ترک $2a$ است به صورت زیر نمایش داد.

---

[1]Stehfes، s method

$$b_{zj}(q,\frac{\ln 2}{t}n)=\frac{G_{yj}(q,\frac{\ln 2}{t}n)}{\sqrt{1-q^2}} \quad -1<q<1, \quad j\in\{1,2,...,N\}. \tag{۳۶}$$

و برای ترک های لبه‌ای دانسیته نابجایی بصورت زیر است:

$$b_{zj}(q,\frac{\ln 2}{t}n)=\sqrt{\frac{1-q}{1+q}}G_{zj}(q,\frac{\ln 2}{t}n) \quad -1<q<1, \quad j\in\{1,2,...,N\}. \tag{۳۷}$$

با جایگذاری معادله (۳۷) و (۳۶) در روابط (۳۵) با اعمال کردن تکنیک عددی گسسته سازی معادلات انتگرالی با استفاده از روش گوس-چبیشف [۱۸] می‌توان معادلات انتگرالی تکین را برای ترک‌های داخلی و لبه‌ای حل نمود. با توجه به رابطه (۳۳) معکوس لاپلاس دانسیته نابجایی روی سطوح ترک به صورت زیر بدست می آید:

$$g_{zi}(q,t)\approx\frac{\ln 2}{t}\sum_{n=1}^{M}H_nG_{zi}(q,\frac{\ln 2}{t}n), \quad -1\le q\le 1, \ i\in\{1,...,N\}. \tag{۳۸}$$

با جایگذاری روابط (۳۶)، (۳۷) و (۲۷) در رابطه (۲۵) و با جایگذاری نتیجه آن در رابطه (۳۱) ضرایب شدت تنش برای نوک ترک‌های داخلی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} k_{IIIRi}(t)&=-\frac{\mu_x(y_i)}{2f}\sqrt{a_i}\,g_{zi}(1,t),\\ k_{IIILi}(t)&=\frac{\mu_x(y_i)}{2f}\sqrt{a_i}\,g_{zi}(-1,t), \ i\in\{1,2,...N\}. \end{aligned} \tag{۳۹}$$

و همچنین برای ترک لبه‌ای ضرایب شدت تنش بصورت زیر است:

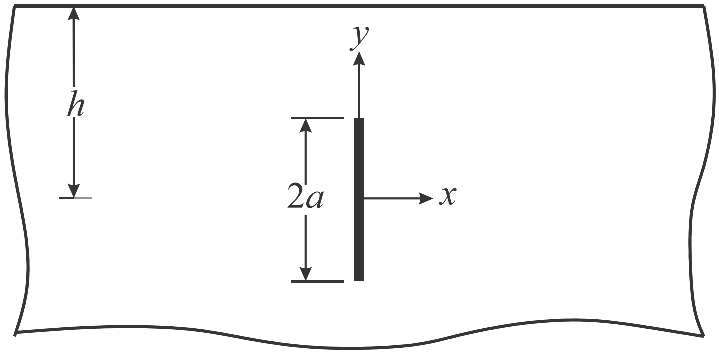
$$k_{IIILi}(t)=\frac{\mu_x(y_i)}{f}\sqrt{a_i}\,g_{zi}(-1,t), \ i\in\{1,2,...N\}. \tag{۴۰}$$

۴- نتایج و مثال‌های عددی

در این بخش مثال‌هایی از نیم صفحه ارتوتروپیک تابعی تضعیف شده توسط چندین ترک لبه‌ای ارائه شده است تا قابلیت استفاده از تکنیک نابجایی آشکار گردد. برای بی‌بعدسازی ضرایب شدت تنش از $k_0=\tau_0\sqrt{a}$ که بیانگر ضریب شدت تنش در صفحه نامحدود حاوی یک ترک بطول $2a$ تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای واقع در دوردست استفاده شده است و همچنین برای بی‌بعد سازی زمان از $t_0=ca$ استفاده شده است.

مثال (۱) : یک ترک واقع در صفحه همگن تحت تنش خارج صفحه ای ضربه ای

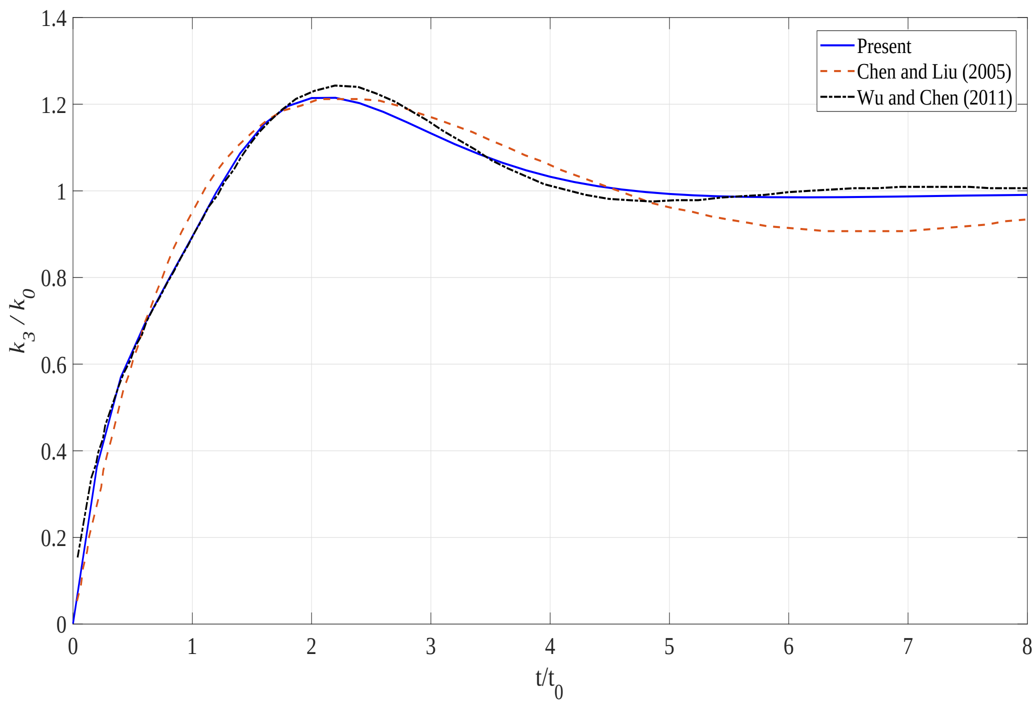
یک ترک مستقیم به طول $2a$ بصورت موازی با محور y در صفحه‌ی همگن ($h\to\infty, f=1, \beta=0$) تحت تنش یکنواخت $\sigma_{zx}=\tau_0 H(t)$ مطابق شکل (۲) قرار دارد.



شکل ۲– نمایش یک ترک عمودی داخلی در نیم صفحه

مقادیر ضرایب شدت تنش بی‌بعد شده مود سوم $\frac{k_3}{k_0}$ در مقابل تغییرات بی بعد زمان $\frac{t}{t_0}$ در شکل (۳) ترسیم شده است. این مثال توسط J. Chen, Z. Liu [۱۹] و همچنین K. Wu, J. Chen [۱۳] حل شده و نتایج مقایسه گردیده‌اند بطوریکه دیده می‌شود نتایج حاصل از مقایسه با مرجع وو و چن مطابقت خیلی خوبی و با مرجع چن و لیو مطابقت نزدیکی دارد.

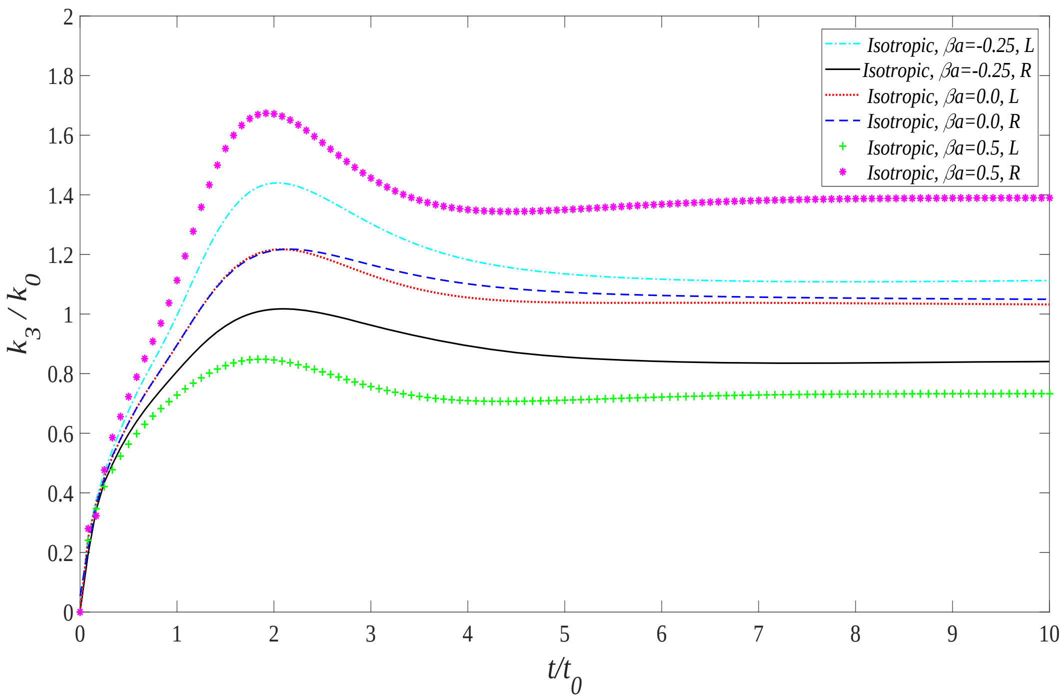
در ادامه، ضرایب شدت تنش برای یک ترک داخلی واقع در نیم صفحه که مطابق شکل (۲) قرار دارد برای سه نوع ضریب ناهمگنی مواد ارائه شده که در شکل (۴) نمایش داده شده است. بطوریکه ثابت‌های ارتوتروپیک در جدول (۱) ارائه شده است.



شکل ۳– مقایسه ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد بر حسب زمان بی‌بعد در صفحه‌ی همگن

جدول ۱– مشخصات مکانیکی ماده ارتوتروپیک

Material	$\mu_{x0}(N/m^2)$	$\mu_{y0}(N/m^2)$	$\rho_0(kg/m^3)$
Isotropic	4.14×10^{10}	4.14×10^{10}	7.1×10^{3}
Orthotropic I	4.14×10^{9}	$2\times4.14\times10^{10}$	7.1×10^{3}
Orthotropic II	$2\times4.14\times10^{10}$	4.14×10^{10}	7.1×10^{3}



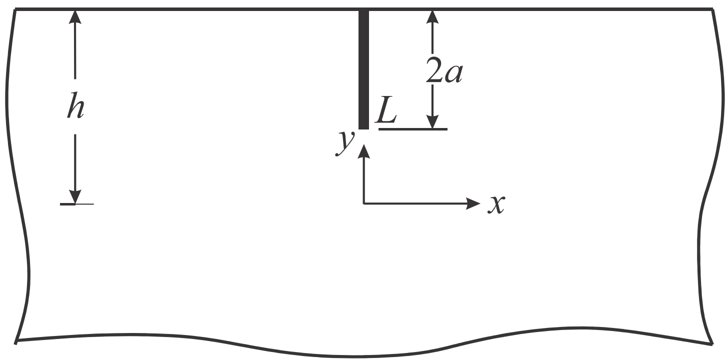
شکل ۴– تغییرات ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد برای یک ترک داخلی بر حسب زمان بی‌بعد برای ماده همگن تابعی

مطابق شکل (۴) ضرایب شدت تنش بی‌بعد دینامیکی با گذشت زمان از کمترین مقدار خود شروع شده و نهایتاً به یک مقدار ماکزیمم می‌رسند که به صورت تقریبی برای نوک‌های سمت چپ و راست در مقدار $\frac{t_{\max}}{t_0} \cong 2$ می باشند با گذشت بیشتر زمان اثر دینامیکی بارگذاری خارجی از بین رفته و ضرایب شدت تنش به سمت مقادیر استاتیکی همگرا خواهند شد. برای مقایسه ضرایب ناهمگنی بر روی ضرایب شدت تنش اینگونه می‌توان نتیجه گرفت که ضرایب شدت تنش با کاهش ضریب بی‌بعد ناهمگنی به دلیل کاهش سفتی محیط افزایش

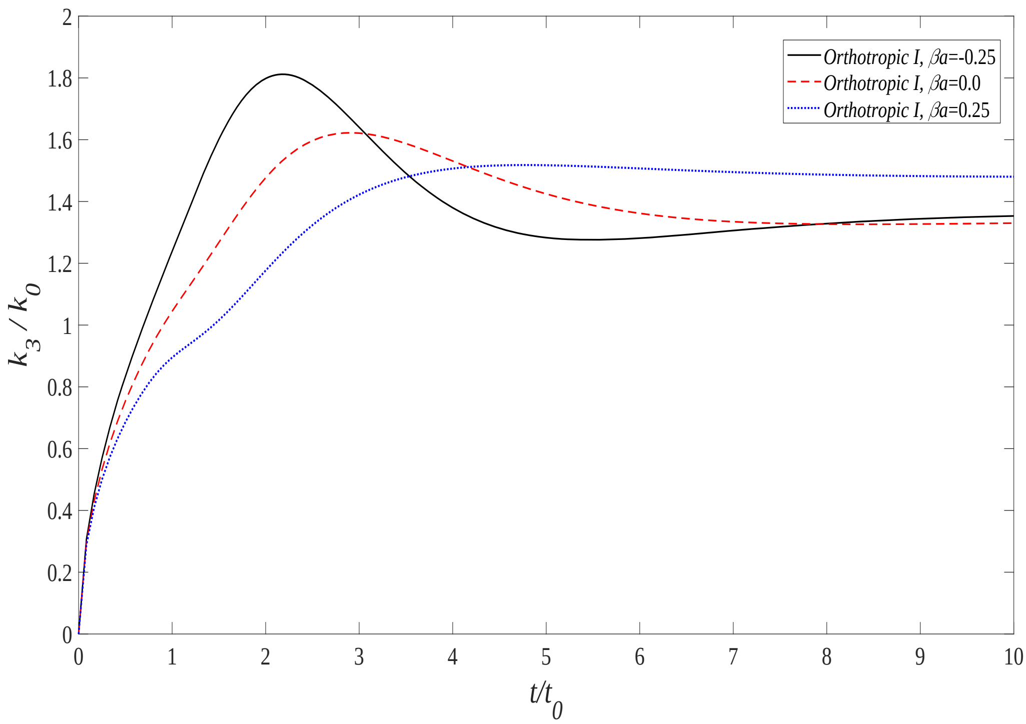
می‌یابند. برای ضریب ناهمگنی منفی ($\beta<0$) ضرایب شدت تنش برای نوک سمت چپ بیشتر از نوک راست است و همچنین برای ضریب ناهمگنی مثبت ($\beta>0$) این روند بر عکس می‌شود.

مثال (۲) : یک ترک لبه‌ای عمودی واقع در نیم صفحه ناهمگن ارتوتروپیک

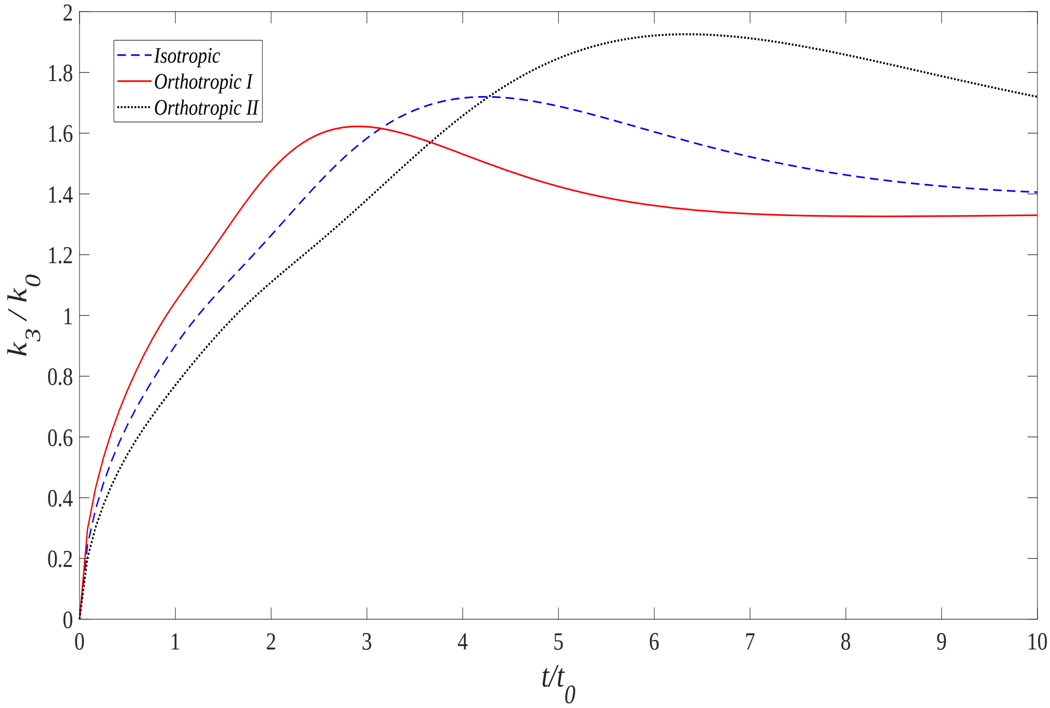
یک ترک لبه‌ای عمودی به طول $2a$ بصورت موازی با محور y در نیم صفحه، تحت تنش برشی یکنواخت $\sigma_{zx}=\tau_0 H(t)$ مطابق شکل (۵) قرار دارد. مقادیر ضرایب شدت تنش بی‌بعد برای نوک واقع در محیط بر حسب مقادیر بی بعد ثابت ماده تابعی $\beta a=-0.25, 0, 0.25$ و ارتوتروپیک I مطابق شکل (۶) در مقابل تغییرات بی بعد زمان $\frac{t}{t_0}$ ترسیم شده است.



شکل ۵– نمایش یک ترک لبه‌ای عمودی در نیم صفحه



شکل ۶– تغییرات ضرایب شدت تنش دینامیکی یک ترک لبه‌ای بر حسب زمان بی‌بعد برای مقادیر مختلف ناهمگنی ماده



شکل ۷– تغییرات ضرایب شدت تنش دینامیکی برای یک ترک لبه‌ای بر حسب زمان بی‌بعد برای ثوابت مختلف ارتوتروپیک

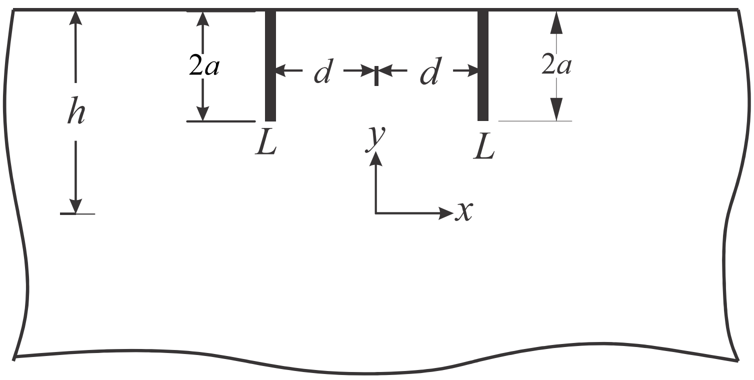
مثال (۳) : بررسی اثرات ماده ارتوتروپیک برای یک ترک لبه ای عمودی در نیم صفحه

اثرات ماده ارتوتروپیک بر روی ضرایب شدت تنش ترک لبه‌ای عمودی برای شکل (۵) دوباره مورد مطالعه قرار گرفته که مقادیر بی‌بعد این ضرایب بر حسب زمان‌های بی‌بعد در شکل (۷) نمایش داده شده است.

با توجه به شکل فوق مقادیر ضرایب شدت تنش برای $\frac{t}{t_0}<3$ برای ماده ارتوتروپیک I بیشترین مقدار و برای $\frac{t}{t_0}>4.27$ مقدار ضریب شدت تنش ماده ارتوتروپیک II بیشترین مقدار را دارد. مقادیر ماکزیمم ضریب شدت تنش برای ماده همسانگرد $\frac{t_{\max}}{t_0}=4.25$، ارتوتروپیک I در $\frac{t_{\max}}{t_0}=2.92$ و همچنین برای ماده ارتوتروپیک II در $\frac{t_{\max}}{t_0}=6.33$ است. همچنین مشاهده می‌گردد که ماده‌ای که در کمترین زمان بی‌بعد به بیشترین مقدار شدت تنش می‌رسد در زمان‌های کوتاه‌تری به مقادیر استاتیکی همگرا می‌شوند.

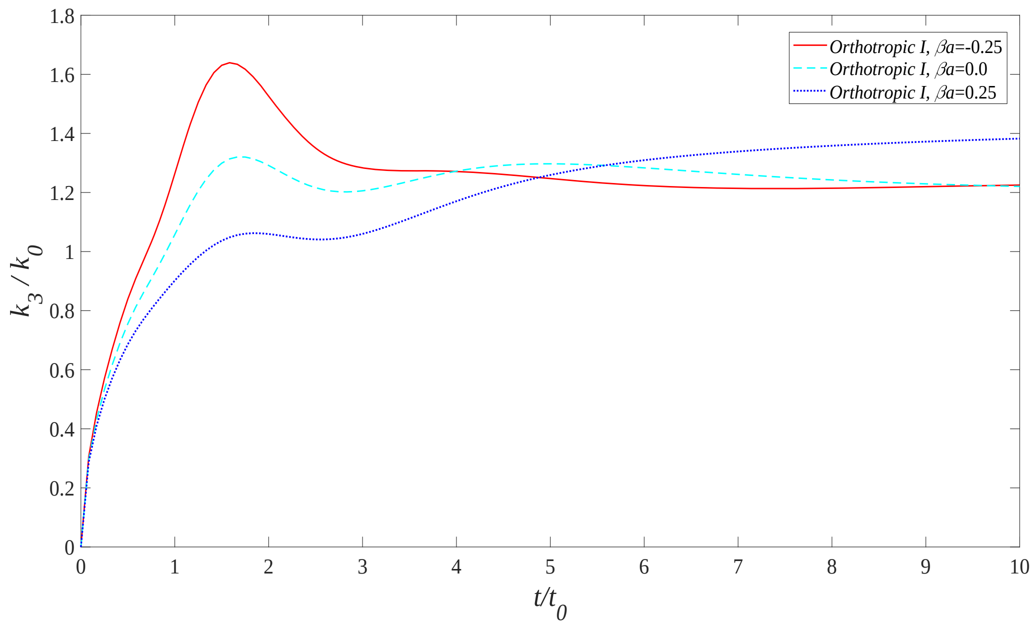
مثال (۴) : دو ترک لبه‌ای عمودی موازی واقع در نیم صفحه‌ی ناهمگن

دو ترک لبه‌ای موازی و عمود بر مرز نیم صفحه هر کدام به طول $2a$ در نیم صفحه‌ی ساخته شده از ماده تابعی تحت تنش خارج صفحه ای یکنواخت $\sigma_{zx}=\tau_0 H(t)$ مطابق شکل(۸) نشان داده شده است. محورهای مختصات در وسط ترک‌ها واقع شده و فاصله‌ی هرکدام از ترک‌ها از مختصه‌ی x محور d می‌باشد.



شکل ۸– نمایش دو ترک لبه‌ای عمودی موازی در نیم صفحه

جهت بدست آوردن ضرایب شدت تنش مرکز ترک‌ها در فاصله بی‌بعد $x_c = \frac{d}{a} = 0.25,\ \ y_c = \frac{h}{a} - 1$ قرار دارند و همچنین نسبت طول ترک بی‌بعد شده برابر با $\frac{a}{h} = 0.25$ است. ضرایب شدت تنش بی‌بعد شده $\frac{k_3}{k_0}$ بر حسب سه نوع مقادیر بی‌بعد ثابت ماده تابعی $\beta a = -0.25,\ 0, 0.25$ در مقابل تغییرات بی‌بعد زمان $\frac{t}{t_0}$ در شکل (۹) ترسیم شده است. با توجه به هندسه‌ی متقارن ترک‌ها نسبت به محور y ضرایب شدت تنش در نوک ترک سمت راست و چپ برابر می‌باشند.

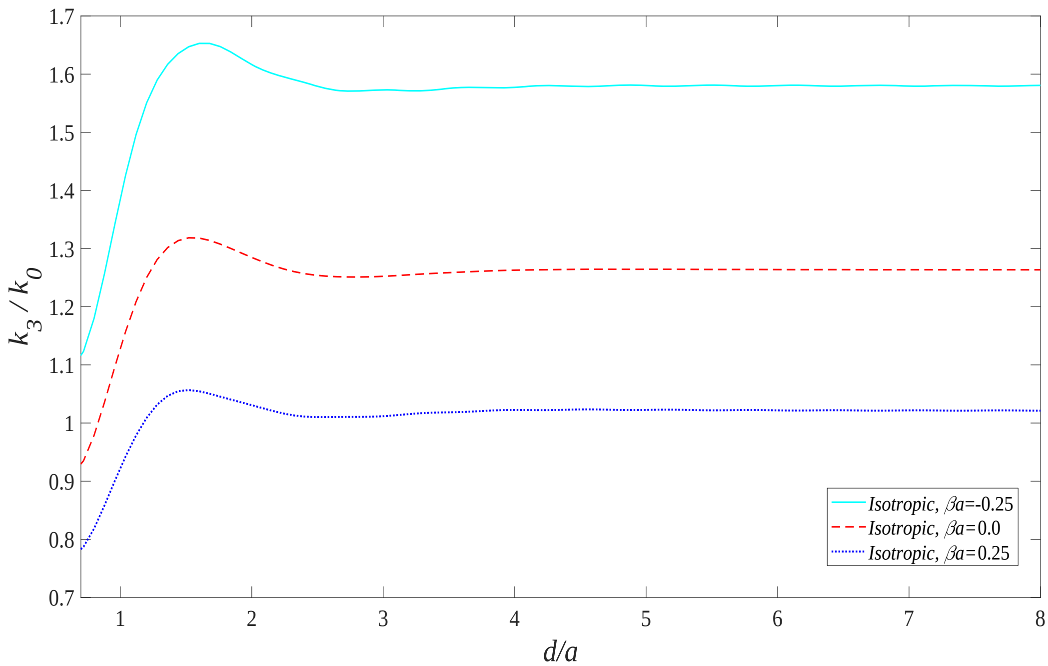


شکل ۹– تغییرات ضرایب شدت تنش دینامیکی دو ترک لبه‌ای بر حسب زمان بی‌بعد برای ماده ارتوتروپیک I با سه نوع ضریب ناهمگنی متفاوت

برای این نوع آرایش ترک‌ها نیز تغییرات ضرایب شدت تنش همانند مثال‌های گذشته می‌باشد با این تفاوت که مقادیر این ضرایب شدت تنش و همچنین محل رخداد بیشینه آنها تغییر یافته است نکته جالب توجه در این نوع آرایش ترک‌ها در این است که ضرایب شدت تنش نسبت به حالت یک ترک کاهش یافته است در واقع می‌توان بدین صورت توجیه کرد که میدان‌های تنش ایجاد شده در نوک ترک‌ها به جای تقویت همدیگر باعث تضعیف یکدیگر می‌شوند. به این نوع آرایش قرار گیری ترک که موجب کاهش ضرایب شدت تنش می‌گردد، اثر پدیده‌ی حفاظتی[1] ترک می‌گویند. همچنین مشاهده می‌گردد در این حالت نیز مقادیر ضریب شدت تنش برای ماده با ناهمگنی منفی ($\beta<0$) نسبت به ماده با ناهمگنی مثبت ($\beta>0$) بیشتر است.

مثال (۶) : بررسی فاصله‌ی دو ترک لبه‌ای عمودی موازی واقع در نیم صفحه‌ی نا همگن بر روی ضرایب شدت تنش

با توجه به شکل (۸) تغییرات بی‌بعد فاصله ترک‌ها بر روی ضرایب شدت تنش برای سه نوع ضریب ناهمگنی $\beta a=-0.25,\ 0,\ 0.25$ مورد مطالعه قرار گرفته است که تغییرات ضرایب شدت تنش در شکل (۱۰) نشان داده شده است با توجه به شکل مشاهده می‌گردد که با افزایش فاصله ترک‌ها ضرایب شدت تنش افزایش می‌یابند که این ضرایب در فاصله‌ی $\frac{d}{a}=1.52$ به بیشترین مقدار خود می‌رسند. همانطور که قبلاً بیان گردیده بود در این نوع آرایش ترک‌ها اثر پدیده محافظتی وجود داشت که این پدیده تاثیر معکوسی بر روی ضرایب شدت تنش ایفا می‌کرد. با افزایش یافتن فاصله در یک نقطه خاصی که به آن اشاره شد این تاثیر از بین می‌رود، با افزایش بیشتر فاصله، اندرکنش بین ترک‌ها کاملاً از بین رفته و دو ترک در محیط تبدیل به یک ترک با رفتار مستقل می‌شوند.

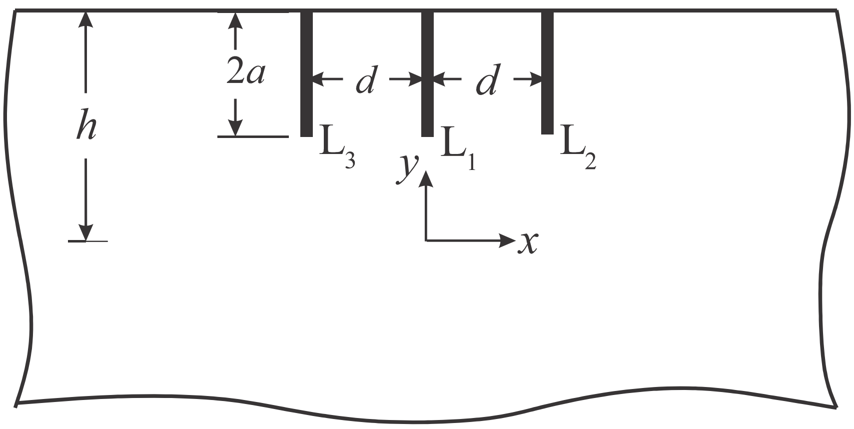


شکل ۱۰– تغییرات ضرایب شدت تنش دینامیکی برای دو ترک لبه‌ای بر حسب فاصله بی‌بعد ترک‌ها برای سه نوع ناهمگنی متفاوت

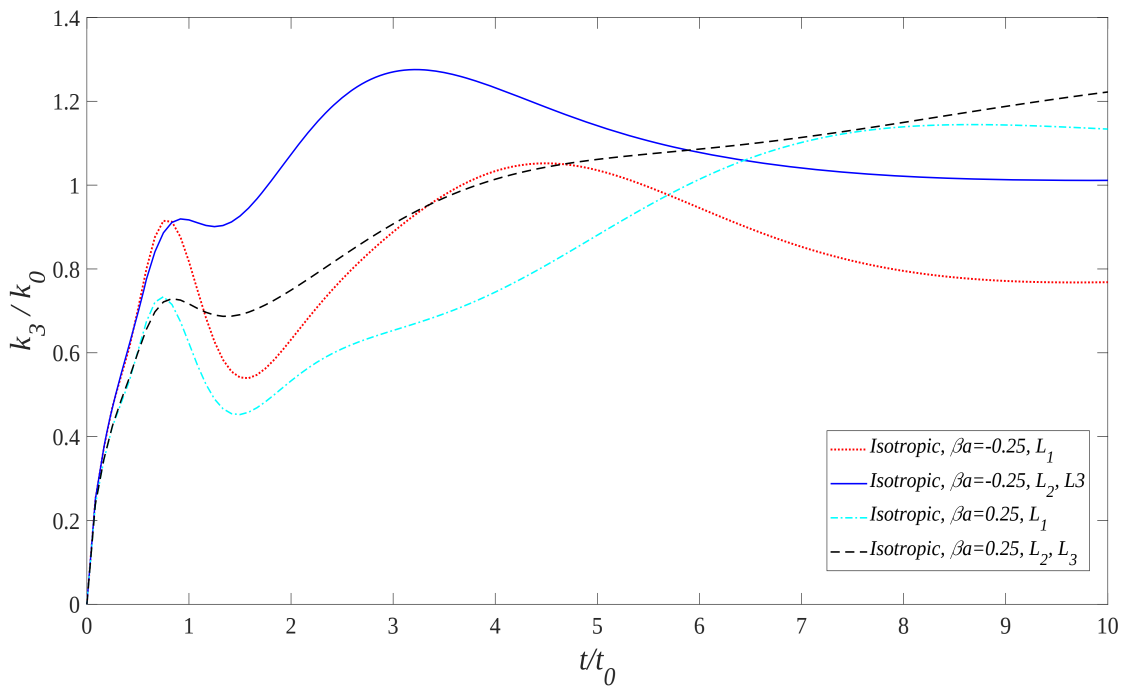
[1] Shielding effect

مثال (۷) : سه ترک عمودی لبه‌ای موازی واقع در نیم صفحه‌ی ناهمگن

سه ترک لبه‌ای موازی و عمود بر مرز نیم صفحه هر کدام به طول $2a$ در نیم صفحه‌ی ساخته شده از ماده تابعی تحت تنش خارج صفحه‌ای یکنواخت $\sigma_{zx} = \tau_0 H(t)$ مطابق شکل (۱۱) قرار دارند. محور y مختصات به موازات ترک اول، همانند شکل نشان داده شده قرار دارد و فاصله‌ی هرکدام از ترک‌ها از مختصه‌ی x محور d می‌باشند.



شکل ۱۱– نمایش سه ترک لبه‌ای عمودی موازی در نیم صفحه



شکل ۱۲– تغییرات ضرایب شدت تنش دینامیکی سه ترک لبه‌ای بر حسب زمان بی‌بعد برای ماده همسانگرد با دو نوع ضریب ناهمگنی متفاوت ماده

جهت بدست آوردن ضرایب شدت تنش مرکز ترک‌های دو و سه در فاصله بی‌بعد $y_c = \frac{h}{a} - 1$ $x_c = \frac{d}{a} = 0.25,$ قرار دارند و همچنین نسبت طول ترک بی‌بعد شده برابر با $\frac{a}{h} = 0.25$ است. ضرایب شدت تنش بی‌بعد شده $\frac{k_3}{k_0}$ بر حسب دو نوع مقادیر بی‌بعد ثابت ماده تابعی $\beta a = -0.25,\ 0.25$ در مقابل تغییرات بی‌بعد زمان $\frac{t}{t_0}$ در شکل (۱۲) ترسیم شده است. با توجه به هندسه‌ی متقارن ترک‌ها نسبت به محور y، ضرایب شدت تنش در نوک ترک‌های دو و سه برابر می‌باشند.

روند تغییرات ضرایب شدت تنش برای این مثال نیز همانند مثال های قبلی می‌باشد با این تفاوت که مقادیر این ضرایب شدت تنش و همچنین محل رخداد بیشینه آنها تغییر یافته است. برای این نوع آرایش ترک‌ها نیز اثر پدیده حفاظتی ترک مشاهده می‌گردد. همچنین در این حالت برای تغییرات ضرایب شدت تنش از روی شکل دو مقدار پیک مشاهده می‌گردد.

۵- نتیجه گیری

نیم صفحه‌ی ساخته شده از ماده ارتوتروپیک تابعی تضعیف شده توسط چندین ترک لبه‌ای تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای ضربه‌ای با استفاده از روش نابجایی مورد مطالعه قرار گرفته است. استفاده از حل نابجایی دارای این مزیت است که روش حل تابع تعداد ترک‌ها نمی‌باشد. همچنین حل مسائل ترک با روش‌های توابع تنش مختلط و یا استفاده از تبدیلات انتگرالی از نوع مسائل شرط مرزی ترکیبی است ولی در روش توزیع نابجایی شرط مرزی تنها از نوع تغییر مکان بوده و مسأله محیط همبند با شرایط مرزی ساده که حل آن به مراتب ساده تر از مسأله مقدار مرزی ترکیبی است، انجام می‌شود.

با توجه به مثال‌های حل شده نتایج زیر بدست می‌آیند:

۱. با گذر زمان ضرایب شدت تنش از کمترین مقدار شروع شده تا به ماکزیمم مقدار خود برسد. در نهایت با افزایش بیشتر زمان اثر دینامیکی ضربه خارجی از بین رفته و ضرایب شدت تنش به مقادیر استاتیکی همگرا می‌گردند.

۲. با افزایش ثابت ناهمگنی ماده β به دلیل سفت‌تر شدن محیط، ضرایب شدت تنش کاهش می‌یابد.

۳. ضرایب شدت تنش قبل از پیک به ترتیب برای ماده ارتوتروپیک I، همسانگرد و ارتوتروپیک II بیشترین مقادیر را به خود اختصاص داده است.

۴. برای ترک‌هایی که موازی هم قرار می‌گیرند به دلیل اندرکنش میدان تنش‌ها، ضرایب شدت تنش از یک ترک کمتر می باشند که اصطلاحاً به آن اثر محافظتی ترک می‌گویند.

مراجع

[1] Maue, A.W., “Die Beugung Elastischer Wellen an Der Halbebene”. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 33, pp. 1-10, (1953).

[2] Sih, G., "Some Elastodynamic Problems of Cracks", International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 4, pp. 51-68, (1968).

[3] Itou, S., "Transient Response of a Finite Crack in a Half Plane under Impact Load", Journal of Applied Mechanics, Vol. 48, pp. 534-538, (1981).

[4] Ing, Y.S., and Ma C.C., "Transient Response of a Finite Crack Subjected to Dynamic Anti-plane Loading", International Journal of Fracture, Vol. 82, pp. 345-362, (1996).

[5] Zhang, C., "Transient Elastodynamic Anti-plane Crack Analysis of Anisotropic Solids", International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp. 6107-6130, (2000).

[6] Shul, C.W., and Lee, K.Y., "Dynamic Response of Subsurface Interface Crack in Multi-Layered Orthotropic Half-space under Anti-plane Shear Impact loading", International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, pp. 3563-3574, (2001).

[7] Chen, J., Liu, Z., and Zou, Z., "Transient Internal Crack Problem for a Nonhomogeneous Orthotropic Strip (Mode I)", International Journal of Engineering Science, Vol. 40, pp. 1761-1774, (2002).

[8] Noda, N., and Wang, B., "The Collinear Cracks in an Inhomogeneous Medium Subjected to Transient Load", Acta Mechanica, Vol. 153, pp. 1-13, (2002).

[9] Feng, W., Z., Zhang and Zou, Z., "Impact Failure Prediction of Mode III Crack in Orthotropic Functionally Graded Strip", Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 40, pp. 97-104, (2003).

[10] Itou, S., "Dynamic Stress Intensity Factors for Two Parallel Interface Cracks Between a Nonhomogeneous Bonding Layer and Two Dissimilar Elastic Half-planes Subject to an Impact Load", International Journal of Solids and Structures, Vol. 47, pp. 2155-2163, (2010).

[11] Hejazi, A., Ayatollahi, M., Bagheri, R., and Monfared, M.M., "Dislocation Technique to Obtain the Dynamic Stress Intensity Factors for Multiple Cracks in a Half-plane under impact Load", Archive of Applied Mechanics, Vol. 84, pp. 95-107, (2014).

[12] Ayatollahi, M., and Monfared, M.M., "Anti-plane Transient Analysis of Planes with Multiple Cracks", Mechanics of Materials, Vol. 50, pp. 36-46, (2012).

[13] Wu, K., and Chen, J., "Transient Analysis of Collinear Cracks under Anti-plane Dynamic Loading", Procedia Engineering, Vol. 10, pp. 924-929, (2011).

[14] Yousefi, P., Fariborz, J., and Fariborz, S.J., "Half-layers with Interface Cracks under Anti-plane Impact", Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 85, pp. 367-374, (2016).

[15] Cohen, A.M., "*Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*", Springer-Verlage US, (2007).

[16] Korsunsky, A., and Hills, D., "The Solution of Crack Problems by using Distributed Strain Nuclei. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers", Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 210, pp. 23-31, (1996).

[17] Baghestani, A.M., Fotuhi, A.R., and Fariborz., S.J., "Multiple Interacting Cracks in an Orthotropic Layer", Archive of Applied Mechanics, Vol. 83, pp. 1549-1567, (2013).

[18] Hills, D.A., Kelly, P.A., Dai, D.N., and Korsunsky, A.M., "*Solution of Crack Problems: the Distributed Dislocation Technique*", Vol. 44, Science & Business Media, Springer, Netherlands, (2013).

[19] Chen, J., and Liu, Z., "Transient Response of a Mode III Crack in an Orthotropic Functionally Graded Strip", European Journal of Mechanics - A/Solids, Vol. 24, pp. 325-336, (2005).

فهرست نمادهای انگلیسی

a_i	نصف طول ترک iام
A_1, A_2, B_2	ضرایب ظاهر شده در تبدیل فوریه تغییر مکان $w(x,y)$
$b_z(t)$	بردار برگرز برحسب زمان
$g_{zj}(p)$	تابع محدود و پیوسته
$H(x)$	تابع پله‌ای
h	ضخامت نیم صفحه
k_R, k_L	ضرایب شدت تنش نوک‌های سمت راست و چپ ترک
$k_{ij}(p,q,s)$	کرنل معادله انتگرالی
M	تعداد نقاط گسسته سازی لاپلاس
N	تعداد ترک‌ها
p	محل بررسی تنش
q	محل اعمال نابجایی
s	متغیر تبدیل لاپلاس
u, v	مؤلفه‌های جابجایی درون صفحه‌ای در جهت x, y
$w(x,y,t)$	مؤلفه جابجایی خارج صفحه‌ای
W^*	تبدیلات فوریه و لاپلاس تغییر مکان $w(x,y,t)$
$w^+_i(p,s), w^-_i(p,s)$	تغییر مکان لبه بالایی و پایینی ترک
$\sigma_{zy}(x,y,t), \sigma_{zx}(x,y,t)$	مؤلفه‌های تنش خارج صفحه‌ای
β	ثابت ماده تابعی
δ_{ij}	تابع دلتای دیراک
μ_{x0}, μ_{y0}	ثابت‌های ارتوتروپیک در جهات x و y برای $y=0$
ρ_0	چگالی ماده تابعی در $y=0$
λ	متغیر تبدیل فوریه
ξ	محل اعمال نابجایی

Abstract

In this paper, stress analyses by means of distributed dislocation method in a functionally graded orthotropic half-plane weakened by multiple edge cracks under anti-plane impact loading is studied. First, dislocation solution by using of Fourier and Laplace transforms, boundary conditions and continuity conditions is carried out. Then by applying inversion of Fourier transform, the fields of stress analysis in Laplace domain are calculated. Using of this solution, the integral equations for analyzing of multiple edge and internal cracks in a half-functionally graded orthotropic plane is obtained. The behavior of this equation is Cauchy singularity at the location of dislocation which is solved numerically. By applying the inversion of Laplace transform using of Stehfest's method, the dislocation densities on the crack surface obtained which are used to determine dynamic stress intensity factors at crack tips. Finally, the effects of the isotropic or orthotropic property, non-homogeneity parameter, crack location and the interaction of multiple edge cracks on the dynamic stress intensity factors in a functionally graded orthotropic half-plane are studied.