

## تحلیل خمش غیرخطی پانل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوتیوب‌های کربنی هدفمند

در این مقاله رفتار غیرخطی خمشی پانل استوانه‌ای تقویت‌شده با نانو تیوب های کربنی هدفمند تحت بار گسترده و تغییر درجه حرارت مورد مطالعه قرار گرفته‌است. معادلات حاکم با استفاده از روش انرژی ریتز بر اساس روابط کرنش- تغییر مکان غیرخطی فون کارمن استخراج شده است. در این پژوهش، به بررسی تاثیرات نحوه توزیع، میزان درصد حجمی، تغییرات درجه حرارت و همچنین شرایط مرزی مختلف نانو تیوب‌ها بر پارامترهایی از قبیل تغییر مکان عرضی و منته‌جه ممان خمشی مرکز پانل استوانه‌ای پرداخته شده است. در پایان می‌توان نتیجه گرفت به ازای یک بارگذاری معین، پانل استوانه‌ای تقویت شده با نانو تیوب‌های کربنی با توزیع FG-X دارای بیشترین منته‌جه ممان خمشی و کمترین منته‌جه ممان خمشی در توزیع FG-A حاصل می‌شود.

ستار جداری سلامی<sup>۱</sup>

استادیار

مصطفی سبزیکار بروجردی<sup>۲</sup>

استادیار

احسان بزاز<sup>۳</sup>

دانشجوی دکترا

واژه‌های راهنما: پانل استوانه‌ای، کامپوزیت تقویت شده با نانوتیوب های کربنی هدفمند، منته‌جه ممان خمشی

### ۱- مقدمه

نانو فناوری عبارت از آفرینش مواد، قطعات و سیستم‌های مفید با کنترل آنها در مقیاس طولی نانومتر و بهره‌برداری از خصوصیات و پدیده‌های جدید حاصله در آن مقیاس می‌باشد. پیشرفت سریع علوم در زمینه‌ی نانو تکنولوژی موجب شده است که امروزه محصولات این تکنولوژی در صنایع نظامی و فضایی، محیط زیست، صنایع خودروسازی و بسیاری از زمینه‌های دیگر نقش بسزایی ایفا نموده و حجم محصولات و کاربرد آنها به سرعت در حال افزایش باشد. دانشمندان به کمک این فناوری توانستند موادی با خصوصیات فوق العاده از نظر استحکام و دوام تولید نمایند که یکی از معروف ترین آنها مواد کامپوزیتی تقویت شده با فیبرهای کربن می‌باشد. با تقویت ایجاد شده در اثر افزودن فیبرهای کربنی، مقدار مدول الاستیسیته تا حد تراپاسکال افزایش پیدا می‌کند. از این نظر بررسی رفتار این مواد در شرایط مختلف از اهمیت فوق العاده‌ای برخوردار شده است. تحقیقات زیادی در مورد مدلسازی نانوتیوب‌های کربن<sup>۴</sup> تاکنون صورت گرفته است.

<sup>۱</sup> استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد دماوند، دماوند sattar.salami@aut.ac.ir

<sup>۲</sup> استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه، فیروزکوه mostafa.sabzikar@gmail.com

<sup>۳</sup> نویسنده مسئول، عضو هیئت علمی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی Ehs.Bazaz@iauctb.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۷/۱۱/۳۰، تاریخ پذیرش: ۹۸/۰۳/۰۵

یکی از معروف‌ترین مدل‌های ایجاد شده در حیطه‌ی محیط پیوسته، مدل خرپایی می‌باشد که توسط گورگی ادگارد و همکارانش [۱] برای توسعه‌ی روابط خواص ساختاری مواد نانو ساختار پیشنهاد شد. مدل ادگارد یک المان حجم از ساختار شیمیایی صفحه گرافیتی بود که با خرپای معادل و مدل‌های پیوسته معادل، جایگزین شده است. ژانگ و همکاران [۲-۳] برای مدل خود یک تئوری محیط پیوسته در مقیاس نانو پیشنهاد کردند. این تئوری ابتدا برای مطالعه‌ی مدول الاستیک نانوتیوب‌های کربنی تک دیواره استفاده شد و سپس برای مطالعه شکست هسته‌ای نانوتیوب‌های کربنی تک دیواره تحت کشش بکار گرفته شد. در همین راستا تسرپس و پاپانیکوس [۴] یک مدل المان محدود سه بعدی برای نانوتیوب‌های کربنی تک دیواره پیشنهاد کردند. فرضیه‌ی مورد استفاده بر این اساس بنا شده بود که نانوتیوب‌های کربنی تک دیواره تحت بارگذاری، مانند یک ساختار تشکیل شده از تعدادی تیر عمل می‌کنند. جدیدترین مدل مکانیک مولکولی تحلیلی، به منظور ارتباط خواص الاستیک یک نانوتیوب کربنی تک دیواره به ساختار اتمی‌اش با ثوابت میدان نیروی اندازه‌گیری شده، توسط چانگ و گائو [۵] پیشنهاد شده است. به عنوان اولین کار تحقیقی در زمینه‌ی سازه‌های مکانیکی تقویت شده با نانوتیوب‌های کربنی گرادینانی<sup>۱</sup>، شن [۶] به بررسی مسأله‌ی خمش غیرخطی در یک ورق مستطیلی در معرض بارگذاری عرضی یکنواخت پرداخت.

در این تحقیق شرایط مرزی در دورتادور آن به صورت ساده در نظر گرفته شده و معادلات ورق با استفاده از تکنیک آشوب<sup>۲</sup> حل شده‌اند. در ادامه شن [۸و۷] در دو تحقیق مجزا به بررسی مسأله‌ی کمانش و پس‌کمانش در پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف نانوتیوب کربنی به شکل یکنواخت و گرادینانی پرداخت. در این دو تحقیق برای بدست آوردن معادلات تعادل پوسته از تئوری مرتبه بالای ردی<sup>۳</sup> و از روابط کرنش-تغییر مکان فون-کارمن<sup>۴</sup> و تئوری پوسته‌ی دانل<sup>۵</sup> استفاده شده است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که رفتار کلیه پوسته‌ها با شرایط مرزی ساده از نوع نقطه‌ی دوگانگی می‌باشد. رفیعی و همکاران [۹] در ادامه همین کار به بررسی مسأله‌ی کمانش و پس‌کمانش یک تیر کامپوزیتی تقویت شده با الیاف نانوتیوب پرداختند. در این تحقیق در بالا و پایین تیر نیز، دو لایه‌ی پیزو الکتریک قرار دادند تا بتوان اثر اعمال ولتاژ خارجی را نیز در کمانش و خیز پس‌کمانش تیر مشاهده کرد. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که رفتار تیرها با انواع توزیع الیاف و شرایط مرزی گیردار از نوع نقطه‌ی دوگانگی بوده و مسیر پس‌کمانش حرارتی تیر برای کلیه حالات پایدار است. پور اصغر و کمریان [۱۰] به بررسی مسأله‌ی ناپایداری دینامیکی در یک تیر اویلر<sup>۶</sup> تقویت شده با نانوتیوب‌های کربن گرادینانی پرداختند. در این تحقیق اثر بستر الاستیک نیز بر روی مرزهای ناپایداری تیر مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج نشان می‌دهد که مرزهای ناپایداری به شدت به سختی بستر الاستیک و همچنین درصد حجمی الیاف وابسته است. لی و همکاران [۱۱] و ژانگ و همکاران [۱۲-۱۴] در تحقیقات متعددی به بررسی مسأله‌ی ارتعاشات آزاد در سازه‌های کامپوزیتی تقویت شده با الیاف نانوتیوب کربنی پرداختند.

<sup>1</sup> Functionally Graded

<sup>2</sup> Perturbation Technique

<sup>3</sup> Reddy

<sup>4</sup> Von karman

<sup>5</sup> Donnell Shell Theory

<sup>6</sup> Euler Beam

در این تحقیقات مساله‌ی ارتعاشات آزاد برای ورق مستطیلی، مثلثی، متوازی الاضلاع و پانل استوانه‌ای مورد تحلیل قرار گرفته است. روش حل بکار گرفته شده در اکثر این تحقیقات بر مبنای روش ریتز<sup>۱</sup> بدون المان می‌باشد که برای شرایط مرزی متنوع مناسب است. نتایج عددی حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که در حالتی که تراکم الیاف نانوتیوب در بالا و پایین سازه بیشتر از قسمت میانی باشد، فرکانس طبیعی بیشتر از سایر حالات می‌باشد. سلامی [۱۵] به بررسی رفتار خمشی یک تیر ساندویچی با هسته‌ی فومی نرم و انعطاف پذیر و صفحات رویه کامپوزیت تقویت شده با نانوتیوب های کربنی (CNTRC)<sup>۲</sup> پرداخت. برای بررسی این کار از تئوری مرتبه بالای تعمیم یافته‌ی پانل‌های ساندویچی (EHSAPT)<sup>۳</sup> استفاده شده است. معادله‌ی میدان بوسیله‌ی حل ریتز با خصوصیت تطابق با هر نوع شرایط مرزی لازم استخراج شده است. در این کار تاثیر انواع شرایط مرزی و نحوه‌ی توزیع نانوتیوب بر پاسخ خمشی ساندویچ پانل‌ها به تفصیل بررسی شده است. در ادامه سلامی [۱۶] به بررسی پاسخ دینامیکی گذرا در تیرهای ساندویچی پرداخته است. در این کار با در نظر گرفتن شرایط مختلف از نظر الیاف کربنی و شرایط مرزی، نتایج حل حالت گذرا بدست آمده است. همچنین در کار دیگری از سلامی [۱۷] به بررسی پاسخ ضربه‌ی سرعت پایین یک تیر ساندویچی با رویه‌هایی از جنس نانوتیوب کربنی پرداخته شده است. در این تحقیق ابتدا معادلات حاکم با توجه به شرایط مسئله به وسیله‌ی روش ریتز بر پایه‌ی انرژی کل سیستم استخراج شده و سپس نیروی تماسی بین ضربه زننده و رویه‌ی بالا بر اساس قانون هرتز<sup>۴</sup> بدست آمده است. در پایان حل با استفاده از روش متداول رانگ-کوتا<sup>۵</sup> در دامنه‌ی زمان انجام شده و در خصوص تاثیر پارامترهای مختلف مانند توزیع نانو تیوب‌ها و خواص هندسی آنها و همچنین پارامترهای دینامیکی مانند سرعت و جرم ضربه زننده به تفصیل صحبت شده است.

کیانی [۱۸] در کار خود موضوع پس‌کمانش حرارتی ورق ساندویچی با هسته سخت و دو ورق نانوتیوب کربنی در دو طرف را مورد بررسی قرار داد. او در این تحلیل خواص نانوتیوب‌ها را با تغییرات گرادیانی و همچنین خواص مواد سازنده‌ی ورق را وابسته به دما در نظر گرفته است. معادلات استخراج شده در این تحلیل ابر اساس معادلات تئوری تغییر شکل مرتبه اول<sup>۶</sup> و معادلات غیرخطی فون-کارمن بوده است و برای حل معادلات از روش ریتز استفاده شده است. فو و همکاران [۱۹] رفتار مکانیکی یک ورق ساخته شده از نانوتیوب‌های کربنی قرار گرفته شده بر روی بستر الاستیک را در یک محیط حرارتی مورد بررسی قرار دادند. در این تحلیل رفتار استاتیکی و ارتعاش آزاد ورق با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی  $n$  مورد بررسی قرار گرفته است. در نتایج ارائه شده در این کار اثر کسر حجمی نانوتیوب کربن، نسبت‌های هندسی و اثرات دمایی نیز گزارش شده است. در این پژوهش به تحلیل خمش غیرخطی پانل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانوتیوب‌های کربنی گرادیانی که تاکنون در هیچ تحقیقی ارائه نشده است بر اساس روش ریتز پرداخته می‌شود. در ابتدا به کمک روابط انرژی، معادلات حاکم استخراج شده و در ادامه به کمک روش عددی ریتز نتایج لازم استخراج شده است.

<sup>1</sup> Ritz Method

<sup>2</sup> Carbon Nanotube Reinforced Composite

<sup>3</sup> Extended High order Sandwich Panel Theory

<sup>4</sup> Hertz Theory

<sup>5</sup> Runge-Kutta

<sup>6</sup> First Order Shear Deformation Theory

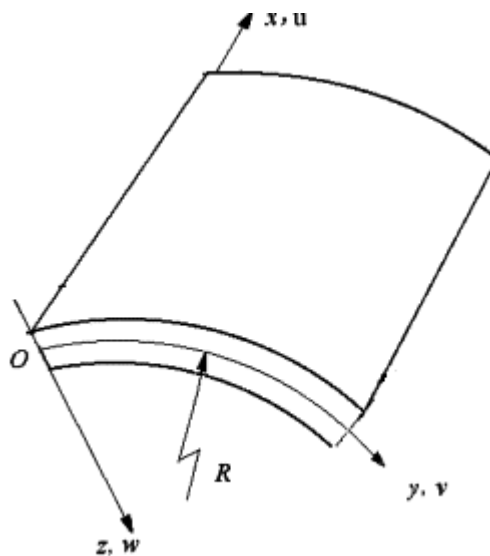
در ادامه، به بررسی تاثیر نحوه توزیع نانوتیوب‌ها، میزان درصد حجمی، تغییرات درجه حرارت آنها و همچنین شرایط مرزی مختلف در پارامترهایی از قبیل تغییر مکان عرضی و منته‌جه ممان خمشی مرکز پانل استوانه‌ای پرداخته شده است.

## ۲- روابط حاکم

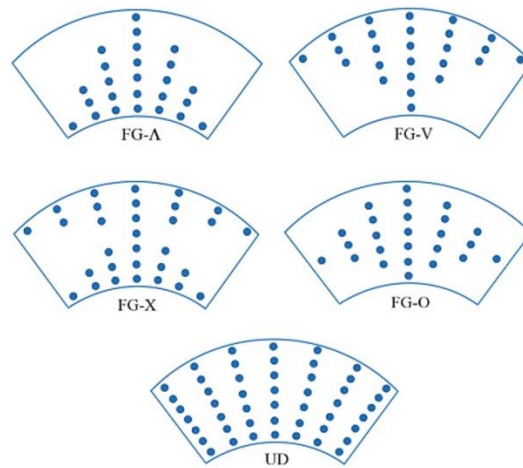
برای بررسی روابط حاکم بر پوسته‌ی استوانه‌ای، پارامترهای هندسی مطابق شکل (۱) در نظر گرفته شده است. در این شکل پوسته‌ی استوانه‌ای با شعاع سطح میانی  $R$  و ضخامت جداره‌ی  $h$  نمایش داده شده است. مختصات استوانه‌ای  $(x, \theta, z)$  به عنوان مختصات مرجع روی صفحه‌ی میانی پوسته‌ی استوانه‌ای نصب می‌شود.  $z$  در راستای شعاعی و به سمت خارج،  $\theta$  در راستای محیطی و  $x$  در راستای طولی می‌باشد. روابط کرنش- تغییر مکان برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای با توجه به رابطه‌ی غیر خطی فون کارمن به صورت زیر می‌باشد [۲۰]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 - zw_{,xx} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{v_{,\theta} + w}{R} + \frac{(v - w_{,\theta})^2}{2R^2} + z \frac{(v_{,\theta} - w_{,\theta\theta})}{R^2} \\ \gamma_{x\theta} &= v_{,x} + \frac{u_{,\theta}}{R} + \frac{w_{,x}w_{,\theta}}{R} - \frac{vw_{,\theta}}{R} + z \frac{(v_{,x} - 2w_{,x\theta})}{R} \end{aligned} \quad (1)$$

که در این رابطه  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب بیانگر تغییر مکان در راستای طولی، محیطی و شعاعی می‌باشند. برای به دست آوردن معادلات تنش بر حسب کرنش، نحوه‌ی توزیع نانوتیوب‌های کربنی به عنوان یکی از پارامترهای مؤثر باید تعیین گردد. به طور کلی پنج نوع توزیع برای نحوه‌ی توزیع نانوتیوب‌های کربنی در راستای ضخامت ماتریس، در نظر گرفته می‌شود که این پنج روش توزیع در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل ۱- دستگاه مختصات و مؤلفه‌های جابجایی پانل استوانه‌ای



شکل ۲- انواع توزیع نانوتیوب‌های کربنی در راستای ضخامت ماتریس استوانه‌ای شکل

برای یک پوسته‌ی کامپوزیتی تقویت شده با نانوتیوب کربن و ضخامت  $h$  که مبدا مختصات در صفحه میانی ضخامت آن قرار گرفته است روابط مربوط به کسر حجمی به عنوان تابعی از ضخامت برای پنج روش توزیع نانوتیوب کربنی، به صورت زیر می‌باشند [۱۸]:

$$V_{CN}(z) = \begin{cases} V_{CN}^* & \text{(UD CNTRC)} \\ 2V_{CN}^* \left(1 - 2\frac{|z|}{h}\right) & \text{(FG - O CNTRC)} \\ 4V_{CN}^* \frac{|z|}{h} & \text{(FG - X CNTRC)} \\ V_{CN}^* \left(1 + 2\frac{z}{h}\right) & \text{(FG - V CNTRC)} \\ V_{CN}^* \left(1 - 2\frac{z}{h}\right) & \text{(FG - \Lambda CNTRC)} \end{cases} \quad (2)$$

که در آن  $V_{CN}$  توزیع کسر حجمی می‌باشد. با توجه به این روابط مشخص است که مقدار کسر حجمی کل برای نانوتیوب‌های کربن در تمام حالت‌های توزیع یکنواخت و گرادینانی برابر با مقدار  $V_{CN}^*$  می‌باشد که این مقدار از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۶]:

$$V_{CN}^* = \frac{w_{CN}}{w_{CN} + (\rho^{CN}/\rho^m) - (\rho^{CN}/\rho^m) w_{CN}} \quad (3)$$

که  $w_{CN}$  بیانگر مقدار کسر جرمی نانوتیوب‌های کربن و  $\rho^{CN}$  و  $\rho^m$  به ترتیب بیانگر چگالی‌های ماتریس و نانوتیوب‌های کربن می‌باشند. برای نوع FG - V، سطح بیرونی جداره ( $z = +h/2$ ) غنی و سطح داخلی جداره ( $z = -h/2$ ) خالی از الیاف است. برای نوع FG -  $\Lambda$ ، عکس حالت قبل، سطح داخلی جداره غنی و سطح خارجی آن خالی از الیاف می‌باشد. در حالت FG - X، یک توزیع متقارن الیاف نسبت به صفحه میانی وجود دارد، به طوری‌که هر دو سطح داخلی و خارجی جداره غنی هستند. حالت FG - O، نیز یک توزیع متقارن نسبت به صفحه میانی ایجاد می‌شود، در حالی که هر دو سطح داخلی و خارجی خالی از الیاف هستند.

همان طور که در بالا اشاره شد از روابط فوق مشخص است نانوتیوب‌های کربن در تمامی حالت‌های توزیع، دارای کسر حجمی و در نتیجه کسر جرمی یکسان می‌باشند که مقدار آن با مقدار حالت توزیع یکنواخت برابر است. حال فرض کنید که یک صفحه‌ی کامپوزیتی تقویت شده با الیاف نانوتیوب کربن به عنوان یک مخلوط دو فاز از نانوتیوب کربن توزیع شده در راستای ضخامت و یک ماتریس پلیمری (غیر فلزی) باشد. خواص موثر چنین کامپوزیتی با استفاده از روابط زیر به دست می‌آید [۶]:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \eta_1 V_{CN} E_{11}^{CN} + V_m E^m \\ \frac{\eta_2}{E_{22}} &= \frac{V_{CN}}{E_{22}^{CN}} + \frac{V_m}{E^m} \\ \frac{\eta_3}{G_{12}} &= \frac{V_{CN}}{G_{12}^{CN}} + \frac{V_m}{G^m} \end{aligned} \quad (۴)$$

در معادلات بالا  $E_{11}^{CN}$ ،  $E_{22}^{CN}$  و  $G_{12}^{CN}$  به ترتیب مدول یانگ در جهت طولی، مدول یانگ در جهت عرضی و مدول برشی نانوتیوب کربنی، و  $E^m$  و  $G^m$  نیز خواص متناظر ماتریس همسانگرد می‌باشند. از آنجایی که انتقال بار بین نانوتیوب و ماتریس کامل و ایده‌آل نیست،  $\eta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) به عنوان پارامترهای بهره‌وری نانوتیوب کربنی وارد معادلات شده‌اند تا اثرات دیده نشده (مثل اثر سطح، تغییرات کرنش و ...) را وارد معادلات کنند. این پارامترها را می‌توان از مقایسه خواص به دست آمده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی با نتایج حاصل از قانون مخلوطها تعیین نمود.  $V_m$  و  $V_{CN}$  نیز به ترتیب بیانگر کسر حجمی نانوتیوب کربنی و ماتریس می‌باشند. مقدار ضریب پواسون از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$v_{12} = V_{CN}^* v_{12}^{CN} + V_m v^m \quad (۵)$$

که در این رابطه  $v_{12}^{CN}$  و  $v^m$  به ترتیب ضرایب پواسون نانوتیوب‌های کربنی و ماتریس هستند. با توجه به رابطه فوق روابط تنش-کرنش برای پانل استوانه‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= Q_{11} \varepsilon_x + Q_{12} \varepsilon_\theta \\ \sigma_\theta &= Q_{12} \varepsilon_x + Q_{22} \varepsilon_\theta \\ \tau_{x\theta} &= Q_{66} \gamma_{x\theta} \end{aligned} \quad (۶)$$

که در این روابط  $Q$  بیانگر مؤلفه‌های ماتریس سختی بوده و از روابط زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - v_{12} v_{21}} & Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - v_{12} v_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{v_{21} E_{11}}{1 - v_{12} v_{21}} & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (۷)$$

### ۳- روش حل

همانگونه که اشاره شد برای حل مساله از روش عددی ریتز استفاده شده است. برای شروع کار ابتدا باید انرژی پتانسیل ذخیره شده در پوسته را محاسبه کرد. انرژی پتانسیل کل که در پوسته ذخیره شده است شامل انرژی کرنشی ( $U$ ) و انرژی پتانسیل ناشی از نیروی خارجی ( $W$ ) می‌باشد:

$$\Pi = U + W \quad (۸)$$

مقدار انرژی کرنشی ذخیره شده در پوسته ی استوانه‌ای از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$U = \int \left( \frac{1}{2} \varepsilon_x \sigma_x + \frac{1}{2} \varepsilon_\theta \sigma_\theta + \frac{1}{2} \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} \right) dV \quad (۹)$$

حال اگر از رابطه‌ی (۶) مقادیر تنش را بر حسب کرنش در رابطه‌ی فوق جایگذاری کنیم رابطه‌ی انرژی کرنشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U = \int \left( \frac{1}{2} Q_{11} \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} Q_{22} \varepsilon_\theta^2 + Q_{12} \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \frac{1}{2} Q_{66} \gamma_{x\theta}^2 \right) dV \quad (۱۰)$$

مقدار انرژی یا کار ناشی از بارگذاری خارجی که به صورت گسترده در نظر گرفته شده است عبارت است از:

$$W = \int -P w dA \quad (۱۱)$$

در رابطه‌ی فوق  $W$  بیانگر جابجایی پوسته در راستای ضخامت می‌باشد. در نتیجه انرژی پتانسیل کل پوسته برابر است با:

$$\Pi = \int \left( \frac{1}{2} Q_{11} \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} Q_{22} \varepsilon_\theta^2 + Q_{12} \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \frac{1}{2} Q_{66} \gamma_{x\theta}^2 \right) dV - \int P w dA \quad (۱۲)$$

اگر در رابطه‌ی فوق به جای کرنش‌ها روابط (۱) را جایگزین کنیم رابطه‌ی انرژی پتانسیل کل برای پوسته‌ی استوانه‌ای بر حسب مولفه‌های تغییر مکان به دست می‌آید. برای پوسته‌ی استوانه‌ای این رابطه عبارت است از:

$$\begin{aligned} \Pi = & \int \left[ \frac{1}{2} Q_{11} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 - z w_{,xx} \right)^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} Q_{22} \left( \frac{v_{,\theta} + w}{R} + \frac{(v - w_{,\theta})^2}{2R^2} + z \frac{v_{,\theta} - w_{,\theta\theta}}{R^2} \right)^2 \\ & + Q_{12} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 - z w_{,xx} \right) \left( \frac{v_{,\theta} + w}{R} + \frac{(v - w_{,\theta})^2}{2R^2} + z \frac{v_{,\theta} - w_{,\theta\theta}}{R^2} \right) \\ & \left. + \frac{1}{2} Q_{66} \left( v_{,x} + \frac{u_{,\theta}}{R} + \frac{w_{,x} w_{,\theta}}{R} - \frac{v w_{,\theta}}{R} + z \frac{v_{,x} - 2w_{,x\theta}}{R^2} \right)^2 \right] dV - \int P w dA \end{aligned} \quad (۱۳)$$

برای حل مساله ابتدا روابطی تقریبی را برای جابجایی‌ها در نظر می‌گیریم. این روابط اختیاری می‌باشند و فقط باید شرایط ضروری مرزی را ارضا کنند. برای این منظور از سری‌های زیر برای تخمین مقدار جابجایی استفاده شده است:

$$\begin{aligned} u &= R^u(x, \theta) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_\theta} U_{ij} P_i(x) P_j(\theta) \\ v &= R^v(x, \theta) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_\theta} V_{ij} P_i(x) P_j(\theta) \\ w &= R^w(x, \theta) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_\theta} W_{ij} P_i(x) P_j(\theta) \end{aligned} \quad (۱۴)$$

که در این روابط  $P_i$  و  $P_j$  به ترتیب بیانگر جملات  $i$  ام و  $j$  ام چندجمله‌ای چبی شف نوع اول<sup>۱</sup> می‌باشند. رابطه‌ی این چندجمله‌ای‌ها عبارت است از:

$$\begin{aligned} P_i(x) &= \cos\left((i-1) \arccos\left(\frac{2x}{a}\right)\right) \\ P_j(\theta) &= \cos\left((j-1) \arccos\left(\frac{2\theta}{\beta}\right)\right) \end{aligned} \quad (15)$$

که در مساله‌ی مورد بررسی محدوده‌ی تغییرات  $x$  و  $\theta$  به صورت  $0 \leq x \leq a$  و  $0 \leq \theta \leq \beta$  می‌باشد. همچنین در رابطه‌ی (۱۵) مقدار  $N$  بیانگر جملات در نظر گرفته شده در هر یک از جهات طولی و محیطی می‌باشد و توابع  $R$  بیانگر توابع مرزی هستند که برای برقرار شدن شرایط مرزی ضروری و بر حسب نوع شرایط مرزی مورد استفاده قرار می‌گیرند. با در نظر گرفتن مبدا مختصات در مرکز پانل استوانه‌ای، توابع  $R$  را می‌توان به صورت کلی زیر در نظر گرفت [۲۱]:

$$R(x, \theta) = \left(1 + \frac{2x}{a}\right)^p \left(1 - \frac{2x}{a}\right)^q \left(1 + \frac{2\theta}{\beta}\right)^r \left(1 - \frac{2\theta}{\beta}\right)^s \quad (16)$$

که در این رابطه  $p, q, r, s$  و  $\Gamma$  بر حسب شرایط ضروری مرزی برابر با صفر یا یک در نظر گرفته می‌شوند. برای به دست آوردن این مجهولات با استفاده از معادله‌ی لاگرانژ می‌توان معادله‌ای به صورت زیر نوشت [۲۲]:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s_{ij}^k} = 0, \quad k = u, v, w, \quad i = 1: N_x, \quad j = 1: N_\theta \quad (17)$$

در رابطه‌ی فوق  $S_{ij}^w = U_{ij}$ ،  $S_{ij}^v = V_{ij}$  و  $S_{ij}^u = W_{ij}$  می‌باشند. اگر از ترمهای غیرخطی در رابطه‌ی فوق صرف نظر گردد رابطه‌ی فوق را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$[K]\{S\} = \{F\} \quad (18)$$

در این رابطه ماتریس مربعی  $[K]$  ماتریس ضرایب، ماتریس ستونی  $\{F\}$  ماتریس نیرو و ماتریس ستونی  $\{S\}$  بیانگر ماتریس مجهولات یا همان ضرایب ثابت می‌باشد. رابطه‌ی (۱۸) در کل شامل  $3 \times N_\theta \times N_x$  معادله می‌باشد که از حل همزمان این معادلات، مجهولات مساله تعیین می‌گردد. نتیجه‌ی حاصل بیانگر پاسخ یا تحلیل خطی مسأله می‌باشد که به ازای مقادیر کم بارگذاری و تغییر مکان قابل قبول است. در صورت زیاد بودن مقدار بار و تغییر مکان باید مسأله را به صورت غیرخطی حل نمود. در این پژوهش مسأله به صورت غیرخطی و با استفاده از روش نیوتن-رافسون<sup>۲</sup> حل شده است.

#### ۴- بحث و نتایج

پس از بیان روابط حاکم بر پانل استوانه‌ای تقویت شده با نانو تیوب های کربنی و روش حل آن، به بررسی نتایج عددی حاصل از حل مسأله پرداخته می‌شود. نتایج حاصل مربوط به حل غیرخطی روابط بوده که به کمک روش نیوتن رافسون ارائه شده است.

<sup>1</sup> Chebyshev Polynomial of The Firt Kind

<sup>2</sup> Newton-Raphson Method



در نتایج ارائه شده تاثیر توزیع نانوتیوب های کربنی در راستای ضخامت پانل، درصد حجمی، تغییر درجه حرارت و شرایط مرزی بر تغییر مکان عرضی و منتهجه ممان خمشی مرکز پانل استوانه‌ای تحت بارگذاری گسترده بررسی شده است. لازم به ذکر است که شرایط مرزی پانل استوانه‌ای به صورت تکیه‌گاه ساده‌ی ثابت<sup>۱</sup> و متحرک<sup>۲</sup> در نظر گرفته شده است.

#### ۴-۱- مقایسه و صحت سنجی

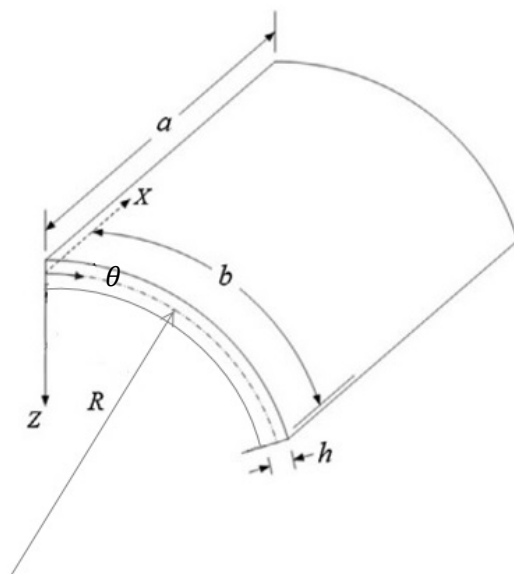
در شکل (۳) مشخصات هندسی پانل استوانه‌ای مورد استفاده نشان داده شده است. ابعاد پوسته در راستای طولی و محیطی و ضخامت به ترتیب برابر با  $a$ ،  $b$  و  $h$  و شعاع پانل استوانه‌ای برابر با  $R$  می‌باشد.

پارامترهای بهره‌وری نانوتیوب کربنی وابسته به مقدار  $V_{CN}^*$  می‌باشد. به عنوان مثال به ازای مقدار  $V_{CN}^* = 0.12$  پارامترهای بهره‌وری  $\eta_1 = 0.137$ ،  $\eta_2 = 1/0.22$  و  $\eta_3 = 0.715$ ، به ازای  $V_{CN}^* = 0.17$ ،  $\eta_1 = 0.142$ ،  $\eta_2 = 1/626$  و  $\eta_3 = 1/138$  و برای  $V_{CN}^* = 0.28$ ، برابر با  $\eta_1 = 0.141$ ،  $\eta_2 = 1/585$  و  $\eta_3 = 1/109$  می‌باشند [۲۳].

در طول محاسبات، خواص مواد به صورت متغیر با درجه‌ی حرارت در نظر گرفته شده است. برای ماتریس که در این پژوهش PMMA<sup>۳</sup> در نظر گرفته شده است خواص به صورت زیر می‌باشد [۲۳]:

$$E^m = (3.52 - .0034T) \text{GPa} \quad (19)$$

$$\nu^m = 0.34$$



شکل ۳- ابعاد هندسی پانل استوانه‌ای

<sup>1</sup> Immovable simply supported

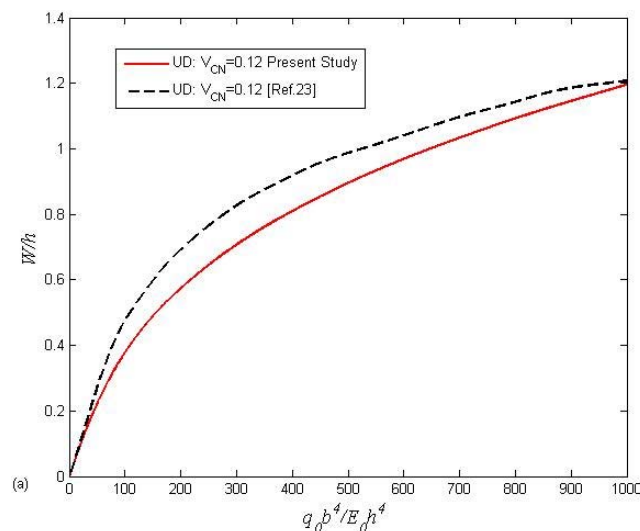
<sup>2</sup> movable simply supported

<sup>3</sup> Poly methyl methacrylate

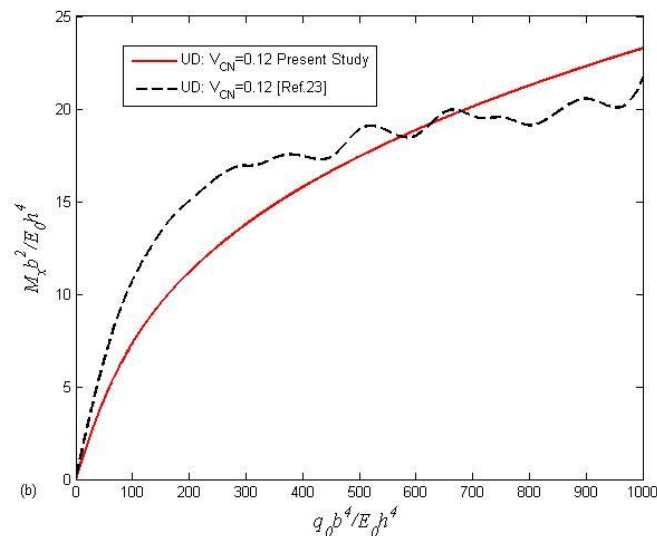
که در رابطه‌ی فوق  $T$  بیانگر دما بر حسب درجه‌ی کلون می‌باشد. همچنین برای نانوتیوب‌های کربنی خواص مکانیکی برای دمای ۳۰۰ تا ۷۰۰ درجه‌ی کلون به صورت روابط زیر بیان می‌گردد [۲۴]:

$$\begin{aligned} E_{11}^{CN} &= (6.3998 - 4.338417 \times 10^{-3}T + 7.43 \times 10^{-6}T^2 - 4.45833 \times 10^{-9}T^3) \text{TPa} \\ E_{22}^{CN} &= (8.02155 - 5.420375 \times 10^{-3}T + 9.275 \times 10^{-6}T^2 - 5.5625 \\ &\quad \times 10^{-9}T^3) \text{TPa} \\ \nu_{12}^{CN} &= 0.175 \end{aligned} \quad (20)$$

برای صحت‌سنجی، در شکل (۴) و (۵) نتایج به دست آمده در این پژوهش، با نتایج حاصل از مرجع [۲۳] مقایسه شده است. در مرجع [۲۳] برای استخراج نتایج از روش آشوب استفاده شده است. در شکل (۴) تغییر مکان عرضی بی‌بعد شده‌ی مرکز پانل استوانه‌ای ( $W/h$ ) در برابر بار گسترده خارجی بی‌بعد شده ( $q_0 b^4 / E_0 h^4$ ) رسم شده و در شکل (۵) منته‌جه ممان خمشی بی‌بعد شده مرکز پانل ( $M_x b^4 / E_0 h^4$ ) در برابر بار گسترده خارجی بی‌بعد شده رسم شده است. در این شکل‌ها  $q_0$  و  $E_0$  به ترتیب بیانگر بار خارجی گسترده و مدول الاستیسیته‌ی ماتریس در دمای  $T = 300 \text{ K}$  می‌باشند. در استخراج نتایج مقدار ضخامت پوسته برابر با  $0.002 \text{ m}$ ، مقدار  $a = b = 0.04 \text{ m}$ ،  $R = 0.04 \text{ m}$ ، و توزیع نانو تیوب کربنی به صورت یکنواخت با کسر حجمی  $V_{CN}^* = 0.12$  در نظر گرفته شده است. همچنین شرایط تکیه‌گاهی پانل در این حالت به صورت تکیه‌گاه ساده‌ی متحرک می‌باشد. پانل مورد بررسی در این پژوهش از تئوری مرتبه اول برشی تبعیت می‌کند در حالیکه در کار انجام شده در مرجع [۲۳]، پانل بر اساس تئوری مرتبه بالای برشی ردی در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه درجات آزادی پانل در تئوری مرتبه اول برشی کمتر از تئوری مرتبه بالای برشی می‌باشد ماتریس سفتی در تئوری مرتبه اول برشی بزرگتر بوده و در نتیجه می‌توان میزان تغییر مکان عرضی کمتر در پژوهش انجام شده نسبت به نتایج مرجع [۲۳] را علاوه بر تفاوت روش حل به این موضوع نیز مرتبط دانست. با این وجود نتایج حاصل از دو روش مختلف همخوانی خوبی با یکدیگر دارند.



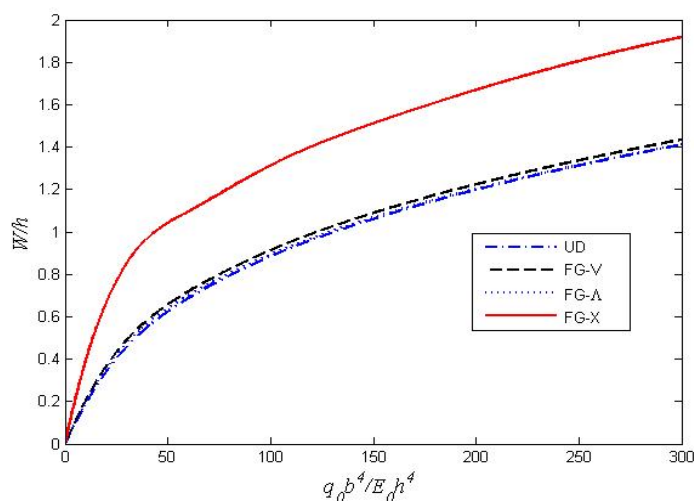
شکل ۴- مقایسه نتایج تغییر مکان عرضی بی‌بعد شده مرکز پانل استوانه‌ای نسبت به بار گسترده خارجی بی‌بعد شده



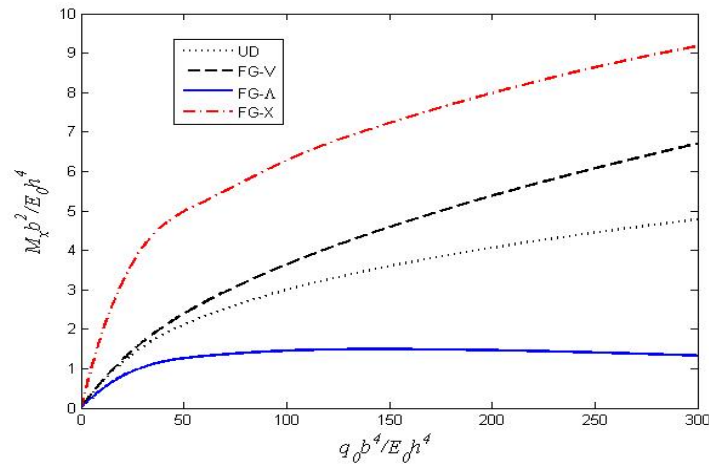
شکل ۵- مقایسه نتایج منتهی ممان خمشی بی بعد شده مرکز پانل استوانه‌ای نسبت به بار گسترده خارجی بی بعد شده

#### ۲-۴- مطالعه پارامتری

در شکل‌های (۶) و (۷) به بررسی اثر نحوه توزیع نانوتیوب‌های کربنی بر تغییرمکان عرضی و منتهی ممان خمشی مرکز پانل استوانه‌ای پرداخته شده است. شرایط تکیه‌گاهی پانل به صورت تکیه‌گاه ساده‌ی متحرک،  $R=0.4\text{m}$ ,  $a = b=0.2\text{m}$ ,  $h=0.02\text{m}$  و دمای محیط ۳۰۰ درجه‌ی کلون می‌باشد. همچنین کسر حجمی توزیع نانو تیوب کربنی ( $V_{CN}^*$ ) برابر با ۰/۱۲ در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل (۶) مشاهده می‌گردد که پانل با توزیع FG-X دارای بیشترین تغییر مکان عرضی و پانل با توزیع یکنواخت دارای کمترین تغییر مکان عرضی می‌باشد. شکل (۷) نیز بیانگر این مطلب است که پانل با توزیع FG-X دارای بیشترین منتهی ممان خمشی بوده و توزیع FG-A دارای کمترین منتهی ممان خمشی می‌باشد. به ازای مقادیر بالای بارگذاری، منتهی ممان در توزیع FG-A به سمت عدد ثابتی میل می‌کند.

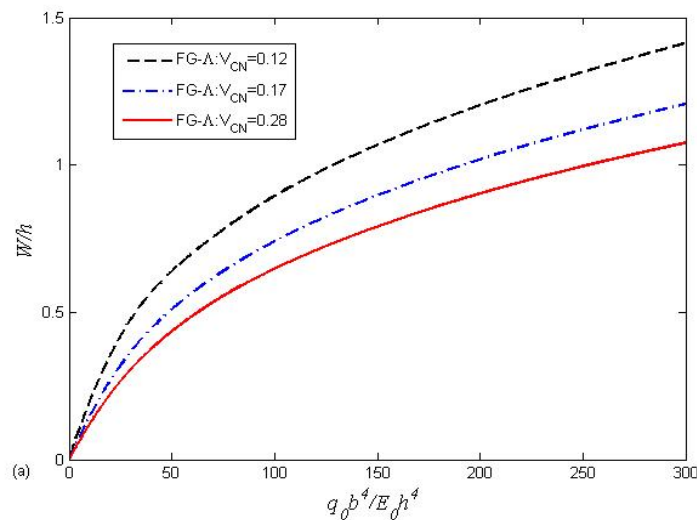


شکل ۶- تاثیر نحوه توزیع نانو تیوب‌های کربنی بر تغییرمکان عرضی مرکز پانل استوانه‌ای

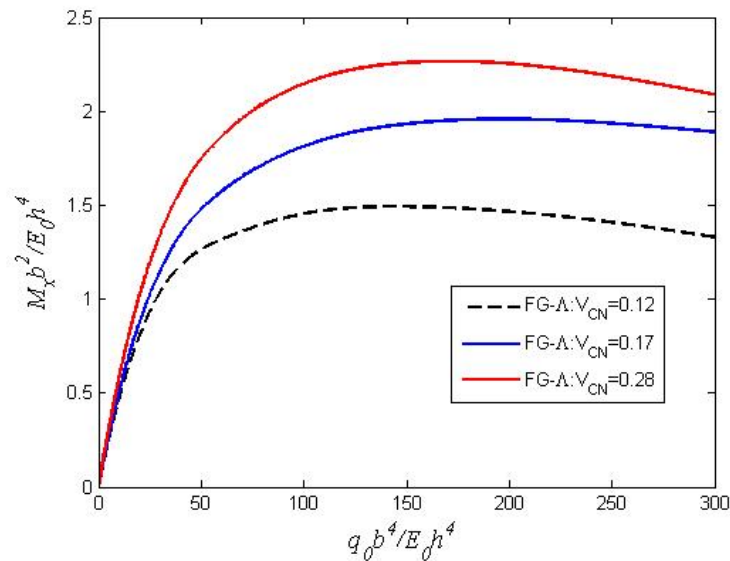


شکل ۷- تاثیر نحوه‌ی توزیع نانو تیوب های کربنی بر منته‌های ممان خمشی مرکز پانل استوانه‌ای

در شکل های (۸) و (۹) اثر کسر حجمی نانوتیوب کربنی بر رفتار پانل استوانه‌ای نشان داده شده است. نتایج بر اساس ابعاد ذکر شده در شکل‌های قبل و با تکیه‌گاه ساده‌ی متحرک و دمای محیط ۳۰۰ درجه‌ی کلوین رسم شده است. در شکل (۸) نتایج برای توزیع FG-Δ با سه کسر حجمی مختلف نشان می‌دهد که با افزایش مقدار کسر حجمی الیاف، تغییر مکان عرضی مرکز پانل استوانه‌ای کاهش پیدا می‌کند. در شکل (۹) نتایج حاصل برای منته‌های ممان بیانگر کاهش مقدار منته‌های ممان با کاهش کسر حجمی می‌باشد. در حقیقت با افزایش کسر حجمی نانو تیوب های کربنی توزیع شده در ماتریس، مقدار سفتی پانل استوانه‌ای افزایش پیدا کرده و در نتیجه میزان تغییر مکان عرضی کاهش و منته‌ی ممان خمشی افزایش پیدا می‌کند. همچنین مشاهده می‌گردد که نمودارهای منته‌های ممان به ازای مقادیر بالای بارگذاری روند صعودی خود را از دست می‌دهند. این پدیده را می‌توان بدین صورت تفسیر نمود که در مقادیر بالای بارگذاری، پانل تحت تغییر شکل بزرگ قرار می‌گیرد که با توجه به نرم شدگی پانل در اثر کرنش سختی در تغییر شکل های بزرگ، با افزایش تغییر مکان عرضی، منته‌ی ممان خمشی در بارگذاری های بالاتر روند کاهشی می‌یابد.

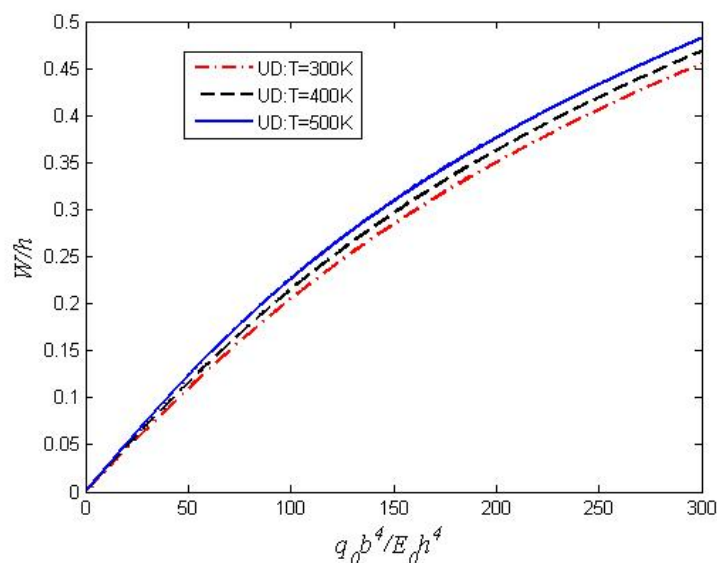


شکل ۸- تاثیر کسر حجمی نانو تیوب های کربنی بر تغییر مکان عرضی مرکز پانل استوانه‌ای

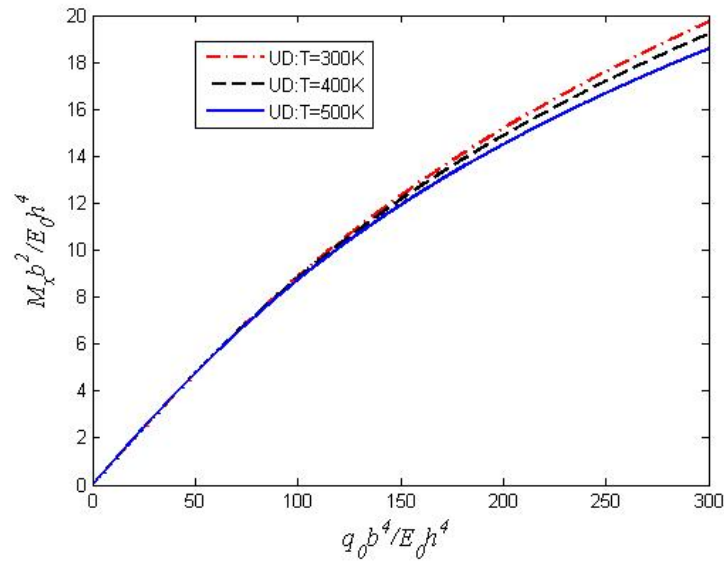


شکل ۹- تاثیر کسر حجمی نانو تیوب های کربنی بر منته‌های ممان خمشی مرکز پانل استوانه‌ای

اثر درجه‌ی حرارت بر رفتار پوسته در شکل‌های (۱۰) و (۱۱) نشان شده است. نتایج به ازای سه درجه حرارت مختلف ۳۰۰، ۴۰۰ و ۵۰۰ درجه‌ی کلون برای توزیع یکنواخت نانو تیوب های کربنی رسم شده است. با توجه به تغییر خواص مواد در دماهای مختلف، رفتار پانل استوانه‌ای کامپوزیتی نیز در دماهای مختلف دچار تغییر می‌گردد. با این وجود مشاهده می‌گردد که میزان تغییرات قابل توجه نمی‌باشد که این خاصیت مزیت بزرگی برای این گونه مواد به حساب می‌آید. از شکل‌های (۱۰) و (۱۱) نتیجه گرفته می‌شود که با افزایش درجه حرارت، میزان تغییر مکان عرضی پانل افزایش و مقدار منته‌های ممان خمشی مرکز آن کاهش پیدا می‌کند که این مطلب به معنی کاهش سفتی پانل به ازای افزایش درجه حرارت می‌باشد. در تمام نمودارها مشخص است که رفتار پانل استوانه‌ای به ازای مقادیر کم بارگذاری به صورت خطی می‌باشد.

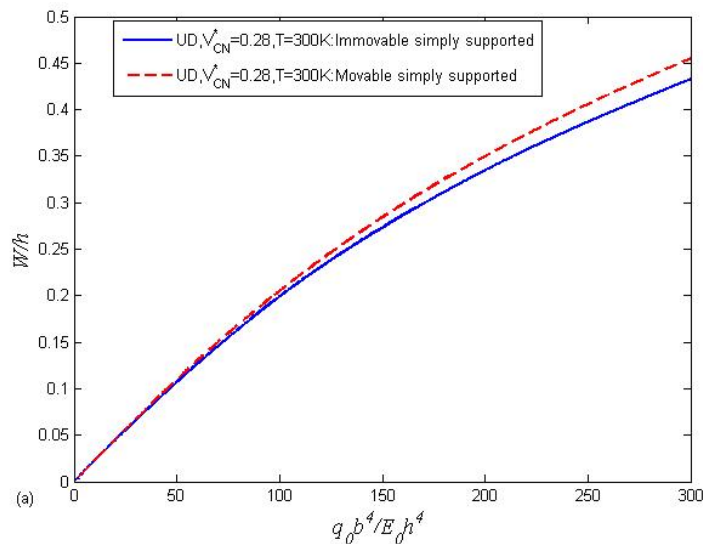


شکل ۱۰- تاثیر درجه حرارت نانو تیوب های کربنی بر تغییر مکان عرضی مرکز پانل استوانه‌ای

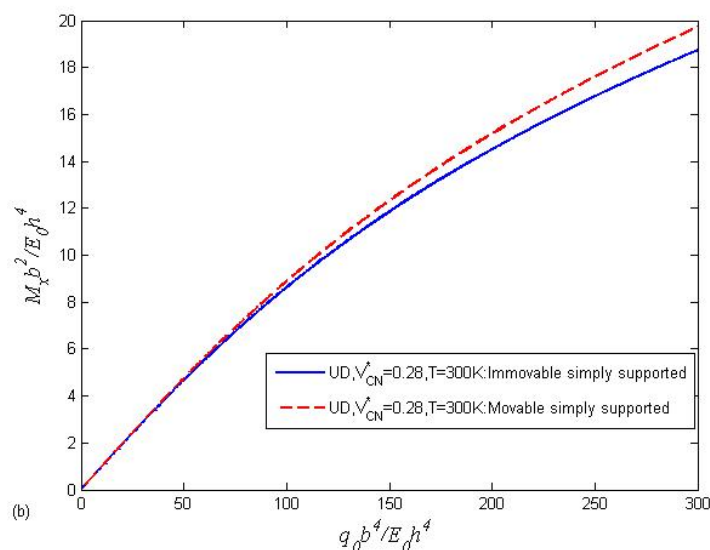


شکل ۱۱- تاثیر درجه حرارت نانو تیوب های کربنی بر منته‌های ممان خمشی مرکز پانل استوانه‌ای

در شکل‌های (۱۲) و (۱۳) به بررسی اثر تکیه‌گاه بر رفتار غیرخطی خمشی پانل استوانه‌ای تقویت شده با نانوتیوب های کربنی پرداخته شده است. نتایج برای پانل با دو تکیه‌گاه ساده‌ی ثابت و متحرک، توزیع یکنواخت در راستای ضخامت،  $h=0.02\text{m}$ ،  $a=b=0.2\text{m}$ ،  $R=0.4\text{m}$ ، دمای محیط  $300$  درجه‌ی کلون و کسر حجمی  $0.28$  ترسیم شده است. با توجه به نمودارهای رسم شده به خوبی مشخص است که برای پانل استوانه‌ای با تکیه‌گاه ساده‌ی متحرک، مقدار تغییر مکان عرضی و منته‌های ممان خمشی دارای مقادیر بزرگتری می‌باشند که با افزایش مقدار بارگذاری این اختلاف هم افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۱۲- تاثیر شرایط مرزی پانل استوانه‌ای تقویت شده با نانو تیوب های کربنی بر تغییر مکان عرضی مرکز آن



شکل ۱۳- تاثیر شرایط مرزی پانل استوانه‌ای تقویت شده با نانو تیوب های کربنی بر منته‌های ممان خمشی مرکز آن

## ۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بررسی رفتار غیرخطی پانل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانوتیوب های کربنی هدفمند پرداخته شد که نتایج این کار به صورت زیر خلاصه می‌شود:

- ۱- به ازای یک بارگذاری مشخص، پانل استوانه‌ای تقویت شده با نانوتیوب های کربنی با توزیع FG-X دارای بیشترین تغییر مکان عرضی و با توزیع UD دارای کمترین مقدار تغییر مکان عرضی در مرکز پانل می‌باشد.
- ۲- به ازای یک بارگذاری مشخص، پانل استوانه‌ای تقویت شده با الیاف نانوتیوب کربنی با توزیع FG-X دارای بیشترین منته‌ ممان و با توزیع FG-A دارای کمترین منته‌ ممان می‌باشد.
- ۳- با افزایش کسر حجمی نانو تیوب های کربنی در پانل استوانه‌ای، تغییر مکان عرضی مرکز پانل استوانه‌ای کاهش و منته‌ ممان خمشی آن افزایش می‌یابد.
- ۴- با تغییر دما میزان تغییرات تغییر مکان عرضی و منته‌های ممان خمشی پانل استوانه‌ای کم می‌باشد. با این وجود با افزایش دما، تغییر مکان عرضی مرکز پانل افزایش و منته‌ ممان خمشی آن کاهش پیدا می‌کند.
- ۵- مقدار تغییر مکان عرضی و منته‌های ممان خمشی مرکز پانل استوانه‌ای در حالت تکیه‌گاه ساده‌ی متحرک بیشتر از پانل با تکیه‌گاه ساده ثابت می‌باشد.

## سپاسگزاری

نویسندگان تشکر خالصانه خود را تقدیم می‌نمایند به معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی که کلیه اعتبارات مالی پژوهش حاضر را تامین نموده است. شایان گفتن است که مقاله حاضر استخراج شده از طرح تحقیقاتی با عنوان: "تحلیل خمش غیرخطی پانل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانوتیوب های کربنی گرادینانی" می‌باشد.

## مراجع

- [1] Odegard, G.M., Gates, T.S., Nicholson, L.M., and wise, K.E., "Equivalent-continuum Modeling of Nano-structured Materials", *Composites Science and Technology*, Vol. 62, pp. 1869-1880, (2002).
- [2] Zhang, P., Huang, Y., Gao, H., and Hwang, K.C., "Fracture Nucleation in Single-wall Carbon Nanotubes under Tension: Continuum Analysis Incorporating Interatomic Potentials", *J. Appl. Mech*, Vol. 69, pp. 454-458, (2002a).
- [3] Zhang, P., Huang, Y., Geubelle, P.H., Klein, P., and Hwang, K.C., "The Elastic Modulus of Single-wall Carbon Nanotubes: Continuum Analysis Incorporating Interatomic Potentials", *Int. J. Solids Struct*, Vol. 39, pp. 3893-3906, (2002b).
- [4] Tserpes, K., and Papanikos, P., "Finite Element Modeling of Single-walled Carbon Nanotubes", *Composites: Part B*, Vol. 36, pp. 468-477, (2005).
- [5] Changa, T., and Gao, H., "Size-dependent Elastic Properties of a Single-walled Carbon Nanotube via a Molecular Mechanics Model", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, pp. 1059-1074, (2003).
- [6] Shen, H., "Nonlinear Bending of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Plates in Thermal Environments", *Composite Structures*, Vol. 91, No. 1, pp. 9-19, (2009).
- [7] Shen, H., "Postbuckling of Nanotube-reinforced Composite Cylindrical Shells in Thermal Environments, Part I: Axially-loaded Shells", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 8, pp. 2096-2108, (2011a).
- [8] Shen, H., "Postbuckling of Nanotube-reinforced Composite Cylindrical Shells in Thermal Environments, Part II: Pressure-loaded Shells", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 10, pp. 2496-2503, (2011b).
- [9] Rafiee, M., Yang, J., and Kitipornchai, S., "Thermal Bifurcation Buckling of Piezoelectric Carbon Nanotube Reinforced Composite Beams", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 66, No. 7, pp. 1147-1160, (2013).
- [10] Pourasghar, A., and Kamarian, S., "Dynamic Stability Analysis of Functionally Graded Nanocomposite Non-uniform Column Reinforced by Carbon Nanotube", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 21, No. 13, pp. 2499-2508, (2015).
- [11] Lei, Z.X., Liew, K.M., and Yu, J.L., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Plates using the Element-free kp-Ritz Method in Thermal Environment", *Composite Structures*, Vol. 106, No. 1, pp. 128-138, (2013).
- [12] Zhang, L., Lei, Z.X., Liew, K.M., and Yu, J.L., "Static and Dynamic of Carbon Nanotube Reinforced Functionally Graded Cylindrical Panels", *Composite Structures*, Vol. 111, No. 1, pp. 205-212, (2014).



- [13] Zhang, L., Lei, Z.X., and Liew, K.M., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Triangular Plates using the FSDT and Element-Free IMLS-Ritz Method", *Composite Structures*, Vol. 120, No. 1, pp. 189-199, (2015a).
- [14] Zhang, L., Lei, Z.X., and Liew, K.M., "Vibration Characteristic of Moderately Thick Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Skew Plates", *Composite Structures*, Vol. 122, No. 1, pp. 172-183, (2015b).
- [15] Salami, S.J., "Extended High Order Sandwich Panel Theory for Bending Analysis of Sandwich Beams with Carbon Nanotube Reinforced Face Sheets", *Physica E*, Vol. 76, pp. 187-197, (2016a).
- [16] Salami, S.J., "Dynamic Extended High Order Sandwich Panel Theory for Transient Response of Sandwich Beams with Carbon Nanotube Reinforced Face Sheets", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 56, pp. 56-69, (2018).
- [17] Salami, S.J., "Low Velocity Impact Response of Sandwich Beams with Soft Cores and Carbon Nanotube Reinforced Face Sheets Based on Extended High Order Sandwich Panel Theory", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 66, pp. 165-176, (2017).
- [18] Kiani, Y., "Thermal Post-buckling of Temperature Dependent Sandwich Plates with FG-CNTRC Face Sheets", *J. Thermal Stresses*, Vol. 41, pp. 866-882, (2018).
- [19] Fu, T., Chen, Z., Yu, H., Wang, Z., and Liu, X., "Mechanical Behavior of Laminated Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Plates Resting on Elastic Foundations in Thermal Environments", *Journal of Composite Materials*, Vol. 53, Issue. 9, pp. 1159-1179, (2018).
- [20] Brush, D., and Almorh, B., "*Buckling of Bars, Plates and Shells*", McGraw Hill, New York, (1975).
- [21] Mirzaei, M., and Kiani, Y., "Free Vibration of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Cylindrical Panels", *Composite Structures*, Vol. 142, pp. 45-56., (2016).
- [22] Song, Y.S., and Youn, J.R., "Modeling of Effective Elastic Properties for Polymer Based Carbon Nanotube Composites", *Polymer*, Vol. 47, pp. 1741-1748, (2006).
- [23] Shen, H., and Xiang, Y., "Nonlinear Bending of Nanotube-reinforced Composite Cylindrical Panels Resting on Elastic Foundations in Thermal Environments", *Engineering Structures*, Vol. 80, pp. 163-172, (2014).
- [24] Mirzaei, M., and Kiani, Y., "Thermal Buckling of Temperature Dependent FG-CNT Reinforced Composite Conical Shells", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 47, pp. 42-53, (2015).

### فهرست نمادهای انگلیسی

a	: طول محوری پانل استوانه‌ای
b	: طول محیطی پانل استوانه‌ای
$E^m, E^{CN}$	: مدول الاستیسیته‌ی ماتریس و نانوتیوب کربن
FG- $\Lambda$	: پانل استوانه‌ای با توزیع نانوتیوب کربن به صورت $\Lambda$
FG-O	: پانل استوانه‌ای با توزیع نانوتیوب کربن به صورت O
FG-V	: پانل استوانه‌ای با توزیع نانوتیوب کربن به صورت V
FG-X	: پانل استوانه‌ای با توزیع نانوتیوب کربن به صورت X
$G^m, G^{CN}$	: مدول برشی ماتریس و نانوتیوب کربن
h	: ضخامت پانل استوانه‌ای
P	: بارگذاری خارجی
$P_i, P_j$	: جملات چند جمله‌ای چبی شف نوع اول
Q	: ماتریس سختی
R	: شعاع انحنای لایه‌ی میانی پانل استوانه‌ای
$R^u, R^v, R^w$	: توابع مرزی
UD	: پانل استوانه‌ای با توزیع نانوتیوب کربن به صورت یکنواخت
T	: درجه حرارت
U	: انرژی کرنشی
u, v, w	: تغییر مکان پانل استوانه‌ای در راستای $x, \theta, z$
$x, \theta, z$	: دستگاه مختصات پانل استوانه‌ای
$V_m, V_{CN}$	: کسر حجمی ماتریس و نانوتیوب کربن
W	: انرژی پتانسیل ناشی از نیروی خارجی
$W_{CN}$	: کسر جرمی نانوتیوب کربن

### نمادهای یونانی

$\beta$	: ماکزیمم مقدار $\theta$
$\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma_{x\theta}$	: مولفه‌های کرنش
$\sigma_x, \sigma_\theta, \tau_{x\theta}$	: مولفه‌های تنش
$\eta_1, \eta_2, \eta_3$	: پارامترهای بهره‌وری نانوتیوب کربن
$\rho^m, \rho^{CN}$	: چگالی ماتریس و نانوتیوب کربن
$v^m, v^{CN}$	: ضریب پواسون ماتریس و نانوتیوب کربن
$\Pi$	: انرژی پتانسیل کل

**Abstract**

In this paper, nonlinear bending behaviour of a cylindrical panel reinforced with gradient carbon nanotubes under uniform load and temperature variation has been investigated. The governing equations are extracted using Ritz energy method and nonlinear Von-Karman equations. In this study, the effect of carbon fiber distribution, volume fraction of carbon nanotubes, variation of temperature and boundary conditions on transverse displacement component and bending moment distribution of cylindrical panel are investigated.

Finally, it is concluded that for the identical loading, the maximum moment of bending is obtained by FG-X distribution pattern while the least by FG- $\Lambda$  distribution pattern of the fibers.