

## بررسی رفتار ارتعاشی نانولوله‌های کربنی ویسکوالاستیک تحت میدان مغناطیسی بر اساس تئوری غیرموضعی تیر تیموشنکو

رفتار ارتعاشات عرضی و پایداری نانولوله‌های ویسکوالاستیک تحت میدان مغناطیسی به صورت تحلیلی بررسی شده است. با در نظر گرفتن تئوری غیرموضعی مدل تیر تیموشنکو و بکارگیری تئوری ویسکوالاستیک جامد استاندارد خطی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت استخراج شده است. نیروی مغناطیسی لورنتس حاصل از میدان مغناطیسی با استفاده از معادلات ماکسول محاسبه و از حل تحلیلی معادله مقدار ویژه برای نانولوله با شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها استخراج شده است. در ادامه اثر شدت میدان مغناطیسی، ضریب لاغری و پارامتر غیرموضعی روی فرکانس‌های طبیعی و بار کماتشی سیستم مطالعه شده است. پس از بررسی صحت مدل، نتایج با استفاده از نمودارها و جداول مناسبی ارائه شده و مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

مسعود مینائی<sup>۱</sup>

استادیار

موسی رضائی<sup>۲</sup>

استاد

وحید عرب‌ملکی<sup>۳</sup>

دکتر

واژه‌های راهنما: نانولوله کربنی، مدل تیر تیموشنکو، تئوری غیرموضعی، رفتار ویسکوالاستیک، میدان مغناطیسی

### ۱- مقدمه

در سال‌های اخیر و همزمان با پیشرفت سریع دانش و تکنولوژی، استفاده از نانو تیرها و نانولوله‌ها در بسیاری از کاربردهای صنعتی گسترش یافته است [۱]. با توجه به قابلیت‌های خیره کننده این مواد در بسیاری از حوزه‌های علوم به ویژه مهندسی مکانیک، بررسی رفتار دینامیکی این سیستم‌ها اهمیت و دقت بالایی دارد. از طرف دیگر نظر به مشکلات آزمایش‌های تجربی در مقیاس نانو و هزینه‌بر بودن آن‌ها و نیز نیاز به ابزارهای اندازه‌گیری خاص، توسعه روش‌های محاسباتی برای تحلیل نانو سازه‌ها حائز اهمیت است. لذا استفاده از مدل‌سازی محیط‌های پیوسته الاستیک برای مطالعه رفتار مکانیکی نانولوله‌ها از جمله بررسی کماتش [۲] و آنالیز ارتعاشی [۳] مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. به طور کلی تئوری‌های مورد استفاده در منابع را می‌توان در دو دسته تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته کلاسیک و غیر کلاسیک دسته‌بندی نمود.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز ac.minaei@azaruniv.ac.ir

<sup>۲</sup> استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز m\_rezaee@tabrizu.ac.ir

<sup>۳</sup> دکتر، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز vahid\_maleki@tabrizu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۰۹، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۰۵

از آنجا که رفتار مواد در ابعاد بسیار کوچک، متفاوت است و به این دلیل که در تئوری کلاسیک، تأثیرات اندازه لحاظ نمی‌شود لذا استفاده از این تئوری در مطالعه ساختارهای میکرو و نانو از دقت کافی برخوردار نخواهد بود. از این رو به منظور غلبه بر این مشکل، تئوری‌های الاستیسیته غیرمحلی<sup>۱</sup> [۴]، تنش کوپل<sup>۲</sup> [۵]، گرادپان کرنش<sup>۳</sup> [۶]، الاستیسیته سطحی<sup>۴</sup> [۷]، تنش کوپل اصلاح شده<sup>۵</sup> [۸] و گرادپان کرنش اصلاح شده<sup>۶</sup> [۹] اشاره کرد. در تئوری تنش کوپل و شکل اصلاح شده آن علاوه بر سادگی روابط ارائه شده، دقت بالایی نیز در ارائه پاسخ‌های انواع سیستم‌های مورد مطالعه در پدیده‌های گوناگون مکانیکی مشاهده شده است. Zhen و همکاران [۱۰] با استفاده از تئوری کلاسیک و Wang و همکاران [۱۱] به کمک تئوری غیرمحلی ارینگن و تئوری تیر اویلر برنولی، ارتعاشات آزاد نانولوله کربنی و پایداری آن را مورد مطالعه قرار دادند. Zhang و همکاران [۱۲] با استفاده از تئوری تیر غیرموضعی دوگانه برای تحلیل خمش، کمانش و ارتعاشات میکرو و نانو تیرها استفاده کردند. در تئوری آنها بر خلاف مدل اریگن از دو پارامتر غیرموضعی برای پیش‌بینی بهتر رفتار نانو تیر استفاده شده است. Pradhan و Phadikar [۱۳] روش المان محدود را به منظور استخراج معادلات حاکم بر ارتعاشات تیر خطی غیرموضعی بکار بردند و برای شرایط مرزی مختلف، خمش، کمانش و ارتعاشات نانوتیر را بررسی کردند. Ansari و Sahmani [۱۴] رفتار کمانشی و خمشی نانوتیر را با در نظر گرفتن اثرات سطحی برای تئوری‌های مختلف تیر به کار بردند.

Ghannadpour و همکاران [۱۵] روابط تحلیلی برای یافتن ماتریس سفتی و ماتریس جرمی نانو تیر را توسعه دادند و سپس با استفاده از روش ریتز، بار کمانش بحرانی، فرکانس‌های طبیعی و خیز تیر را برای شرایط مختلف به دست آوردند. با توجه به اینکه برای نانولوله‌های با نسبت طول به قطر کم، به علت بیشتر بودن اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی، تئوری تیر اویلر-برنولی خطای زیادی دارد، بنابراین برای این نوع سازه‌ها از تئوری تیر تیموشنکو استفاده می‌شود [۱۶]. در سال‌های اخیر در زمینه ارتعاشات و کمانش نانولوله‌های کربنی با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو مطالعات گسترده‌ای انجام شده است [۱۷-۱۹]. Wang و همکاران [۲۰] با استفاده از تئوری تنش کوپل و روش اصل کار مجازی معادلات حاکم بر کمانش نانولوله را بر اساس تئوری تیر تیموشنکو استخراج کردند و سپس با استفاده از روش تحلیلی بارهای کمانش سیستم را محاسبه کردند. آنها با بررسی نتایج خود با تئوری کلاسیک، به بررسی تأثیر اثر اندازه‌های کوچک بر بار کمانش سیستم پرداختند. Benzair و همکاران [۲۱] رفتار ارتعاشات عرضی نانولوله‌های کربنی تک جداره را با استفاده از تئوری غیرموضعی تیر تیموشنکو و تحت تأثیر میدان حرارتی مورد مطالعه قرار دادند. آنها پس از استخراج معادلات حاکم بر حرکت، به بررسی تحلیلی اثرات تغییرات دما و پارامتر غیرموضعی بر فرکانس‌های طبیعی تیر تیموشنکو پرداختند. Qiao و Feng [۲۲] با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و با در نظر گرفتن اثرات سطحی به بررسی رفتار ارتعاشات عرضی نانوسیم‌های تحت تأثیر نیروی محوری پرداختند.

<sup>1</sup> Nonlocal Elasticity Theory

<sup>2</sup> Couple Stress Theory

<sup>3</sup> Strain Gradient Theory

<sup>4</sup> Surface Elasticity Theory

<sup>5</sup> Modified Couple Stress Theory

<sup>6</sup> Modified Strain Gradient Theory

تأثیر میدان‌های مغناطیسی در بسیاری از کاربردهای نانولوله‌ها در تجهیزات NEMS و MEMS، نانورزوناتورها و میکروسکوپ‌های نوری قابل ملاحظه بوده و بررسی این عامل خارجی بر رفتار دینامیکی و ارتعاشی آنها حائز اهمیت می‌باشد. یکی از خصوصیات بارز و منحصر به فرد نانولوله‌های کربنی، خواص الکترومغناطیس و الکتریکی آن است که سال‌های اخیر تحقیقات زیادی در این خصوص انجام پذیرفته است. Kiani [۲۳] با استفاده از تئوری تیر مرتبه بالا، به بررسی رفتار ارتعاشی نانولوله‌های کربنی واقع در میدان مغناطیسی پرداخت. نتایج نشان می‌دهد که افزایش شدت میدان مغناطیسی باعث بالا رفتن فرکانس طبیعی می‌گردد و افزایش زاویه تابش میدان اثرات ناشی از میدان مغناطیسی را کاهش می‌دهد. Jalaei و همکاران [۲۴] اثرات میدان‌های حرارتی و مغناطیسی را بر ناپایداری دینامیکی نانوتیرهای تیموشنکو مدرج تابعی مطالعه کردند. آنها با استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی و تغییرات توانی خواص ماده در راستای ضخامت معادلات را استخراج نمودند. در تحقیقی دیگر، رفتار دینامیکی نانوتیرهای ویسکوالاستیک متخلخل توسط Jalaei و Civalek [۲۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. Xu و همکاران [۲۶] به مطالعه تأثیر میدان مغناطیسی و اثرات اندازه‌های کوچک بر مشخصه‌های ارتعاشی نانو صفحات پرداختند. نتایج مطالعه آنها نشان می‌دهد که اعمال میدان مغناطیسی یکی از مؤثرترین راه‌ها به منظور کنترل فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای این صفحات می‌باشد. بررسی مطالعات انجام شده نشان می‌دهد که تاکنون رفتار ارتعاشی نانولوله‌های کربنی ویسکوالاستیک با استفاده از تئوری تیموشنکو و تحت میدان مغناطیسی مورد مطالعه قرار نگرفته است. بر این اساس در مقاله حاضر بررسی رفتار ارتعاشی و ناپایداری نانولوله‌های کربنی ویسکوالاستیک تحت میدان مغناطیسی به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار داده می‌شود. برای در نظر گرفتن فرضیات واقع‌بینانه‌تر، از مدل ویسکوالاستیک جامد خطی استاندارد استفاده شده است. با در نظر گرفتن تئوری تیر تیموشنکو غیرموضعی معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت استخراج شده است. با استفاده از روش حل ناویر، معادله مقدار ویژه برای نانولوله با شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها استخراج شده است. در نهایت به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر مشخصه‌های ارتعاشی و پایداری سیستم پرداخته شده است. پس از بررسی صحت مدل، نتایج با استفاده از نمودارها و جداول مناسبی ارائه شده است.

## ۲- معادله حاکم بر سیستم

### ۲-۱- تئوری الاستیسیته غیرموضعی

در مقاله حاضر، به منظور در نظر گرفتن اثر ابعاد در میدان تنش، از تئوری الاستیسیته غیرموضعی استفاده شده است [۲۷]. این تئوری تطابق بین تئوری اتمی دینامیک شبکه‌ای و مشاهدات تجربی است. تئوری الاستیسیته غیرموضعی برای اولین بار توسط ارینگن [۴] ارائه شد. برای یک ماده همگن و ایزوتروپیک، بر اساس تئوری ارینگن [۴] تنش غیرموضعی در هر نقطه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \int \alpha(|x' - x|, e_0 a) \Sigma dx' \quad (1)$$

که در آن  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش غیرموضعی و  $\Sigma$  تانسور تنش کلاسیک است.  $\alpha(|x' - x|, e_0 a)$  مدول غیرموضعی است که اثرات کرنش در محل  $x'$  بر روی تنش در محل  $x$  را نشان می‌دهد.  $|x' - x|$  فاصله اقلیدسی نام دارد

و  $e_0$  ثابت ماده است که به صورت تجربی به دست می‌آید و  $a$  مشخصه طول نانو تیر است. رابطه انتگرالی (۱) را می‌توان به فرم دیفرانسیلی معادل به صورت زیر نوشت [۲۸]:

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (۲)$$

که در آن  $\nabla^2$  اپراتور لاپلاسین و  $C_{ijkl}$  نشان دهنده تانسور مدول الاستیک موضعی است. ثابت  $e_0 a$  پارامتری برای نشان دادن اثر اندازه‌های کوچک در نانسازه‌ها بوده و به همین علت به آن پارامتر غیرموضعی گفته می‌شود. با استفاده از رابطه فوق می‌توان نشان داد که میدان تنش غیرموضعی به صورت زیر به دست می‌آید [۲۹]:

$$\sigma_x^{nl} - (e_0 a)^2 \sigma_{x,xx}^{nl} = \sigma_x^l \quad (۳-الف)$$

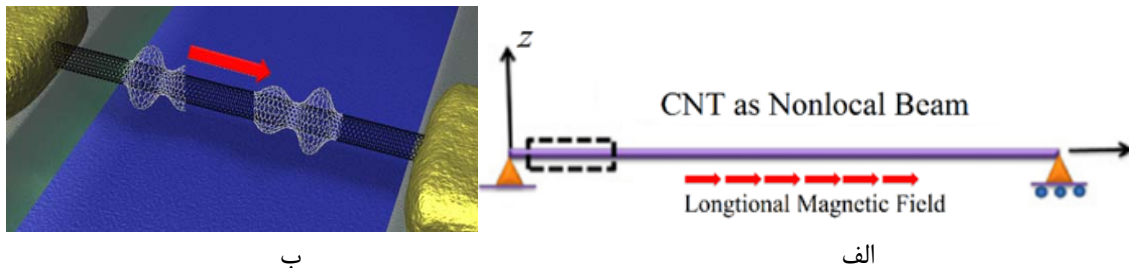
$$\tau_{xy}^{nl} - (e_0 a)^2 \tau_{xy,xx}^{nl} = \tau_{xy}^l \quad (۳-ب)$$

در روابط اخیر  $E$  و  $G$  به ترتیب مدول یانگ و مدول برشی هستند،  $\sigma_x^{nl}$  تنش عمودی و  $\tau_{xy}^{nl}$  تنش برشی عرضی غیرموضعی هستند. همچنین پارامتر  $(e_0 a)^2$  به منظور در نظر گرفتن اثرات اندازه‌های کوچک در پاسخ نانسازه است. به منظور بررسی رفتار ارتعاشات عرضی نانو تیر تحت تأثیر میدان مغناطیسی، در ادامه با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو معادلات حرکت حاکم بر سیستم استخراج می‌شود.

## ۲-۲- تئوری غیرموضعی تیر تیموشنکو

تئوری تیر تیموشنکو با در نظر گرفتن اثر همزمان تغییر شکل برشی و ممان خمشی، به مدلی مناسب برای شرح رفتار تیرهای کوتاه تبدیل شده است. در شکل (۱) هندسه کلی سیستم تحت بررسی نشان داده شده است. نانولوله کربنی دارای چگالی  $\rho$ ، مساحت سطح مقطع  $A$ ، مدول برشی  $G$ ، مدول الاستیک  $E$ ، ممان اینرسی جرمی واحد طول  $I$  و طول  $L$  بوده که تحت تأثیر میدان مغناطیسی قرار دارد. به منظور بررسی رفتار ارتعاشات عرضی نانولوله کربنی با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو،  $w(x, t)$  و  $u(x, t)$  به ترتیب نشان دهنده حرکت در راستای محور  $x$  و  $z$  می‌باشند. بنابراین مؤلفه‌های جابجایی در هر نقطه دلخواه از تیر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u = u(x, t), \quad v = 0, \quad w = w(x, t) \quad (۴)$$



شکل ۱- الف- نانولوله کربنی تحت تأثیر میدان مغناطیسی ب- مدل ریاضی مورد استفاده

بر اساس تئوری الاستیسیته خطی، مؤلفه‌های میدان‌های کرنش به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u}{\partial y} = 0, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, & \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (5)$$

کرنش برشی  $\varepsilon_{zx}$  متناظر با شیب ناشی از اعوجاج برشی  $\beta(x, t) = \partial w / \partial x$  است. میدان‌های تنش متناظر با مؤلفه کرنش‌های ذکر شده در رابطه (۵) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_{xz} = G \varepsilon_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x} \quad (6)$$

شیب ناشی از خمش  $\psi(x, t)$  و شیب ناشی از اعوجاج برشی  $\beta(x, t)$  در نظر گرفته می‌شود. بنابراین شیب تیر در هر نقطه دلخواه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = \psi(x, t) + \beta(x, t) \quad (7)$$

با توجه به دستگاه مختصات انتخاب شده، جابجایی هر نقطه دلخواه از تیر در راستای  $x$  و در راستای  $y$  به صورت زیر خواهد بود [۳]:

$$\bar{u}(x, z, t) = u(x, t) + z \psi(x, t) \quad (8\text{-الف})$$

$$w(x, z, t) = w(x, t) \quad (8\text{-ب})$$

بنابراین میدان کرنش در طول نانولوله کربنی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9\text{-الف})$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \quad (9\text{-ب})$$

با استفاده از مدل دینامیکی اصل کار مجازی می‌توان معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت را با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو استخراج کرد. با تعریف منته‌های تنش به صورت:

$$M = \int z \sigma_{xx} dA, \quad Q = \kappa_s \int \tau_{xz} dA, \quad N = \int \sigma_{xx} dA \quad (10)$$

که در آن  $\kappa_s$  ضریب تصحیح برشی بوده و به منظور تصحیح فرض کرنش برشی ثابت بر روی سطح مقطع تیر در تئوری تیر تیموشنکو اعمال می‌شود. با در نظر گرفتن فرضیات اخیر، اصل کار مجازی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^T \int_0^L \left[ \rho A \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) + \rho I \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \delta \psi}{\partial t} - N \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right. \\ \left. - Q \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \delta \psi \right) + q \delta w + P \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] dx dt \quad (11) \end{aligned}$$

که در آن  $q$  و  $P$  به ترتیب نشان دهنده نیروی گسترده عرضی و نیروی محوری می‌باشند. با اعمال اصل تغییرات به رابطه اخیر و انجام عملیات ریاضی معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (12\text{-الف})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + q - \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (۱۲-ب)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (۱۲-ج)$$

با صرف نظر کردن از حرکت محوری، معادلات حرکت به صورت زیر ساده‌سازی می‌شوند:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + q - \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (۱۳-الف)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (۱۳-ب)$$

با در نظر گرفتن رفتار ویسکوالاستیک با استفاده از مدل استاندارد جامد خطی، رابطه بین تنش و کرنش را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\Gamma \sigma_x = \Xi \varepsilon_x \quad (۱۴-الف)$$

$$\Gamma \tau_{xz} = \Upsilon \gamma_{xz} \quad (۱۴-ب)$$

در روابط اخیر اپراتورهای ویسکوالاستیک  $\Gamma$ ،  $\Xi$  و  $\Upsilon$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Gamma = 1 + \eta_{visco} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \Xi = E(1 + \mu_b \frac{\partial}{\partial t}), \quad \Upsilon = G(1 + \mu_s \frac{\partial}{\partial t}) \quad (۱۵)$$

که در آن پارامترهای  $\eta_{visco}$ ،  $\mu_b$  و  $\mu_s$  پارامترهای رئولوژیکی متناظر با مدل ویسکوالاستیک می‌باشند. به ازای  $\eta_{visco} = 0$  و  $\mu_b = \mu_s = \mu$  روابط اخیر به مدل ویسکوالاستیک کلونین-وویت تبدیل می‌شوند. با اعمال عملگرهای ویسکوالاستیک به طرفین روابط (۱۴-الف) و (۱۴-ب) خواهیم داشت:

$$\Gamma \left( \sigma_x^{nl} - (e_0 a)^2 \sigma_{x,xx}^{nl} \right) = \Gamma \sigma_x^l = \Xi \varepsilon_x = E(1 + \mu_b \frac{\partial}{\partial t}) \varepsilon_x \quad (۱۶-الف)$$

$$\Gamma \left( \tau_{xz}^{nl} - (e_0 a)^2 \tau_{xz,xx}^{nl} \right) = \Gamma \tau_{xz}^l = \Upsilon \gamma_{xz} = G(1 + \mu_s \frac{\partial}{\partial t}) \gamma_{xz} \quad (۱۶-ب)$$

با توجه به رابطه (۱۰) گشتاور خمشی غیرموضعی،  $M^{nl}$ ، و نیروی برشی غیرموضعی ناشی از حرکت،  $N^{nl}$ ، را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$M^{nl} = \int z \sigma_{xx}^{nl} dA, \quad Q^{nl} = \kappa_s \int \tau_{xz}^{nl} dA \quad (۱۷)$$

با اعمال عملگرهای ویسکوالاستیک به طرفین رابطه اخیر و با استفاده از روابط (۹) و (۱۶) گشتاور خمشی و نیروی محوری غیرموضعی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Gamma M^{nl} = (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 (\Gamma M^{nl})}{\partial x^2} + E(1 + \mu_b \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۱۸-الف)$$

$$\Gamma Q^{nl} = (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 (\Gamma Q^{nl})}{\partial x^2} + \kappa_s A G \left( 1 + \mu_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \quad (۱۸-ب)$$

با مشتق گرفتن از روابط (۱۳-الف) نسبت به متغیر  $x$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \quad (۱۹)$$

با مشتق گرفتن از رابطه (۱۳-ب) و حذف کردن متغیر  $Q$  با استفاده از رابطه (۱۳-الف) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho I \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) - q \quad (20)$$

با جایگذاری روابط (۱۹) و (۲۰) در معادله (۱۸)، گشتاور خمشی و نیروی محوری غیرموضعی بر حسب متغیرهای جابجایی  $w$  و دوران  $\psi$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Gamma M^{nl} = EI \left( 1 + \mu_b \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (e_0 a)^2 \Gamma \left[ \rho I \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) - q \right] \quad (21\text{-الف})$$

$$\Gamma Q^{nl} = \kappa_s GA \left( 1 + \mu_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) + (e_0 a)^2 \Gamma \left[ \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial q}{\partial x} \right] \quad (21\text{-ب})$$

با اعمال اپراتور  $\Gamma$  به طرفین رابطه (۱۳) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \Gamma Q}{\partial x} + \Gamma q - \Gamma \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 \Gamma w}{\partial t^2} \quad (22\text{-الف})$$

$$\frac{\partial \Gamma M}{\partial x} - \Gamma Q = \rho I \frac{\partial^2 \Gamma \psi}{\partial t^2} \quad (22\text{-ب})$$

با جایگذاری رابطه (۲۱) در روابط اخیر، معادلات حاکم بر حرکت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa_s GA \left( 1 + \mu_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \right] \quad (23)$$

$$+ (e_0 a)^2 \Gamma \left[ \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right] - \Gamma \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) + q = \rho A \frac{\partial^2 \Gamma w}{\partial t^2} \quad (الف)$$

$$EI \left( 1 + \mu_b \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \Gamma \rho I \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} - \kappa_s GA \left( 1 + \mu_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) = \rho I \frac{\partial^2 \Gamma \psi}{\partial t^2} \quad (23\text{-ب})$$

با اعمال اپراتور  $\Gamma$  و مرتب‌سازی، معادلات حرکت را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\kappa_s GA \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q + (e_0 a)^2 \left\{ \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right\} + \mu_s \kappa_s GA \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \right) \quad (24\text{-الف})$$

$$+ \eta_{visco} \left\{ (e_0 a)^2 \left[ \rho A \frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial t^3} + P \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} - \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} \right] - P \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} \right\} = 0$$

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \kappa_s GA \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) - \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 \rho I \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (24\text{-ب})$$

$$+ \mu_b EI \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial t} + \eta_{visco} (e_0 a)^2 \rho I \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^2 \partial t^3} - \kappa_s \mu_s GA \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \eta_{visco} \rho I \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3} =$$

با صرف نظر کردن از اثرات ویسکوالاستیک و نیروهای خارجی، معادلات اخیر مشابه معادلات استخراج شده توسط ردی [۳۰] است.

## ۲-۳- روابط ماکسول

معادلات ماکسول، چگونگی ایجاد شدن میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را توسط بارها و جریان‌های الکتریکی و نیز پیدایش یکی از این میدان‌ها توسط تغییر میدان دیگر را توصیف می‌کنند [۳۱]. برای این معادلات که مبانی الکترومغناطیس (کلاسیک) و مهندسی برق به شمار می‌روند فرمول بندی‌های مختلفی ارائه شده است. اگر  $\mathbf{J}$  بردار چگالی جریان الکتریکی،  $\mathbf{h}$  بردار توزیع میدان الکتریکی و  $\mathbf{e}$  بردار شدت میدان الکتریکی باشد در این صورت معادلات ماکسول را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۳۲]:

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{h} \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\eta_M \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \quad (26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (27)$$

$$\mathbf{e} = -\eta \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right) \quad (28)$$

$$\mathbf{h} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}) \quad (29)$$

$$\mathbf{h} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}) = -H_x \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \mathbf{i} + H_x \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{j} + H_x \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{k} \quad (30)$$

در روابط اخیر  $\eta_M$  تراوایی میدان مغناطیسی<sup>۱</sup> است.  $\nabla$  اپراتور همیلتونی بوده و به صورت  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$  تعریف می‌شود. در تحلیل حاضر فرض می‌شود که میدان مغناطیسی تنها دارای مؤلفه عرضی بوده و به صورت  $\mathbf{H} = (H_x, 0, 0)$  بر نانولوله اعمال می‌شود. اگر بردار جابجایی به صورت  $\mathbf{U} = (u, v, w)$  باشد، خواهیم داشت:

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{h} = H_x \left( -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{i} - H_y \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + H_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{k} \quad (31)$$

نیروی لورنتس به صورت نیروی وارد بر بار نقطه‌ای در میدان الکترومغناطیسی تعریف می‌شود. این نیرو به صورت رابطه زیر که شامل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی است بیان می‌شود [۲۷]:

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = \eta_M (\mathbf{J} \times \mathbf{H}) = 0 \mathbf{i} + \eta_M H_x^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{j} + \eta_M H_x^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{k} \quad (32)$$

بنابراین مؤلفه نیروهای لورنتس به صورت زیر خواهند بود:

$$f_x = 0 \quad (33)$$

<sup>1</sup> Magnetic Field Permeability



$$f_y = \eta_M H_x^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) \quad (34)$$

$$f_z = \eta_M H_x^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) \quad (35)$$

با توجه به اینکه در مقاله حاضر  $w = w(x, t)$  در نظر گرفته شده است و با توجه به رابطه (۳۵) نیروی لورنتس به صورت زیر خواهد بود:

$$f_z = \eta_M H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (36)$$

با توجه به رابطه اخیر نیروی الکترومغناطیسی ایجاد شده واحد طول به صورت

$$q = \int_A f_z dA = \eta_M A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{به دست می آید [۳۳].}$$

## ۲-۴- شرایط مرزی حاکم

شرایط مرزی حاکم بر نانو تیر با در نظر گرفتن شرایط تکیه‌گاهی ساده در دو انتها و در موقعیت  $x = 0$  و  $x = L$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w = 0, \quad V = 0 \quad (37)$$

$$\psi = 0, \quad M = 0 \quad (38)$$

که  $V$  نیروی برشی و  $M$  گشتاور خمشی هستند. با استفاده از روابط (۲۱) شرایط مرزی حاکم برای نانولوله تیموشنکو ویسکوالاستیک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$w = 0, \quad \kappa_s GA \left( 1 + \mu_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) + (e_0 a)^2 \Gamma \left[ \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial q}{\partial x} \right] = 0 \quad \text{(الف-۳۹)}$$

$$\psi = 0, \quad EI \left( 1 + \mu_b \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (e_0 a)^2 \Gamma \left[ \rho I \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) - q \right] = 0 \quad \text{(ب-۳۹)}$$

## ۲-۵- بی‌بعدسازی معادلات حاکم

به منظور مطالعه تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار ارتعاشی سیستم از شکل بی‌بعد معادلات حرکت استفاده می‌شود. با تعریف متغیرهای بی‌بعد به صورت زیر:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad w^* = \frac{w}{L}, \quad \delta^* = \frac{I}{AL^2}, \quad \beta^* = \frac{EI}{\kappa_s GAL^2}, \quad \alpha = \frac{e_0 a}{L}, \quad c = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (40)$$

$$\Omega = c\omega, \quad \mu^* = \frac{\mu}{c}, \quad \eta^* = \frac{\eta_{visco}}{c}, \quad H_x^* = \frac{\eta_M H_x^2}{\kappa_s G}, \quad t = \Omega \tau, \quad P^* = \frac{1}{\kappa_s GA} P, \quad q^* = \frac{L}{\kappa_s GA} q$$

با استفاده از رابطه (۳۶)، معادلات حرکت را می‌توان بر حسب متغیرهای بی‌بعد به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial \psi}{\partial x^*} \right) - P^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} - \beta^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial \tau^2} + H_x^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \\ & + \alpha^2 \left\{ \beta^* \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*2} \partial \tau^2} + P^* \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} - H_x^* \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} \right\} + \mu_s^* \left( \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*2} \partial \tau} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^* \partial \tau} \right) \quad (۴۱-الف) \\ & + \eta^* \left\{ \alpha^2 \left[ \beta^* \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^{*2} \partial \tau^3} + P^* \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^{*4} \partial \tau} \right] - P^* \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*2} \partial \tau} + \beta^* \frac{\partial^3 w^*}{\partial \tau^3} \right\} = 0 \\ & \beta^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \psi \right) - \beta^* \delta^* \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \alpha^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^{*2} \partial \tau^2} \right) \quad (۴۱-ب) \\ & + \mu_b^* \beta^* \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^{*2} \partial \tau} + \eta^* \alpha^2 \beta^* \delta^* \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^{*2} \partial \tau^3} - \mu_s^* \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) - \eta^* \beta^* \delta^* \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau^3} = 0 \end{aligned}$$

در ادامه برای اختصار علامت\* از معادلات حذف می‌شود.

## ۲-۶- حل تحلیلی برای ارتعاشات نانولوله کربنی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها

در این قسمت معادله حرکت حاکم بر سیستم که در روابط (۴۱) ارائه شده‌اند، با استفاده از روش تحلیلی برای نانولوله کربنی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها مورد تحلیل قرار می‌گیرد و از حل ناویز پاسخ تحلیلی معادلات اخیر استخراج می‌شود. بنابراین میدان‌های جابجایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$w(x) = W_n e^{i\Omega\tau} \sin \lambda x, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (۴۲)$$

$$\psi(x) = G_n e^{i\Omega\tau} \cos \lambda x, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (۴۳)$$

که در آن  $W_n$  و  $G_n$  ثوابت مجهولی هستند که به ازای هر مقدار دلخواه  $n$  باید محاسبه شوند و  $\lambda = n\pi/L$  است. باید توجه داشت که مقدار  $G_n$  برای تیر اویلر- برنولی برابر صفر است. با جایگذاری روابط (۴۲) و (۴۳) در معادلات حرکت (۴۱) و مرتب‌سازی آنها، معادلات جبری زیر به دست می‌آید:

$$-(W_n \lambda^2 + G_n \lambda) + P W_n \lambda^2 + \beta W_n \Omega^2 - H_x W_n \lambda^2 + \alpha^2 (\beta W_n \lambda^2 \Omega^2 + P W_n \lambda^4 - H_x W_n \lambda^4) \quad (۴۴-الف)$$

$$+ i \mu_s \Omega (W_n \lambda^2 - G_n \lambda) + \eta [i \alpha^2 \Omega (\beta W_n \lambda^2 \Omega^2 + P W_n \lambda^4) + i P W_n \lambda^2 \Omega - i W_n \Omega^3] = 0$$

$$-\beta G_n \lambda^2 - (\lambda W_n + G_n) + \beta \delta (\Omega^2 G_n + \alpha^2 \Omega^2 \lambda^2 G_n) \quad (۴۴-ب)$$

$$- i \mu_b \beta \lambda^2 G_n \Omega + i \lambda^2 G_n \Omega^3 \eta \alpha^2 \beta \delta - \mu_s i \Omega (\lambda W_n + G_n) + i \eta \beta \delta G_n \Omega^3 = 0$$

با مرتب‌سازی روابط فوق، معادلات اخیر را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بیان نمود:

$$\begin{bmatrix} R & Q \\ Q & T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_n \\ G_n \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (۴۵)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
 R &= \lambda^2 \left[ P - 1 - H_x + \alpha^2 \left( \lambda^2 (P - H_x) + \beta \Omega^2 \right) - i \mu_s \Omega \right] \\
 &\quad + \eta \lambda^2 \left[ i \alpha^2 \Omega (\beta \Omega^2 + P \lambda^2) + i P \Omega - i \Omega^3 \right] + \beta \Omega^2 \\
 Q &= -\lambda (1 + i \mu_s \Omega) \\
 T &= -\beta \lambda^2 - 1 + \Omega^2 \beta \delta (1 + \alpha^2 \lambda^2) + i \Omega \left( \Omega^2 \beta \eta \delta [\lambda^2 \alpha^2 + 1] - \beta \lambda^2 - \mu_s \right)
 \end{aligned} \tag{۴۶}$$

معادله اخیر یک مسأله مقدار ویژه استاندارد است که مقادیر ویژه آن معرف فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌باشند و  $\Omega = \Omega_n$  است. مقادیر ویژه معادله اخیر از صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب به دست می‌آید. با صرفنظر کردن از اثر ویسکوالاستیک، نیروهای خارجی و اثرات غیرموضعی، سیستم به تیر تیموشنکو کلاسیک تبدیل می‌شود و معادله مقدار ویژه به منظور تعیین فرکانس‌های طبیعی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\beta^2 \delta \Omega^4 - \Omega^2 (1 + \beta^2 n^2 \pi^2 + \beta \delta n^2 \pi^2) + \beta n^4 \pi^4 = 0 \tag{۴۷}$$

که با مقدار متناظر به دست آمده برای تیر تیموشنکو دقیقاً یکسان بوده [۳۴] و این نشان دهنده صحت فرمول‌بندی ارائه شده است. همچنین با صرفنظر کردن از اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی، معادله اخیر فرکانس‌های طبیعی تیر اویلر برنولی غیرموضعی را در اختیار می‌گذارد [۳۵]:

$$\Omega_{\text{Euler-Bernoulli}} = \frac{n^2 \pi^2}{\sqrt{1 + n^2 \pi^2 \alpha^2}} \tag{۴۸}$$

## ۲-۷- تحلیل کمانش نانولوله تحت میدان مغناطیسی

با صرف نظر کردن از بخش زمانی معادلات حرکت، معادلات حاکم بر کمانش تحت تأثیر نیروهای خارجی اعمالی بر نانو تیر ناشی از میدان مغناطیسی با استفاده از روابط (۴۵) و (۴۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} (P - H_x) \lambda^2 - \lambda^2 + \alpha^2 \lambda^4 (P - H_x) & -\lambda \\ -\lambda & -\beta \lambda^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_n \\ G_n \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{۴۹}$$

معادله اخیر یک مسأله مقدار ویژه استاندارد است که مقادیر ویژه آن معرف بار کمانش سیستم می‌باشند و  $P = P_{cr}(n)$  است. مقادیر ویژه معادله اخیر  $P_{cr}(n)$  از صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب به دست می‌آید. کمترین مقدار ویژه یعنی  $P_{cr}(1) = P_{cr}$  معرف بار کمانش سیستم است. بعد از انجام برخی عملیات ریاضی و ساده‌سازی، بار کمانش برای نانولوله تیموشنکو به صورت رابطه تحلیلی زیر به دست می‌آید:

$$P = P_{cr}(n) = \frac{\pi^4 \alpha^2 n^4 \beta H_x + [(H_x + 1) \beta + H_x \alpha^2] n^2 \pi^2 + H_x}{(1 + n^2 \pi^2 \alpha^2)(1 + n^2 \pi^2 \beta)} \tag{۵۰}$$

در ادامه با استفاده از روابط ارائه شده در این قسمت، تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار ارتعاشی و پایداری نانولوله کربنی تیموشنکو بررسی می‌شود.

### ۳- بررسی نتایج

پس از تحلیل ارائه شده برای استخراج فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم، در این بخش به مطالعه رفتار ارتعاشی و ناپایداری این سیستم به ازای مقادیر مختلف پارامترهای سیستم پرداخته می‌شود. مشخصات هندسی و مکانیکی نانولوله کربنی تحت بررسی عبارتند از:  $E = 1.5 \text{ TPa}$ ،  $\rho = 2240 \text{ kg/m}^3$ ،  $\nu = 0.28$ ، قطر  $1.1 \text{ nm}$  و ضخامت مؤثر  $0.324 \text{ nm}$  [۳۶]. ضریب تصحیح برشی برای تیر تیموشنکو برابر  $k_s = 0.833$  است [۳۷]. پارامتر غیرموضعی برای نانولوله‌ها توسط وانگ در محدوده  $0 \leq e_0 a \leq 2 \text{ nm}$  به دست آمده است [۳۸]. بنابراین در مقاله حاضر، بررسی‌ها به ازای چهار مقدار برای پارامتر غیرموضعی،  $e_0 a = 0, 0.5, 1, 2 \text{ nm}$ ، انجام می‌شود. مقادیر عددی شدت میدان مغناطیسی و نفوذپذیری مغناطیسی با استفاده از تحقیق مورمو و همکاران  $H_x = 10^8 \text{ A/m}$  و  $\eta_M = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$  در نظر گرفته می‌شود [۳۹]. همچنین، مقدار پارامتر رئولوژیکی ویسکوالاستیک بی‌بعد نیز  $\eta$  برابر  $0.1$  در نظر گرفته شده است.

قبل از مطالعه تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار ارتعاشی و ناپایداری نانولوله کربنی تیموشنکو ویسکوالاستیک تحت میدان مغناطیسی به بررسی صحت مدل تحلیلی ارائه شده پرداخته می‌شود. با توجه به اینکه رفتار ارتعاشی نانولوله کربنی ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن مدل استاندارد جامد خطی و تحت تأثیر میدان مغناطیسی مطالعه نشده است، بنابراین به منظور بررسی دقت نتایج با صرف‌نظر از رفتار ویسکوالاستیک و در نظر گرفتن  $H_x = P = 0$  با نتایج به دست آمده توسط ردی مورد مقایسه قرار می‌گیرد [۳۰]. در جدول (۱) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد به ازای مقادیر مختلف ضریب لاغری ( $L/d = 10, 20, 100$ ) و پارامتر غیرموضعی ( $\alpha = e_0 a = 0, 0.5, 1, 1.5, 2 \text{ nm}$ ) آورده شده است. با استفاده از نتایج جدول (۱) کاملاً واضح است که نتایج روش ارائه شده با نتایج ردی [۳۰] تطابق خوبی دارد.

#### ۳-۱- بررسی تأثیر نسبت طول و پارامتر غیرموضعی

در ادامه نتایج حاصل از تئوری کلاسیک تیر تیموشنکو در جدول (۲) به ازای مقادیر مختلف طول بی‌بعد (ضریب لاغری) و پارامتر غیرموضعی آورده شده است. در جدول (۲)، اولین فرکانس طبیعی خمشی و برشی بی‌بعد سیستم به ازای مقادیر مختلف ضریب لاغری ( $L/d$ ) با استفاده از دو تئوری تنش کوپل و تئوری کلاسیک نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که به ازای تمامی مقادیر ضریب لاغری، فرکانس طبیعی حاصل از تئوری غیرموضعی مقدار بیشتری از تئوری کلاسیک دارد. بنابراین تئوری کلاسیک فرکانس‌های طبیعی نانو تیر را کمتر از مقدار واقعی پیش‌بینی می‌کند. همچنین دیده می‌شود که با افزایش مقدار ضریب لاغری که متناظر با افزایش طول نانولوله می‌باشد، نتایج تئوری موجود به تئوری کلاسیک نزدیک می‌شود و برعکس، با کاهش ضریب لاغری، فرکانس‌های طبیعی از تئوری کلاسیک فاصله می‌گیرند و لازم است که برای مطالعه این نوع نانولوله‌ها از تئوری تیر تیموشنکو استفاده شود. علاوه بر این، نتایج نشان می‌دهد که به ازای  $L/d = 10$  افزایش پارامتر غیرموضعی به مقدار  $e_0 a = 2 \text{ (nm)}$  باعث کاهش  $13.16\%$  فرکانس طبیعی خمشی و برشی [۴۰] می‌شود که میزان تأثیر آن بر هر دو فرکانس یکسان است. با افزایش پارامتر طول بی‌بعد، کاهش فرکانسی کمتر می‌شود و پارامتر غیرموضعی تأثیر بسیار کمتری بر فرکانس‌های طبیعی تیرهای لاغر دارد که این نتیجه از شکل (۲) نیز قابل مشاهده است.

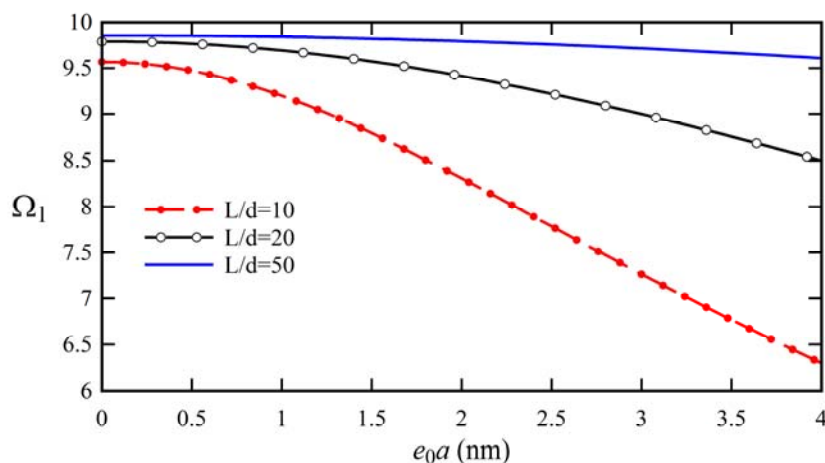
جدول ۱- مقایسه فرکانس طبیعی اول بی بعد نانولوله کربنی تیموشکنو با تکیه‌گاه‌های ساده

$L/d$	$e_0a$ (nm)	تئوری تیر اویلر-برنولی		تئوری تیر تیموشکنو	
		تحقیق حاضر	مرجع [۳۰]	تحقیق حاضر	مرجع [۳۰]
10	0	9.8694	9.8696	9.7457	9.7454
	0.5	9.6348	9.6347	9.5136	9.5135
	1	9.4152	9.4159	9.298	9.297
	1.5	9.2114	9.2113	9.0952	9.0953
	2	9.0198	9.0195	8.9055	8.9059
20	0	9.8693	9.8696	9.8380	9.8381
	0.5	9.6342	9.6347	9.6042	9.6040
	1	9.4159	9.4159	9.3857	9.3858
	1.5	9.2115	9.2113	9.1818	9.1819
	2	9.0197	9.0195	8.9904	8.9907
100	0	9.8696	9.8696	9.8689	9.8683
	0.5	9.6348	9.6347	9.6336	9.6335
	1	9.4157	9.4159	9.4148	9.4147
	1.5	9.2114	9.2113	9.2103	9.2101
	2	9.0196	9.0195	9.0185	9.0183

جدول ۲- اولین فرکانس طبیعی خطی بی بعد خمشی و برشی سیستم به ازای ضریب لاغری متفاوت

با تئوری تنش کوپل و تئوری کلاسیک

$e_0a$ (nm)	0		0.5		2	
	خمشی	برشی	خمشی	برشی	خمشی	برشی
$L/d$						
10	9.5676	388.0279	9.4716	384.1311	8.3080	336.9359
15	9.7312	858.3927	9.6874	854.5292	9.0941	802.1987
20	9.7909	1516.7309	7.7660	1512.8787	9.4144	1458.4166
30	9.8343	3397.5641	9.8232	3393.7216	9.6607	3337.6053
40	9.8497	6030.6853	9.8434	6026.8459	9.7508	5970.1218
50	9.8586	9416.1138	9.8528	9412.2759	9.7931	9355.2653
تئوری کلاسیک	9.8664	37627.7931	-	-	-	-



شکل ۲- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول بر حسب پارامتر غیرموضعی به ازای مقادیر مختلف ضریب لاغری

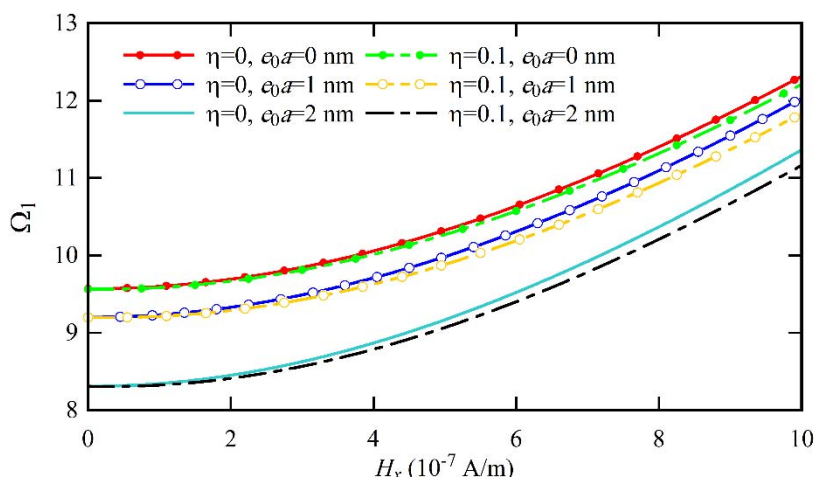
### ۲-۳- تأثیر میدان مغناطیسی بر مشخصه‌های ارتعاشی و پایداری

در ادامه به بررسی تأثیر میدان مغناطیسی بر مشخصه‌های ارتعاشی نانولوله کربنی تیموشنکو پرداخته می‌شود. در جدول (۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول خمشی و برشی به ازای مقادیر مختلف شدت میدان مغناطیسی، پارامتر غیرموضعی و  $L/d = 10$  نشان داده شده است. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که با افزایش شدت میدان مغناطیسی، فرکانس‌های طبیعی سیستم نیز افزایش می‌یابند. علاوه بر این نتایج نشان می‌دهد هنگامی که مقدار شدت میدان مغناطیسی  $H_x$  بیشتر از  $10^8$  A/m می‌شود، افزایش فرکانس طبیعی اول خمشی به شدت افزایش می‌یابد. همچنین بر اساس این نتایج تأثیر شدت میدان مغناطیسی بر فرکانس طبیعی اول برشی بسیار ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن است. این نتایج با توجه به شکل‌های (۳) و (۴) که در آن‌ها تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم بر حسب شدت میدان مغناطیسی و به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی و پارامتر میرایی سازه‌ای نشان داده شده است، قابل مشاهده است. با توجه به این شکل‌ها مشاهده می‌شود که تأثیر شدت میدان مغناطیسی بر افزایش فرکانس‌های طبیعی بالا، بسیار بیشتر است. بررسی تأثیر پارامتر غیرموضعی در حضور میدان مغناطیسی با شدت بیشتر نشان می‌دهد که در این شرایط افزایش پارامتر غیرموضعی باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی شده و اثر آن بر کاهش فرکانس برشی بسیار بیشتر از فرکانس خمشی است. نتایج نشان می‌دهد که به ازای مقادیر بسیار پایین شدت میدان مغناطیسی، تأثیر میرایی سازه‌ای بر فرکانس طبیعی اول بسیار ناچیز بوده ولی با افزایش شدت میدان، وجود میرایی سازه‌ای باعث کاهش در مقادیر فرکانس طبیعی اول می‌شود. علاوه بر این، میرایی سازه‌ای نیز باعث کاهش فرکانس طبیعی دوم شده و اثر آن بر کاهش فرکانس طبیعی دوم بیشتر از فرکانس طبیعی اول می‌باشد.

### جدول ۳- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول خمشی و برشی نانولوله به ازای مقادیر مختلف شدت میدان مغناطیسی،

پارامتر غیرموضعی و  $L/d = 10$

$H_x$	$e_0 a$ (nm)	0		0.5		2	
		خمشی	برشی	خمشی	برشی	خمشی	برشی
0	0	9.5676	388.0279	9.4716	384.1311	8.3079	336.0359
$10^0$	$3.2 \times 10^{-18}$	9.5676	388.0279	9.4716	384.1311	8.3079	336.9359
$10^1$	$3.2 \times 10^{-16}$	9.5676	388.0279	9.4716	384.1311	8.3079	336.9359
$10^2$	$3.2 \times 10^{-14}$	9.5676	388.0279	9.4716	384.1311	8.3079	336.9359
$10^3$	$3.2 \times 10^{-12}$	9.5676	388.0279	9.4716	384.1311	8.3079	336.9359
$10^4$	$3.2 \times 10^{-10}$	9.5676	388.0279	9.4716	384.1311	8.3079	336.9359
$10^5$	$3.2 \times 10^{-8}$	9.5676	388.0279	9.4716	384.1311	8.3079	336.9359
$10^6$	$3.2 \times 10^{-6}$	9.5680	388.0279	9.4719	384.1311	8.3082	336.9359
$10^7$	$3.2 \times 10^{-4}$	9.5990	388.0279	9.5032	384.1311	8.3440	336.936
$5 \times 10^7$	$80.2 \times 10^{-4}$	10.3235	388.0282	10.2345	384.1313	9.1681	336.937
$10^8$	$3.2 \times 10^{-2}$	12.3156	388.0289	12.2411	384.1321	11.3642	337.0504
$5 \times 10^8$	$80.2 \times 10^{-2}$	39.9343	388.05168	78.1037	384.2302	77.9647	336.9359

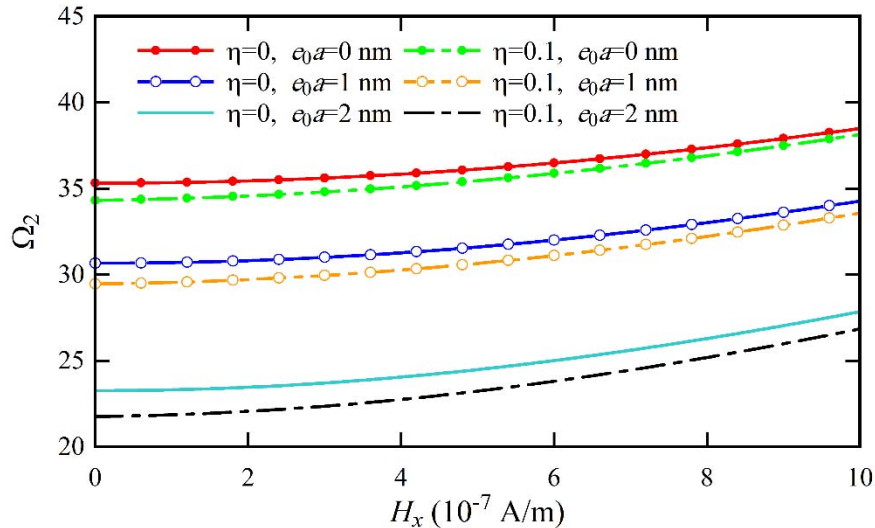


شکل ۳- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول بر حسب شدت میدان مغناطیسی به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی

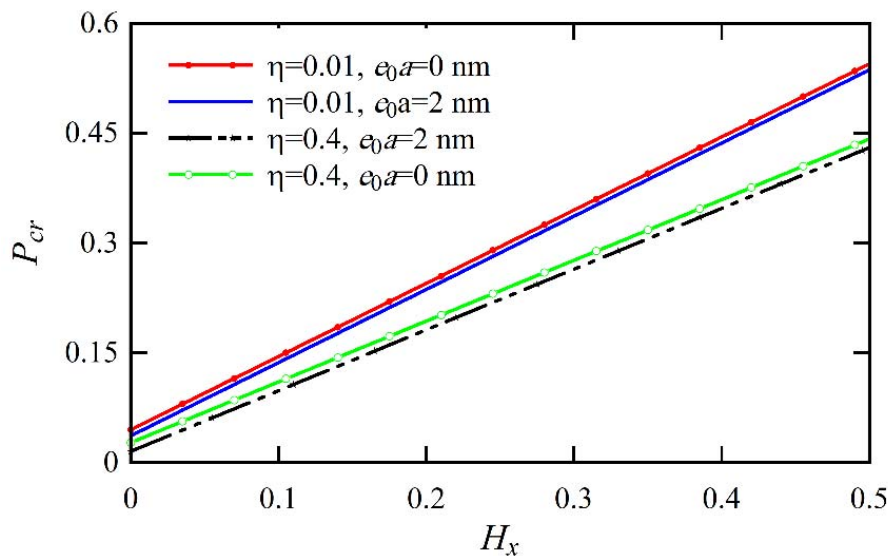
برای نانولوله تیموشنکو با  $L/d = 10$

در شکل (۵) تأثیر پارامتر بی بعد شدت میدان مغناطیسی بر بار کمانش نانولوله کربنی تیموشنکو به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی و میرایی نشان داده شده است. همانطور که نتایج نشان می دهد با افزایش شدت میدان مغناطیسی، بار کمانش تیر نیز افزایش می یابد. اما نکته قابل توجه این است که هر چند افزایش پارامتر غیرموضعی باعث کاهش بار کمانش می شود اما مقدار کاهش، مستقل از شدت میدان مغناطیسی است. علاوه بر این، مشاهده می شود که افزایش مقدار میرایی سازه نیز باعث کاهش بار بحرانی سیستم می شود و با افزایش شدت میدان مغناطیسی، تأثیر آن بر کاهش بار بحرانی کمتر می شود.

به عنوان مثال به ازای  $\eta = 0.4$  کاهش بار بحرانی در  $H_x = 0$  و  $H_x = 0.5$  به ترتیب در حدود ۵۷ درصد و ۱۹ درصد به دست می آید.



شکل ۴- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم بر حسب شدت میدان مغناطیسی و به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی برای نانولوله تیموشنکو با  $L/d = 10$

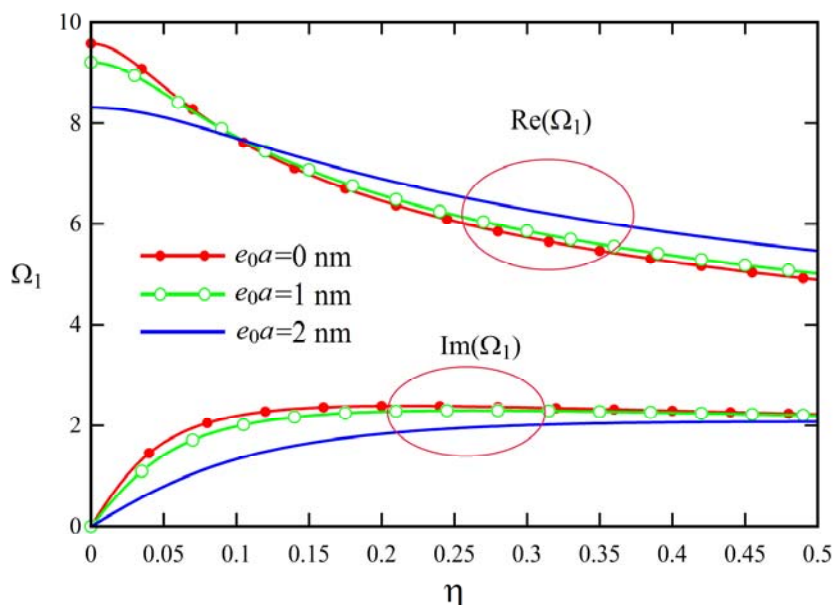


شکل ۵- تأثیر پارامتر بی‌بعد شدت میدان مغناطیسی بر بار کمناش نانو تیر تیموشنکو به ازای دو مقدار مختلف پارامتر غیرموضعی

### ۳-۳- اثر ویسکوالاستیک استاندارد جامد خطی بر مشخصه‌های ارتعاشی و پایداری

به منظور بررسی تأثیر پارامترهای مدل ویسکوالاستیک استاندارد جامد خطی بر فرکانس‌های طبیعی نانولوله کربنی تیموشنکو ویسکوالاستیک، در شکل (۶) بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه نانولوله کربنی ویسکوالاستیک تیموشنکو با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها بر حسب پارامتر  $\eta$  به ازای  $\mu_s = \mu_b = 0$ ،  $L/d = 10$  و مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که رفتار ویسکوالاستیک با مدل استاندارد جامد خطی تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر مشخصه‌های ارتعاشی نانولوله کربنی تیموشنکو دارد.





**شکل ۶-** بخش‌های حقیقی و موهومی فرکانس طبیعی بی‌بعد اول،  $\Omega_1$ ، بر حسب پارامتر  $\eta$  برای نانولوله کربنی تیموشنکو ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به ازای پارامتر بی‌بعد  $L/d = 10$

با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که پارامتر  $\eta$  تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر فرکانس‌های طبیعی سیستم دارد و با افزایش آن بخش حقیقی مقادیر ویژه کاهش و بخش موهومی افزایش می‌یابد. علاوه بر این پارامتر غیرموضعی نیز بر رفتار سیستم تأثیرگذار است، با افزایش  $\eta$  تا مقدار  $\eta = 0.1$  کاهش فرکانس طبیعی با پارامتر غیرموضعی رابطه معکوس دارد و با کاهش پارامتر غیرموضعی، کاهش فرکانس طبیعی شدت می‌یابد. به ازای مقادیر  $\eta$  بیشتر از 0.1، پارامتر غیرموضعی باعث کاهش تأثیر رفتار ویسکوالاستیک بر مشخصه‌های ارتعاشی سیستم می‌شود و بنابراین، تأثیر اثر ویسکوالاستیک بر فرکانس‌های طبیعی نانولوله کربنی با پارامتر غیرموضعی کمتر، قابل ملاحظه است. علاوه بر این مشاهده می‌شود که به ازای مقادیر بزرگتر  $\eta$ ، میرایی سیستم به شدت افزایش می‌یابد و با رسیدن مقدار آن به 0.1 میرایی سیستم تقریباً به مقدار ثابتی همگرا می‌شود. بر این اساس می‌توان گفت که میرایی سیستم با پارامتر غیرموضعی رابطه معکوس دارد و با افزایش پارامتر غیرموضعی میرایی سیستم کاهش می‌یابد.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو غیرموضعی به بررسی رفتار ارتعاشات عرضی و پایداری نانولوله‌های کربنی ویسکوالاستیک تحت میدان مغناطیسی پرداخته شد. به منظور مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک از مدل دقیق‌تر جامد استاندارد خطی استفاده شد. خلاصه‌ای از نتایج مقاله حاضر به شرح زیر است:

(۱) به ازای مقادیر مختلف ضریب لاغری، فرکانس طبیعی حاصل از تئوری تنش کوپل مقدار بیشتری از تئوری کلاسیک دارد. همچنین با افزایش ضریب لاغری، نتایج تئوری غیرموضعی به تئوری کلاسیک

- نزدیک می‌شود و با کاهش ضریب لاغری، فرکانس‌های طبیعی از تئوری کلاسیک فاصله می‌گیرند و لازم است برای مطالعه این نوع نانو تیرها از تئوری تیر تیموشنکو استفاده شود.
- (۲) در نظر گرفتن اثر غیرموضعی باعث کاهش بار کمانش شده و با افزایش پارامتر غیرموضعی، بار کمانش نانولوله کاهش می‌یابد و در فرکانس‌های بالاتر، تأثیر پارامتر غیرموضعی بر کاهش فرکانسی قابل ملاحظه است.
- (۳) شدت میدان مغناطیسی، باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌شود. علاوه بر این وقتی شدت میدان مغناطیسی از مقدار  $H_x = 10^8 \text{ A/m}$  تجاوز می‌کند نرخ افزایش فرکانس طبیعی اول خمشی بیشتر می‌شود. همچنین، تأثیر شدت میدان مغناطیسی بر فرکانس طبیعی اول برشی بسیار ناچیز و قابل صرفنظر کردن است.
- (۴) با افزایش شدت میدان مغناطیسی، بار کمانش نانولوله نیز افزایش می‌یابد. اما نکته قابل توجه این است که هر چند افزایش پارامتر غیرموضعی باعث کاهش بار کمانش می‌شود، اما این کاهش مستقل از مقدار شدت میدان مغناطیسی است.
- (۵) با افزایش  $\eta$ ، میرایی سیستم افزایش می‌یابد و با رسیدن مقدار آن به 0.1 میرایی سیستم تقریباً به مقدار ثابتی همگرا می‌شود. بعلاوه، میرایی سیستم با پارامتر غیرموضعی رابطه معکوس دارد و با افزایش پارامتر غیرموضعی میرایی سیستم کاهش می‌یابد.

## مراجع

- [1] Karim-Nezhad, G., Khorablou, Z., and Dorraji, P. S., "Modification of Glassy Carbon Electrode with a Bilayer of Multiwalled Carbon Nanotube/Poly (l-arginine) in the Presence of Surfactant: Application to Discrimination and Simultaneous Electrochemical Determination of Dihydroxybenzene Isomers", *Journal of the Electrochemical Society*, Vol. 163, No. 7, pp. B358-B365, (2016).
- [2] Wu, H. L., Kitipornchai, S., and Yang, J., "Thermal Buckling and Postbuckling Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Beams", Vol. 846, pp. 182-187, (2016).
- [3] Togun, N., "Nonlocal Beam Theory for Nonlinear Vibrations of a Nanobeam Resting on Elastic Foundation", *Boundary Value Problems*, Vol. 2016, No. 1, pp. 1-14, (2016).
- [4] Eringen, A. C., "On Differential Equations of Nonlocal Elasticity and Solutions of Screw Dislocation and Surface Waves", *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, (1983).
- [5] Mindlin, R., and Tiersten, H., "Effects of Couple-Stresses in Linear Elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 415-448, (1962).
- [6] Aifantis, E., "Strain Gradient Interpretation of Size Effects", *International Journal of Fracture*, Vol. 95, No. 1-4, pp. 299-314, (1999).

- [7] Gurtin, M., Weissmüller, J., and Larche, F., "A General Theory of Curved Deformable Interfaces in Solids at Equilibrium", *Philosophical Magazine A*, Vol. 78, No. 5, pp. 1093-1109, (1998).
- [8] Yang, F., Chong, A., Lam, D., and Tong, P., "Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, (2002).
- [9] Lam, D., Yang, F., Chong, A., Wang, J., and Tong, P., "Experiments and Theory in Strain Gradient Elasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1477-1508, (2003).
- [10] Zhen, Y., "Vibration and Instability Analysis of Double-Carbon Nanotubes System Conveying Fluid", *Journal of Nanomechanics and Micromechanics*, Vol. 6, No. 4, pp. 04016008, (2016).
- [11] Wang, Y.Z., Wang, Y.S., and Ke, L.L., "Nonlinear Vibration of Carbon Nanotube Embedded in Viscous Elastic Matrix under Parametric Excitation by Nonlocal Continuum Theory", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 83, pp. 195-200, (2016).
- [12] Zhang, Y., Wang, C., and Challamel, N., "Bending, Buckling, and Vibration of Micro/Nanobeams by Hybrid Nonlocal Beam Model", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 136, No. 5, pp. 562-574, (2009).
- [13] Phadikar, J., and Pradhan, S., "Variational Formulation and Finite Element Analysis for Nonlocal Elastic Nanobeams and Nanoplates", *Computational Materials Science*, Vol. 49, No. 3, pp. 492-499, (2010).
- [14] Ansari, R., and Sahmani, S., "Bending Behavior and Buckling of Nanobeams Including Surface Stress Effects Corresponding to Different Beam Theories", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, No. 11, pp. 1244-1255, (2011).
- [15] Ghannadpour, S., Mohammadi, B., and Fazilati, J., "Bending, Buckling and Vibration Problems of Nonlocal Euler Beams using Ritz Method", *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 584-589, (2013).
- [16] Robinson, M. T. A., and Adali, S., "Buckling of Nonuniform and Axially Functionally Graded Nonlocal Timoshenko Nanobeams on Winkler-Pasternak Foundation", *Composite Structures*, Vol. 206, pp. 95-103, (2018).
- [17] Ghadiri, M., Shafiei, N., and Akbarshahi, A., "Influence of Thermal and Surface Effects on Vibration Behavior of Nonlocal Rotating Timoshenko Nanobeam", *Applied Physics A*, Vol. 122, No. 7, pp. 1-19, (2016).
- [18] Ansari, R., Oskouie, M. F., Gholami, R., and Sadeghi, F., "Thermo-Electro-Mechanical Vibration of Postbuckled Piezoelectric Timoshenko Nanobeams Based on the Nonlocal Elasticity Theory", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 89, pp. 316-327, (2016).

- [19] Bahrami, A., and Teimourian, A., "Study on the Effect of Small Scale on the Wave Reflection in Carbon Nanotubes using Nonlocal Timoshenko Beam Theory and Wave Propagation Approach", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 91, pp. 492-504, (2016).
- [20] Wang, C., Zhang, Y., Ramesh, S. S., and Kitipornchai, S., "Buckling Analysis of Micro- and Nano-Rods/Tubes Based on Nonlocal Timoshenko Beam Theory", *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 39, No. 17, pp. 3904, (2006).
- [21] Benzair, A., Tounsi, A., Besseghier, A., Heireche, H., Moulay, N., and Boumia, L., "The Thermal Effect on Vibration of Single-Walled Carbon Nanotubes using Nonlocal Timoshenko Beam Theory", *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 41, No. 22, pp. 225404, (2008).
- [22] Gang-Feng, W., and Xi-Qiao, F., "Timoshenko Beam Model for Buckling and Vibration of Nanowires with Surface Effects", *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 42, No. 15, pp. 155411, (2009).
- [23] Kiani, K., "Application of Nonlocal Higher-Order Beam Theory to Transverse Wave Analysis of Magnetically Affected Forests of Single-Walled Carbon Nanotubes", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 138, pp. 1-16, (2018).
- [24] Jalaei, M., Arani, A. G., and Nguyen-Xuan, H., "Investigation of Thermal and Magnetic Field Effects on the Dynamic Instability of FG Timoshenko Nanobeam Employing Nonlocal Strain Gradient Theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 161, pp. 105043, (2019).
- [25] Jalaei, M., and Civalek, Ö., "On Dynamic Instability of Magnetically Embedded Viscoelastic Porous FG Nanobeam", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 143, pp. 14-32, (2019).
- [26] Xu, C., Rong, D., Tong, Z., Zhou, Z., Hu, J., and Xu, X., "Coupled Effect of In-Plane Magnetic Field and Size Effect on Vibration Properties of the Completely Free Double-Layered Nanoplate System", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 108, pp. 215-225, (2019).
- [27] Avsec, J., and Oblak, M., "Thermal Vibrational Analysis for Simply Supported Beam and Clamped Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 308, No. 3, pp. 514-525, (2007).
- [28] Kiani, K., "Longitudinal, Transverse, and Torsional Vibrations and Stabilities of Axially Moving Single-Walled Carbon Nanotubes", *Current Applied Physics*, Vol. 13, No. 8, pp. 1651-1660, (2013).
- [29] Eltaher, M., Khater, M., and Emam, S. A., "A Review on Nonlocal Elastic Models for Bending, Buckling, Vibrations, and Wave Propagation of Nanoscale Beams", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, No. 5, pp. 4109-4128, (2016).
- [30] Reddy, J., "Nonlocal Theories for Bending, Buckling and Vibration of Beams", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2, pp. 288-307, (2007).

- [31] Arani, A., Maboudi, M., Arani, A. G., and Amir, S., "2D-Magnetic Field and Biaxial In-Plane Pre-Load Effects on the Vibration of Double Bonded Orthotropic Graphene Sheets", *J Solid Mech*, Vol. 5, No. 2, pp. 193-205, (2013).
- [32] Karličić, D., Cajić, M., Murmu, T., Kozić, P., and Adhikari, S., "Nonlocal Effects on the Longitudinal Vibration of a Complex Multi-Nanorod System Subjected to the Transverse Magnetic Field", *Meccanica*, Vol. 50, No. 6, pp. 1605-1621, (2015).
- [33] Bahaadini, R., and Hosseini, M., "Nonlocal Divergence and Flutter Instability Analysis of Embedded Fluid-Conveying Carbon Nanotube under Magnetic Field", *Microfluidics and Nanofluidics*, Vol. 20, No. 7, pp. 1-14, (2016).
- [34] Rao, S. S., "*Vibration of Continuous Systems*", John Wiley & Sons, New York, (2007).
- [35] Wang, Q., and Varadan, V., "Vibration of Carbon Nanotubes Studied using Nonlocal Continuum Mechanics", *Smart Materials and Structures*, Vol. 15, No. 2, pp. 659, (2006).
- [36] Ansari, R., Oskouie, M. F., Sadeghi, F., and Bazdid-Vahdati, M., "Free Vibration of Fractional Viscoelastic Timoshenko Nanobeams using the Nonlocal Elasticity Theory", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 74, pp. 318-327, (2015).
- [37] Ghadiri, M., Soltanpour, M., Yazdi, A., and Safi, M., "Studying the Influence of Surface Effects on Vibration Behavior of Size-Dependent Cracked FG Timoshenko Nanobeam Considering Nonlocal Elasticity and Elastic Foundation", *Applied Physics A*, Vol. 122, No. 5, pp. 1-21, (2016).
- [38] Wang, Q., "Wave Propagation in Carbon Nanotubes via Nonlocal Continuum Mechanics", *Journal of Applied Physics*, Vol. 98, No. 12, pp. 124301, (2005).
- [39] Ebrahimi, F., and Barati, M. R., "Flexural Wave Propagation Analysis of Embedded S-FGM Nanobeams under Longitudinal Magnetic Field Based on Nonlocal Strain Gradient Theory", *Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 42, No. 5, pp. 1-12, (2016).
- [40] Rao, S. S., "*Vibration of Continuous Systems*", John Wiley & Sons, New York, (2019).

## فهرست نمادهای انگلیسی

$e_0$ : ثابت ماده

$a$ : مشخصه طول نانوتیر

$e_0 a$ : پارامتر غیرموضعی

$C_{ijkl}$ : تانسور مدول الاستیک موضعی

$E$ : مدول الاستیسیته

$G$ : مدول برشی

$I$ : ممان اینرسی جرمی واحد طول

A: سطح مقطع

L: طول نانوتیر

$w(x, t)$ : حرکت در راستای محور  $z$

$u(x, t)$ : حرکت در راستای محور  $x$

$q$ : نیروی گسترده عرضی

$P$ : نیروی محوری

$M^{nl}$ : گشتاور خمشی غیرموضعی

$N^{nl}$ : نیروی برشی غیرموضعی ناشی از حرکت

$\mathbf{J}$ : بردار چگالی جریان الکتریکی

$\mathbf{h}$ : بردار توزیع میدان الکتریکی

$\mathbf{e}$ : بردار شدت میدان الکتریکی

$H_x$ : شدت میدان مغناطیسی

$P_\sigma$ : بار کمانشی

### نمادهای یونانی

$\sigma_{ij}$ : تانسور تنش غیرموضعی

$\Sigma$ : تانسور تنش کلاسیک

$\nabla^2$ : اپراتور لاپلاسین

$\sigma_x^{nl}$ : تنش عمودی عرضی غیرموضعی

$\tau_{xy}^{nl}$ : تنش برشی عرضی غیرموضعی

$\varepsilon_{zx}$ : کرنش برشی طولی

$\beta(x, t)$ : اعوجاج برشی

$\kappa_s$ : ضریب تصحیح برشی

$\Gamma$ : اپراتور ویسکوالاستیک

$\Xi$ : اپراتور ویسکوالاستیک

$\Upsilon$ : اپراتور ویسکوالاستیک

$\eta_M$ : تراوایی میدان مغناطیسی

$\nabla$ : اپراتور همیلتونی

$\eta_{ixd}$ : پارامتر رئولوژیکی متناظر با مدل ویسکوالاستیک

$\mu_b$ : پارامتر رئولوژیکی متناظر با مدل ویسکوالاستیک

$\mu_s$ : پارامتر رئولوژیکی متناظر با مدل ویسکوالاستیک

**Abstract**

In this paper flexural vibration and buckling analysis of the viscoelastic nanotube under electromagnetic force is investigated analytically. In order to consider more realistic assumptions, the linear solid viscoelastic model is used. The differential equations of motion are derived via the nonlocal Timoshenko beam theory. The Lorentz magnetic force is obtained from the Maxwell's relation. The analytical method is used to obtain nonlocal natural frequencies and buckling load of the system. The influence of magnetic field, aspect ratio and nanoscale effects on the natural frequencies and buckling load are studied. Then the results are validated and illustrated with appropriate figures and tables.