

## تحلیل خمشی ورق دایروی/حلقوی کامپوزیتی متخلل تقویت شده با گرافن با تئوری سه بعدی الاستیسیته

در این پژوهش، تحلیل رفتار خمشی ورق کامپوزیتی حلقوی/دایروی متخلل تقویت شده با گرافن با استفاده از تئوری سه بعدی الاستیسیته و همچنین روش مربعات تفاضلی مورد مطالعه قرار گرفته است. ورق متخلل براساس آرایش یکنواخت و غیر یکنواخت توزیع گرافن در ماتریس پلیمر که شامل تخلخل داخلی می باشد، ساخته شده است. مدل میکرومکانیک هالپین تسای، قانون اختلاط و خصوصیات مکانیکی فوم های سلول باز پلیمر برای تعیین مدول الاستیسیته و چگالی نانوکامپوزیت استفاده شده است. معادلات حاکم بر ورق دایروی/حلقوی با استفاده از تئوری سه بعدی الاستیسیته به دست آمده است. در این مقاله، تاثیر توزیع مختلف صفحات گرافنی، چگالی و اندازه حفره های داخلی، کسر وزنی گرافن و شرایط مرزی مختلف بر رفتار خمشی ورق دایروی/حلقوی متخلل مورد مطالعه قرار گرفته است.

حسین بیسه<sup>۱</sup>

دانشجوی

کارشناسی ارشد

اکبر علی بیگلو<sup>۲</sup>

استاد

واژه های راهنما: ورق دایروی/حلقوی، تخلخل، گرافن، تئوری سه بعدی الاستیسیته

### ۱- مقدمه

نانو کربن ها به دلیل خواص فوق العاده مکانیکی، گرمایی و الکتریکی به طور وسیع در زمینه های مختلف مهندسی همچون مکانیک، هوافضا، خودرو و عمران گسترش یافته اند. گرافن در مقایسه با سایر نانوکربن ها به علت داشتن سطح مخصوص بالا و هزینه تولیدی کم تر به عنوان گزینه مناسب برای تقویت کامپوزیت ها استفاده می شود. با توجه به پژوهش های تجربی و تئوری صورت گرفته، اضافه نمودن حجم کمی از گرافن به ماتریس پلیمر، خواص مکانیکی کامپوزیت به صورت قابل توجه افزایش می یابد. همچنین گرافن و مشتقات آن به عنوان یکی از سخت ترین و محکم ترین مواد در طبیعت شناخته می شوند که باعث بهبود قابل توجه خواص مکانیکی و گرمایی کامپوزیت ها می شوند. همچنین گرافن به دلیل ایجاد سطحی بزرگ تر نسبت به سایر نانو فیلرها همچون نانولوله کربنی، گزینه مناسبی برای تقویت کامپوزیت ها می باشد [۱ و ۲]. برای بررسی خواص مکانیکی صفحات گرافن، پژوهش های زیادی صورت گرفته است که به برخی از آن ها پرداخته می شود.

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران h.bisheh@modares.ac.ir

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، استاد، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران abeigloo@modares.ac.ir

صبحی [۴ و ۳] تحلیل رفتارهای ارتعاشی و کمانشی ورق‌های تک‌لایه و چندلایه گرافنی را با به کارگیری حل لوی ارائه کرده است. وانگ و همکاران [۵] با استفاده از مدل المان محدود، تحلیل کمانشی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده با گرافن را ارائه نمودند. آن‌ها از مدل هالپین تسای برای تخمین مدول الاستیسیته نانو کامپوزیت استفاده کردند و به این نتیجه رسیدند که صفحات گرافن، مقاومت کامپوزیت در برابر رفتار کمانشی را به شدت افزایش می‌دهند. وانگ و همکاران [۶] ارتقایافتگی حرارتی کامپوزیت‌های تقویت شده با گرافن اکسید را با استفاده از تحلیلگر ترمودینامیکی مورد بررسی قرار دادند و نتیجه گرفتند که کامپوزیت‌های تقویت‌شده با صفحات گرافن دارای ضریب هدایت حرارتی به مراتب بزرگتری نسبت به کامپوزیت‌های فاقد گرافن می‌باشد. رفیعی و همکاران [۷] ویژگی‌های مکانیکی اپوکسی نانو کامپوزیت با صفحات گرافن، نانولوله‌های کربنی تک‌دیواره و چنددیواره را از لحاظ مدول یانگ، مقاومت نهایی کشش، سختی شکست، انرژی شکست و مقاومت مواد در برابر خستگی ترک را بررسی نمودند و نتیجه گرفتند که در تمام این ویژگی‌های مکانیکی، صفحات تقویت شده با گرافن از مقاومت مکانیکی بالاتری نسبت به نانولوله‌های کربنی برخوردار هستند که این برتری مربوط به مساحت بزرگ این صفحات و دو بعدی بودن آنها می‌باشد. علی بیگلو [۸] بر اساس مکانیک پیوسته غیر محلی به تحلیل ارتعاشات آزاد سه بعدی کامپوزیت‌های دارای گرافن چندلایه پرداخت. با استفاده از بسط سری فوریه در محورهای داخل صفحه، معادلات حاکم بر پایه جابه‌جایی‌ها حاصل می‌شود. شاهیل و بالاندین [۹] با بررسی خواص گرمایی گرافن و صفحات چند لایه گرافن، امکان استفاده از آنها را برای مدیریت حرارتی قطعات پیشرفته الکترونیک و اپتوالکترونیک بررسی نمودند. زیرا هدایت گرمایی کامپوزیت‌های دارای صفحات گرافن به مراتب بیشتر از کامپوزیت‌های فاقد گرافن می‌باشد و کامپوزیت‌های حاصل از ترکیب فلزات و گرافن، از رسانایی حرارتی و رسانایی الکتریکی مناسبی بهره‌مند هستند و از آنها می‌توان در ساخت تراشه‌های الکترونیکی جدید استفاده نمود. آب‌بندانک و همکاران [۱۰] تاثیر نانو گرافن را بر کامپوزیت اپوکسی/الیاف بازلت مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند مقدار کمی از نانوگرافن، می‌تواند به طور قابل توجه استحکام خمشی کامپوزیت را افزایش دهد. گوآن و همکاران [۱۱] به مطالعه ارتعاشات سازه‌های مدرج تابعی متخلخل دوار (مانند پوسته‌ها و پانل‌های استوانه‌ای، مخروطی و کروی) با استفاده از روش رایلی-ریتز و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداختند.

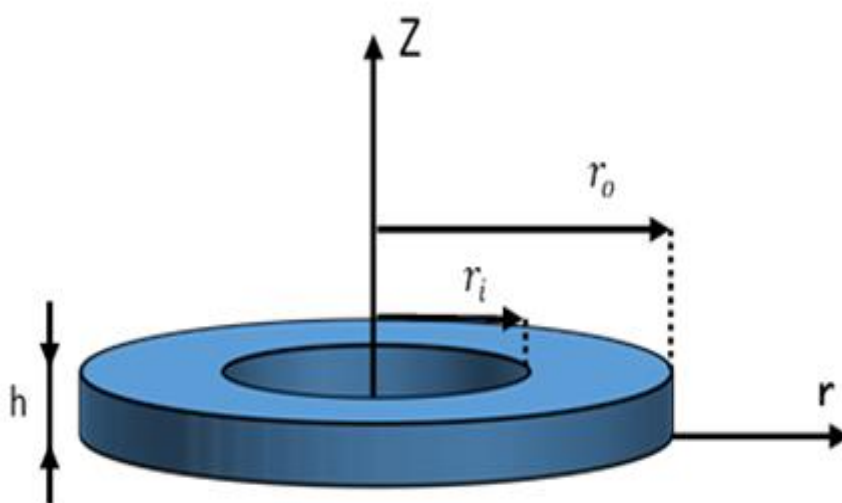
پژوهشگران به دلیل کاربردهای زیاد ورق‌های دایروی/حلقوی در صنعت به دنبال به دست آوردن رفتار این نوع ورق‌ها هستند. وانگ و همکاران [۱۲] به مطالعه ورق‌های دایروی/حلقوی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل پرداختند. آرشید و خورشیدوند [۱۳] به بررسی ارتعاشات ورق‌های دایروی تشکیل شده از مواد متخلخل پرداختند. معادلات حاکم بر اساس اصل همیلتون و تئوری کلاسیک ورق‌ها حاصل شده است. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که با افزایش تخلل، فرکانس در توزیع غیرخطی متقارن تخلل افزایش می‌یابد. نای و زنگ [۱۴] حل نیمه‌تحلیلی خمش متقارن ورق‌های دایروی/حلقوی مدرج تابعی بر اساس قانون توانی در هر دو راستای ضخامت و شعاع ورق انجام دادند. بیشه و علی‌بیگلو [۱۵] تحلیل استاتیکی ورق دایروی توپر تقویت شده با گرافن تحت شرط مرزی ساده را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از روش مربعات تفاضلی جهت حل نیمه‌تحلیلی استفاده کردند. همچنین مدل هالپین-تسای جهت محاسبه مدول موثر نانو کامپوزیت گرافن استفاده شده

<sup>1</sup>Levy solution

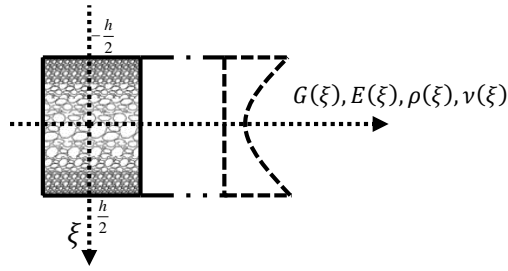
است. ین و همکاران [۱۶] رفتار استاتیکی ورق‌های دایروی تحت بارگذاری عرضی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از روش جابه‌جایی مستقیم، معادلات ورق را حل نمودند. علی‌بیگلو [۱۷] رفتار نیمه تحلیلی خمشی ورق‌های دایروی و حلقوی را تحت لایه‌های پیزوالکتریک بررسی کرد. حل تحلیلی در راستای ضخامت و با استفاده از روش فضای حالت صورت پذیرفت. همچنین حل عددی در راستای شعاعی و با استفاده از روش مربعات تفاضلی انجام شد. یوسف‌زاده و همکاران [۱۸] به مطالعه رفتار ارتعاشات هیدروالستیک ورق‌های دایروی در تماس با سیال پرداختند. با به‌کارگیری روش ریتز، فرکانس‌های طبیعی ورق را محاسبه شده است. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که با افزایش پارامترهایی همچون نسبت شعاع داخلی به خارجی و شعاع مخزن، فرکانس طبیعی بهبود می‌یابد. ارتش‌یار و محیدین قمشه‌ای [۱۹] تحلیل ارتعاشی ورق‌های حلقوی تحت لایه‌های پیزوالکتریک را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها از روش مربعات تفاضلی جهت حل استفاده نمودند. با توجه به مطالعه دقیق کارهای پیشین، تحلیل خمشی ورق دایروی/حلقوی متخلل تقویت‌شده با گرافن تحت شرایط مرزی مختلف هنوز مورد بررسی قرار نگرفته است. لذا در این تحقیق به بررسی این موضوع پرداخته می‌شود. برای توزیع گرافن در راستای ضخامت ورق، از سه الگوی متفاوت استفاده شده است. حل تحلیلی با استفاده از روش فضای حالت و در راستای ضخامت ورق انجام شده است و همچنین حل نیمه تحلیلی نیز در راستای شعاع ورق و با استفاده از روش تفاضلات مربعی صورت گرفته است. در مقاله حاضر، تاثیر الگوهای مختلف گرافن و تخلل، نسبت شعاع خارجی به داخلی، کسر وزنی گرافن و شرایط مرزی مختلف بر روی رفتار خمشی ورق دایروی/حلقوی مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته می‌شود.

## ۲- ورق دایروی/حلقوی نانوکامپوزیتی متخلل

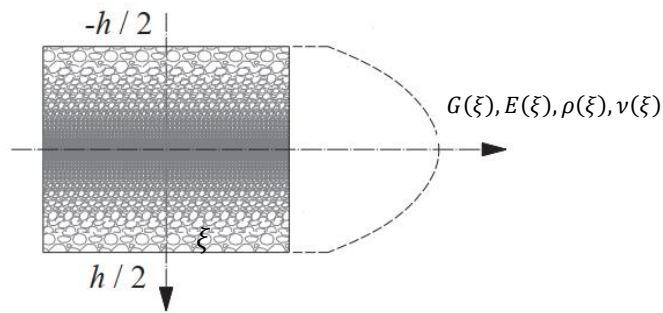
یک ورق حلقوی با شعاع خارجی  $r_0$  و شعاع داخلی  $r_i$  و ارتفاع  $h$  را مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید. ورق مذکور تحت بار مکانیکی  $p_0$  قرار داشته و با صفحات گرافنی تقویت شده است.



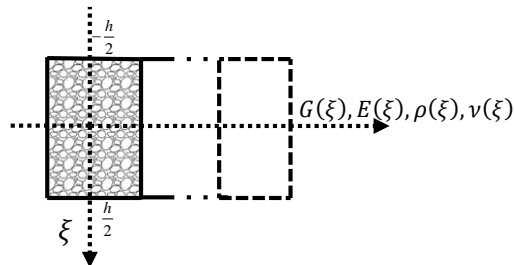
شکل ۱- شماتیک ورق حلقوی و مختصات



a) P.D.1



b) P.D.2



c) P.D.3

**شکل ۲- توزیع تخلخل در راستای ضخامت ورق حلقوی/دایروی**

در این پژوهش، همانطور که در شکل (۲) نشان داده شده است، سه توزیع تخلخل در امتداد ضخامت در نظر گرفته شده است. تغییر خواص مکانیکی در هر توزیع تخلخل به صورت رابطه (۱) انجام می‌پذیرد [۲۰].

$$\text{P.D.1:} \begin{cases} E(z) = E^* \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \\ G(z) = G^* \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \\ \rho(z) = \rho^* \left[ 1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \end{cases}$$

$$\text{P.D.2:} \begin{cases} E(z) = E^* \left[ 1 - e_0^* \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi z}{h} \right) \right) \right] \\ G(z) = G^* \left[ 1 - e_0^* \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi z}{h} \right) \right) \right] \\ \rho(z) = \rho^* \left[ 1 - e_m^* \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi z}{h} \right) \right) \right] \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{P.D.3:} \begin{cases} E(z) = E^* \alpha \\ G(z) = G^* \alpha \\ \rho(z) = \rho^* \alpha' \end{cases}$$

در معادلات ذکر شده  $\rho^*$ ،  $E^*$  و  $G^*$  به ترتیب نشان دهنده چگالی، مدول یانگ و مدول برشی ورق دایروی تقویت شده با گرافن و بدون تخلخل می باشد. با توجه به معادله (۱) و همچنین شکل (۲) اثر تخلخل بر مدول مکانیکی به وسیله اعمال  $e_0$ ،  $e_0^*$  و  $\alpha$  بر روی توزیع های تخلخل P.D.1 و P.D.2 و P.D.3 نشان داده می شود. در حالی که  $e_m$ ،  $e_m^*$  و  $\alpha'$  اثر چگالی بر روی تخلخل می باشد. همچنین معادله (۲) مربوط به کسر حجمی گرافن ( $V_{GPL}$ ) می باشد.

$$V_{GPL} = \frac{f_{GPL}}{f_{GPL} + \left( \frac{\rho_{GPL}}{\rho_M} \right) (1 - f_{GPL})} \quad (2)$$

که در آن  $\rho_M$ ،  $\rho_{GPL}$  و  $f_{GPL}$  به ترتیب چگالی ماتریس پلیمر، چگالی صفحات گرافن و کسر وزنی گرافن می باشند. همچنین برای تخمین مدول الاستیسیته نانوکامپوزیت تقویت شده با صفحات گرافن، از مدل هالپین تسای طبق رابطه زیر استفاده می شود [۲۱]:

$$E_c = \frac{3}{8} E_1 + \frac{5}{8} E_2 \quad (3)$$

به طوری که

$$E_1 = \frac{1 + \xi_W \eta_W V_{GPL}}{1 - \eta_W V_{GPL}} \times E_M, E_2 = \frac{1 + \xi_L \eta_L V_{GPL}}{1 - \eta_L V_{GPL}} \times E_M \quad (4)$$

با توجه به معادله (۴)، پارامترهای  $E_c$ ،  $E_M$  و  $E_{GPL}$  به ترتیب نشان دهنده مدول الاستیسیته نانوکامپوزیت، مدول یانگ ماتریس و مدول یانگ گرافن می باشد. پارامترهای  $\xi_L$  و  $\xi_W$  به صورت  $\xi_L = 2 \frac{L_{GPL}}{t_{GPL}}$  و  $\xi_W = 2 \frac{W_{GPL}}{t_{GPL}}$  بیان می شوند. که  $t_{GPL}$ ،  $W_{GPL}$  و  $L_{GPL}$  به ترتیب طول، عرض و ضخامت صفحات گرافن می باشد. همچنین در معادلات مذکور  $\eta_L$  و  $\eta_W$  به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\eta_L = \frac{\left( \frac{E_{GPL}}{E_M} \right) - 1}{\left( \frac{E_{GPL}}{E_M} \right) + \xi_L}, \eta_W = \frac{\left( \frac{E_{GPL}}{E_M} \right) - 1}{\left( \frac{E_{GPL}}{E_M} \right) + \xi_W} \quad (5)$$

برای محاسبه نسبت پواسون و چگالی وزنی نانوکامپوزیت از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\rho_C = \rho_{GPL} V_{GPL} + \rho_M (1 - V_{GPL}) \quad (۶)$$

$$\nu_C = \nu_{GPL} V_{GPL} + \nu_M (1 - V_{GPL})$$

که پارامترهای  $\nu_M$  و  $\nu_{GPL}$  به ترتیب نسبت پواسون ماتریس و گرافن را نشان می‌دهند. خواص مکانیکی در هر شعاع دلخواه در مواد غیرمتخلخل برطبق مدل فوم-باز با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید [۲۰].

$$\frac{E(\xi)}{E^*} = \left( \frac{\rho(\xi)}{\rho^*} \right)^2 \quad (۷)$$

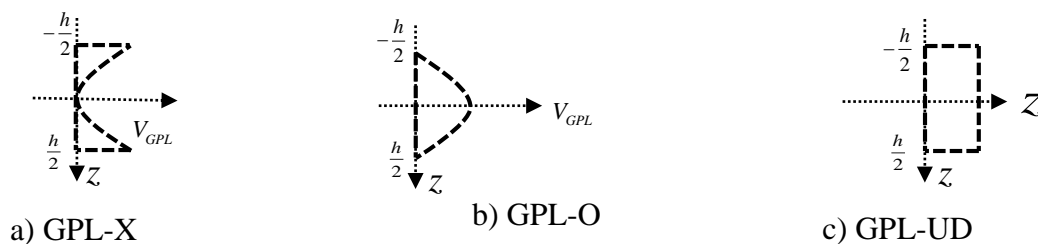
جایگذاری معادله (۱) در معادله (۷) منجر به رابطه زیر بین تخلخل و ضریب چگالی در هر توزیع می‌شود.

$$\begin{cases} 1 - e_m \cos\left(\frac{\pi\xi}{h}\right) = \sqrt{1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi\xi}{h}\right)} \\ 1 - e_m^* \left(1 - \cos\left(\frac{\pi\xi}{h}\right)\right) = \sqrt{1 - e_0^* \left(1 - \cos\left(\frac{\pi\xi}{h}\right)\right)} \\ \alpha' = \sqrt{\alpha} \end{cases} \quad (۸)$$

با فرض برابر قرار دادن جرم ورق حلقوی/دایروی تقویت شده با گرافن با توزیع‌های مختلف تخلخل رابطه‌ای بین توزیع تخلخل به صورت رابطه (۹) برقرار می‌گردد.

$$\begin{cases} \int_0^{\frac{h}{2}} \sqrt{1 - e_0^* \left(1 - \cos\left(\frac{\pi\xi}{h}\right)\right)} d\xi = \\ \int_0^{\frac{h}{2}} \sqrt{1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi\xi}{h}\right)} d\xi \\ \int_0^{\frac{h}{2}} \sqrt{\alpha} d\xi = \int_0^{\frac{h}{2}} \sqrt{1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi\xi}{h}\right)} d\xi \end{cases} \quad (۹)$$

با استفاده از معادله (۹) می‌توان ضرایب  $e_0^*$  و  $\alpha$  را به صورت صریح بر حسب  $e_0$  بدست آورد. شایان ذکر است که افزایش  $e_0$  سبب افزایش چشمگیر  $e_0^*$  می‌شود. بنابراین توصیه می‌شود که  $0 \leq e_0 \leq 0.6$  انتخاب شود تا  $e_0^*$  به حداکثر مقدار خود نرسد. همچنین برای توزیع صفحات گرافن در راستای ضخامت نیز سه آرایش مختلف (رابطه (۹)) در نظر گرفته شده و در شکل (۳) به نمایش در آمده است.



شکل ۳- توزیع گرافن در راستای ضخامت ورق دایروی

$$GPL - X: S_1 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi\xi}{h}\right) \right] \quad (10)$$

$$GPL - O: S_2 \cos\left(\frac{\pi\xi}{h}\right), GPL - UD: S_5$$

همچنین ضرایب  $S_i$  که  $1 \leq i \leq 3$  می باشد را می توان به صورت رابطه (۱۱) در نظر گرفت.

$$V_{GPL}^T \sum_{j=1}^n \frac{\rho(\xi_j)}{\rho^*} = \begin{cases} S_{i1} \sum_{j=1}^n \left\{ \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi\xi_j}{h}\right) \right] \frac{\rho(\xi_j)}{\rho^*} \right\} \\ S_{i2} \sum_{j=1}^n \left\{ \cos\left(\frac{\pi\xi_j}{h}\right) \frac{\rho(\xi_j)}{\rho^*} \right\} \\ S_{i3} \sum_{j=1}^n \frac{\rho(\xi_j)}{\rho^*} \end{cases} \quad (11)$$

بطوریکه  $\xi_j = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{j}{n}\right)h$ ,  $j=1,2,3,\dots,n$  می باشد.

### ۳- تئوری مساله

در غیاب نیروهای جسمی، معادلات حرکت برای رفتار خمشی ورق دایروی/حلقوی مطابق رابطه زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} = 0$$

روابط تنش-تغییر مکان با استفاده از روابط تنش- کرنش و همچنین کرنش-تغییر مکان به صورت زیر می شود:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( (1-\nu)u_{r,r} + \frac{\nu}{r}(u_r + u_{\theta,\theta}) + \nu u_{z,z} \right)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu u_{r,r} + \frac{(1-\nu)}{r} (u_r + u_{\theta,\theta}) + \nu u_{z,z}) \quad (13)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu u_{r,r} + \frac{\nu}{r} (u_r + u_{\theta,\theta}) + (1-\nu)u_{z,z})$$

معادلات دیفرانسیل فضای حالت با به کارگیری معادلات (۱۲) و (۱۳) به صورت معادله‌ی زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} - \frac{\tau_{rz}}{r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} &= -\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \sigma_z - \frac{\nu}{(1-\nu)} \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} - \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} u_r \right)$$

فرم ماتریسی معادله‌ی (۱۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d\delta}{dz} = G\delta \quad (15)$$

که  $\delta = \{\sigma_z u_r u_{\theta} u_z \tau_{rz} \tau_{\theta z}\}^T$  و  $G$  به عنوان ماتریس ضرایب در ضمیمه معرفی شده‌است. تنش‌های داخل صفحه در ورق‌های دایروی/حلقوی طبق معادله‌ی (۱۶) محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_r = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z + \frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_r \right) \right) \quad (16)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z + \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_r \right) \right)$$

روابط مربوط به شرایط مرز ساده (S)، گیردار (C) و آزاد (F) برای ورق حلقوی طبق معادله‌ی (۱۷) می‌باشد:

$$S: \sigma_r = u_z = 0 \quad C: u_z = u_r = 0 \quad F: \sigma_r = \tau_{rz} = 0 \quad (17)$$



همچنین شرط مرزی در مرکز دایره برای ورق دایروی به صورت زیر می‌باشد:

$$u_r = \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \quad r = 0 \quad (18)$$

برای ساده‌سازی روابط، از پارامترهای بی‌بعد زیر استفاده می‌شود:

$$(\bar{\sigma}_z \quad \bar{\sigma}_r \quad \bar{\sigma}_\theta \quad \bar{\tau}_{rz}) = \frac{1}{E_m} (\hat{\sigma}_z \quad \hat{\sigma}_r \quad \hat{\sigma}_\theta \quad \hat{\tau}_{rz}) \quad (19)$$

$$(\bar{u}_r \quad \bar{u}_z) = \frac{1}{h} (\hat{u}_r \quad \hat{u}_z), \quad \bar{Z} = \frac{Z}{h} \quad \bar{E} = \frac{E}{P_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R_0}$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد فوق و جایگذاری در معادله (۱۵)، معادلات فضای حالت به فرم بی‌بعد زیر خواهد شد:

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\bar{z}} = \bar{G}\bar{\delta} \quad (20)$$

به طوری که  $\bar{\delta} = \{\bar{\sigma}_z \quad \bar{u}_r \quad \bar{u}_z \quad \bar{\tau}_{rz}\}^T$  شامل متغیرهای فضای حالت می‌باشد و همچنین  $\bar{G}$  نیز در ضمیمه تعریف شده است.

#### ۴- روش حل

حل معادله (۲۰) به دلیل پیچیدگی، از روش تحلیلی امکان‌پذیر نمی‌باشد لذا از روش نیمه‌تحلیلی برای حل استفاده می‌شود. بدین صورت که با به‌کارگیری مربعات تفاضلی در راستای شعاعی، حل کامل خواهد شد. روش مربعات تفاضلی برای اولین بار توسط شو و ریچارد پیشنهاد داده شد و براساس معادله‌ی زیر محاسبه می‌شود [۱۹]:

$$\frac{\partial f^n(x_i, z)}{\partial x_i^n} = \sum_{j=1}^N g_{ij} f(x_j, z) \quad (i = 1, 2, \dots, N \quad n = 1, \dots, N, N-1) \quad (21)$$

که  $N$  و  $f(x_j, N)$  به ترتیب شماره نقاط نمونه و مقدار تابع در نقطه نمونه  $x_j$  می‌باشد. با جایگزینی معادله (۲۱) در (۲۰)، معادلات مربوطه در هر نقطه نمونه  $\bar{z}_j$  به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{zi}}{\partial \bar{z}} = -\frac{h}{R_0} \left( \sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{\tau}_{rzj} + \frac{\bar{\tau}_{rzi}}{\bar{r}_i} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{ri}}{\partial \bar{z}} = -\frac{h}{R_o} \sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{zj} + \frac{2(1+\nu)}{\bar{E}} \bar{\tau}_{rz} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{zi}}{\partial \bar{z}} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\bar{E}(1-\nu)} \bar{\sigma}_{zi} - \frac{h}{R_o} \frac{\nu}{(1-\nu)} \left( \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}_i} + \sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{rj} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{rzi}}{\partial \bar{z}} = \frac{h}{R_o} \frac{\nu}{(1-\nu)} \sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{\sigma}_{zj} - \frac{1}{\bar{r}_i} \sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{rj} + \frac{1}{\bar{r}_i^2} \bar{u}_{ri}$$

تنش‌های صفحه‌ای نیز با اعمال روش مربعات تفاضلی طبق معادلات زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{\sigma}_{ri} = \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{zi} + \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \frac{h}{R_o} \left( \sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{rj} + \frac{\nu}{\bar{r}_i} \bar{u}_{ri} \right) \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta i} = \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{zi} + \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \frac{h}{R_o} \left( \nu \sum_{j=1}^N \bar{g}_{ij} \bar{u}_{rj} + \frac{1}{\bar{r}_i} \bar{u}_{ri} \right)$$

که  $\sigma_{ki} = \sigma_k(r_i, z)$  ( $k = r, z$ ),  $\tau_{rzi} = \tau_{rz}(r_i, z)$ ,  $u_{ki} = u_k(r_i, z)$  با اعمال شرایط مرزی طبق معادله (۱۷) در معادلات (۲۲) در شعاع داخلی و خارجی ورق حلقوی، فرم بی‌بعد زیر برای هریک از شرایط مرزی به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial \bar{\delta}_b}{\partial \bar{z}} = \bar{G}_b \bar{\delta}_b \quad (24)$$

با توجه به معادله بالا، زیر اندیس **b** نشان‌دهنده هر یک از شرایط مرزی می‌باشد و همچنین  $\bar{G}_b$  به‌عنوان ماتریس ضرایب در شرایط مرزی مختلف تعریف شده است. حل تحلیلی معادله دیفرانسیل (۲۴) به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\bar{\delta}_b(\bar{z}) = e^{G_b \bar{z}} \cdot \bar{\delta}_b(0) \quad 0 \leq \bar{z} \leq \bar{h} \quad (25)$$

برای حل خمشی ورق حلقوی/دایروی، شرایط سطوح در سطح بالا و پایین ورق به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z = 0 & \quad \bar{\tau}_{rz} = 0 & \quad \text{at } Z = 0 \\ \bar{\sigma}_z = P_0 & \quad \bar{\tau}_{rz} = 0 & \quad \text{at } Z = h \end{aligned} \quad (26)$$

با اعمال شرایط سطوح مطابق روابط فوق در معادله (۲۵)، معادله زیر در سطح پایینی ورق حلقوی/دایروی حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{42} & A_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_z \end{bmatrix}_{z=0} = \begin{bmatrix} \bar{P} \\ 0 \end{bmatrix}_{z=h} \quad (27)$$

که  $\bar{P} = \{\bar{P}_1, \dots, \dots, \bar{P}_N\}$  و همچنین  $A = exp(G_b \bar{Z})$  تعریف می‌شود. جابه‌جایی در سطح پایینی ورق حلقوی/دایروی با استفاده از معادله (۲۷) بدست می‌آید و تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها نیز در هر نقطه از مختصات ورق با استفاده از معادله (۲۵) بدست می‌آید.

## ۵- نتایج عددی و بحث

برای حل نیمه تحلیلی، نقاط نمونه با استفاده از روش مربعات تفاضلی و به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۲]:

$$x_i = \frac{(R_o - R_i)}{2} \left( 1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{N-1} \right) + R_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (28)$$

برای نشان دادن دقت محاسبات در این بخش، نتایج عددی در قالب جدول و نمودار ارائه شده است و همچنین از مقادیر و مشخصات مواد زیر برای حل استفاده شده است:

$$E_m = 2.85 GPa, \quad \nu_m = 0.38, \quad \rho_{GPL} = 1.2 \frac{g}{cm^3}, \quad E_{GPL} = 1.01 TPa$$

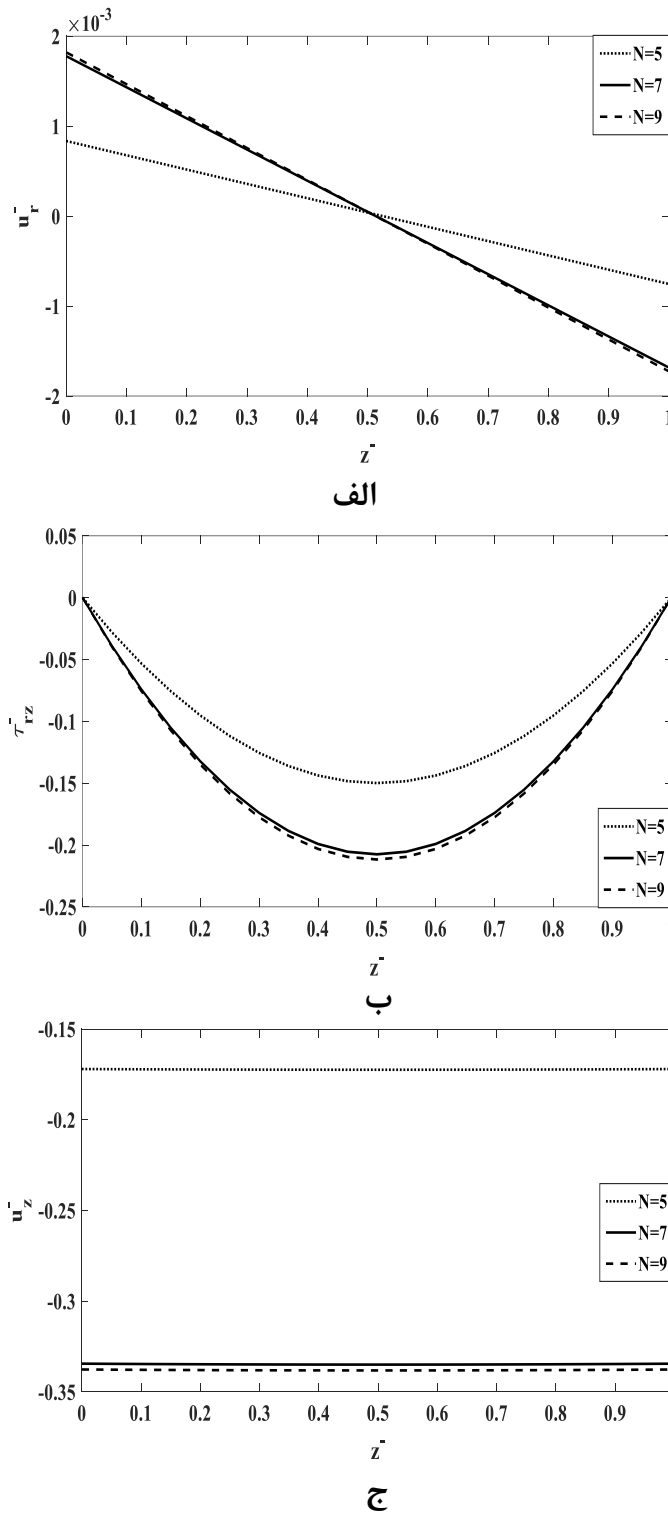
$$\rho_m = 1.06 \frac{g}{cm^3}, \quad l_{GPL} = 2.5 \mu m, \quad w_{GPL} = 1.5 \mu m, \quad \nu_{GPL} = 0.2 \quad (29)$$

$$h = 0.2m, R_o = 1m, R_i = 0.2m, P_o = 10^3 psi, t_{GPL} = 1.5nm$$

همگرایی روش حل برای ورق حلقوی با تکیه‌گاه ساده در الگوی توزیع گرافن به صورت یکنواخت با درصد حجمی  $f_{GPL} = 1\%wt$  در شکل ۳ (الف-ج) نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود همگرایی مساله با افزایش تعداد نقاط شبکه با روندی سریع ایجاد شده که از خصوصیات استفاده از روش مربعات تفاضلی، به عنوان روش نیمه تحلیلی می‌باشد. به طوری که در  $N=9$  همگرایی خوبی در جابه‌جایی‌ها و تنش برشی عرضی بی‌بعد ایجاد شده است.

به منظور اعتبارسنجی و صحت‌گذاری روش حل، ماکزیمم جابه‌جایی عرضی بی‌بعد از روش حاضر با نتایج ارائه شده در مرجع [۱۳] مطابق جدول (۱) مورد مقایسه قرار گرفته است. در مرجع شماره [۱۳] از تئوری‌های کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) جهت تحلیل ورق دایروی FGM استفاده شده است.

همچنین برای بررسی ماکزیمم جابه‌جایی عرضی بی‌بعد از ورق دایروی با تکیه‌گاه ساده استفاده شده است. در این مدل پارامتر  $m$  نشان‌دهنده نمای این تابع توانی می‌باشد.  $E_c$  نیز مدول یانگ ورق در سطح بالایی و از جنس سرامیک می‌باشد و همچنین  $E_m$  نیز به عنوان مدول یانگ در سطح زیرین و فلزی می‌باشد. مطابق جدول (۱) همخوانی خوبی بین روش حاضر و روش ارائه شده در مرجع مذکور ایجاد شده است.



**شکل ۳-** همگرایی جابه‌جایی‌ها و تنش برشی عرضی در راستای ضخامت ورق حلقوی در شرط مرزی ساده-ساده. الف) جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد، ب) تنش برشی عرضی بی‌بعد، ج) جابه‌جایی عرضی بی‌بعد. ( $GPL - UD, R/h=5, f_{GPL} = 1\%wt$ )

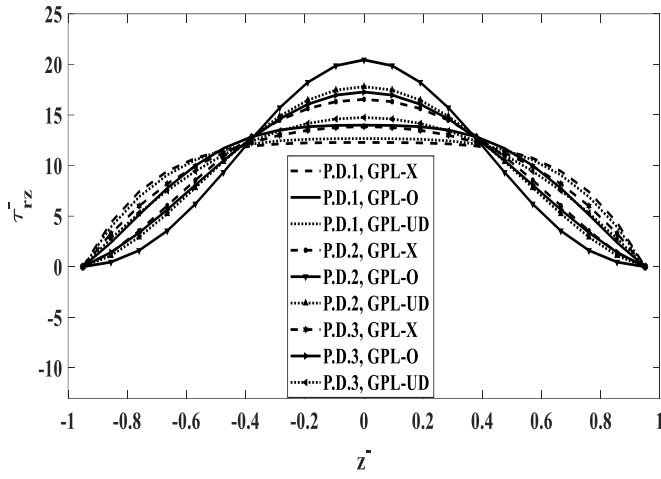
جدول ۱- مقایسه نتایج بدست آمده برای حداکثر جابه‌جایی عرضی بی‌بعد برای ورق دایروی در حالت تکیه‌گاه ساده

$$E = E_m z^m + E_c (1 - z^m), S = \frac{h}{R}, \bar{u}_{zmax} = \frac{64 u_{zmax} D_c}{p_0 R^4}, D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}$$

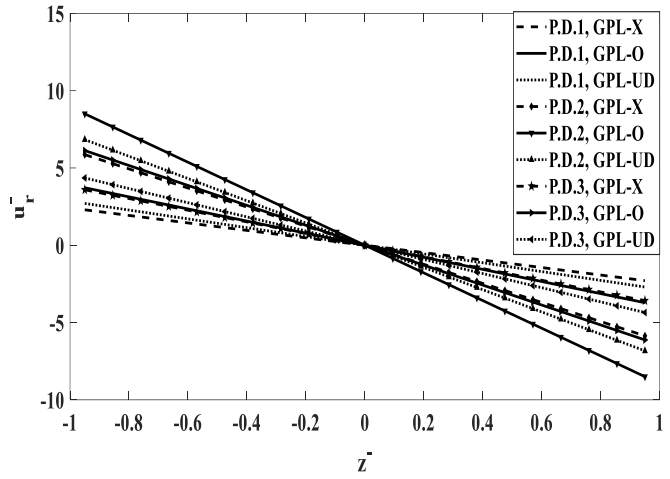
مرجع [۱۶]	روش حاضر	S	m
۱۰/۳۹۱	۱۰/۷۸۹	۰/۰۵	۰
۱۰/۴۶۰	۱۰/۸۵۵	۰/۱	
۱۰/۵۷۵	۱۰/۹۶۳	۰/۱۵	
۱۰/۷۳۶	۱۱/۱۱۴	۰/۲	
۵/۷۱۰	۶/۰۹۲	۰/۰۵	۲
۵/۷۴۵	۶/۱۲۱	۰/۱	
۵/۸۰۴	۶/۱۶۸	۰/۱۵	
۵/۸۸۶	۶/۲۳۴	۰/۲	
۵/۲۱۸	۵/۶۰۸	۰/۰۵	۴
۵/۲۴۹	۵/۶۳۳	۰/۱	
۵/۳۰۰	۵/۶۷۶	۰/۱۵	
۵/۳۷۲	۵/۷۳۷	۰/۲	
۴/۹۶۵	۵/۳۵۹	۰/۰۵	۶
۴/۹۹۵	۵/۳۸۵	۰/۱	
۵/۰۴۴	۵/۴۲۷	۰/۱۵	
۵/۱۱۲	۵/۴۸۶	۰/۲	

به منظور نشان دادن تاثیر الگوهای مختلف تخلل و توزیع صفحات گرافن بر روی رفتار خمشی در راستای ضخامت از شکل‌های ۴ (الف-د) استفاده شده است. به ترتیب مربوط به تنش برشی عرضی بی‌بعد، جابه‌جایی عرضی بی‌بعد و جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود الگوهای  $GPL - X$  و  $GPL - O$  به ترتیب در مولفه‌های تنش برشی عرضی، جابه‌جایی‌های عرضی و شعاعی دارای کم‌ترین و بیشترین مقدار هستند. الگوی  $GPL - X$  به دلیل داشتن کم‌ترین جابه‌جایی‌های عرضی و شعاعی نسبت به الگوهای دیگر، شرایط مناسب‌تری نسبت به سایر الگوها ایجاد کرده است. لذا از این الگو برای ادامه حل و بررسی سایر پارامترها استفاده می‌شود.

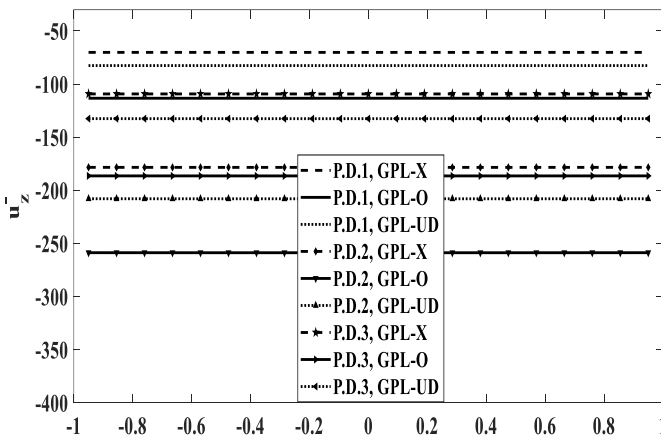
شکل‌های ۵ (الف-ب) تاثیر شرایط مرزی مختلف بر روی رفتار خمشی ورق حلقوی در الگوی توزیع تخلل و گرافن P.D.1 GPLX را نشان می‌دهند. مطابق شکل‌های ۵ (الف-ب) تکیه‌گاه‌های گیردار-گیردار و گیردار-ازاد به ترتیب کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار جابه‌جایی‌های عرضی و شعاعی را دارند. همچنین تکیه‌گاه گیردار-گیردار مقدار جابه‌جایی عرضی و شعاعی کم‌تری نسبت به سایر تکیه‌گاه‌ها دارد. بنابراین از این تکیه‌گاه در ادامه حل استفاده می‌شود.



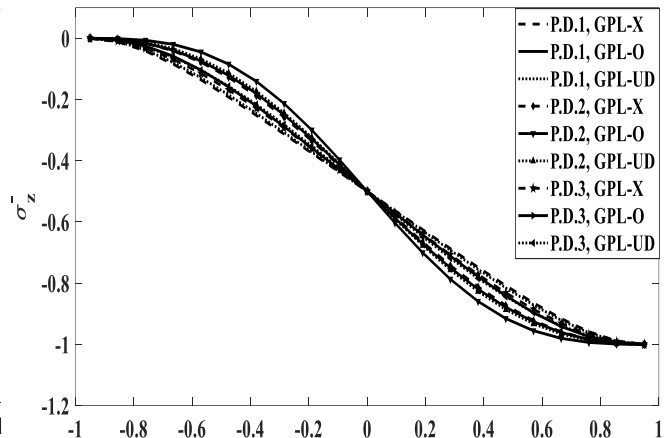
ب



ف

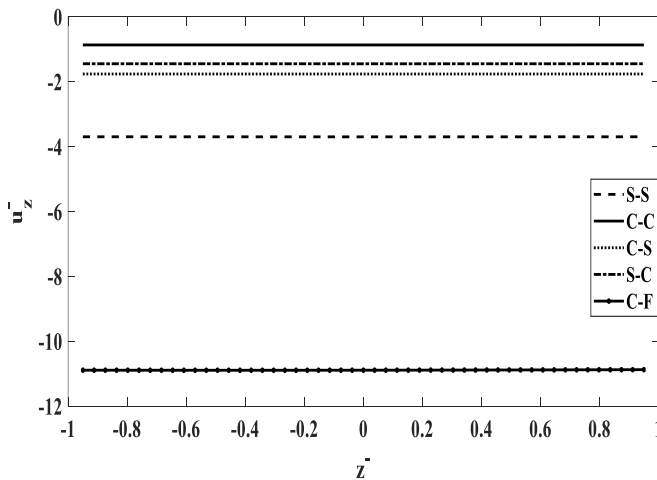


د

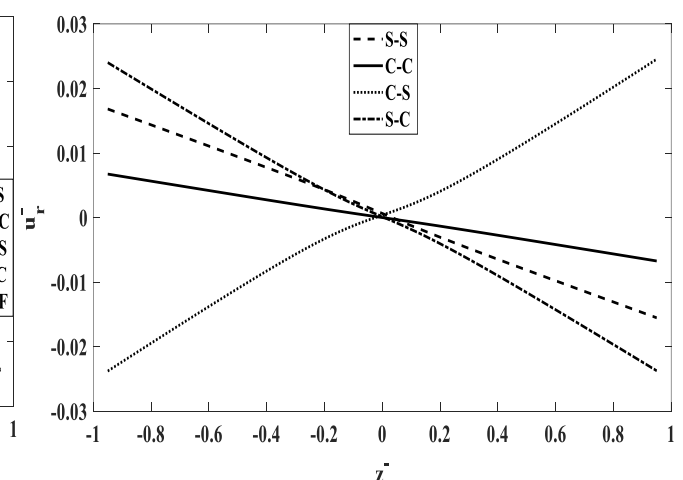


ج

شکل ۴- تاثیر الگوهای مختلف تخلل و توزیع صفحات گرافن بر روی رفتار خمشی جابه جایی ها و تنش برشی عرضی در راستای ضخامت ورق دایروی توپر در شرط مرزی ساده. (الف) جابه جایی شعاعی بی بعد، (ب) تنش برشی عرضی بی بعد، (ج) تنش نرمال بی بعد، (د) جابه جایی عرضی بی بعد. ( $R/h=5, f_{GPL} = 1\%wt$ )

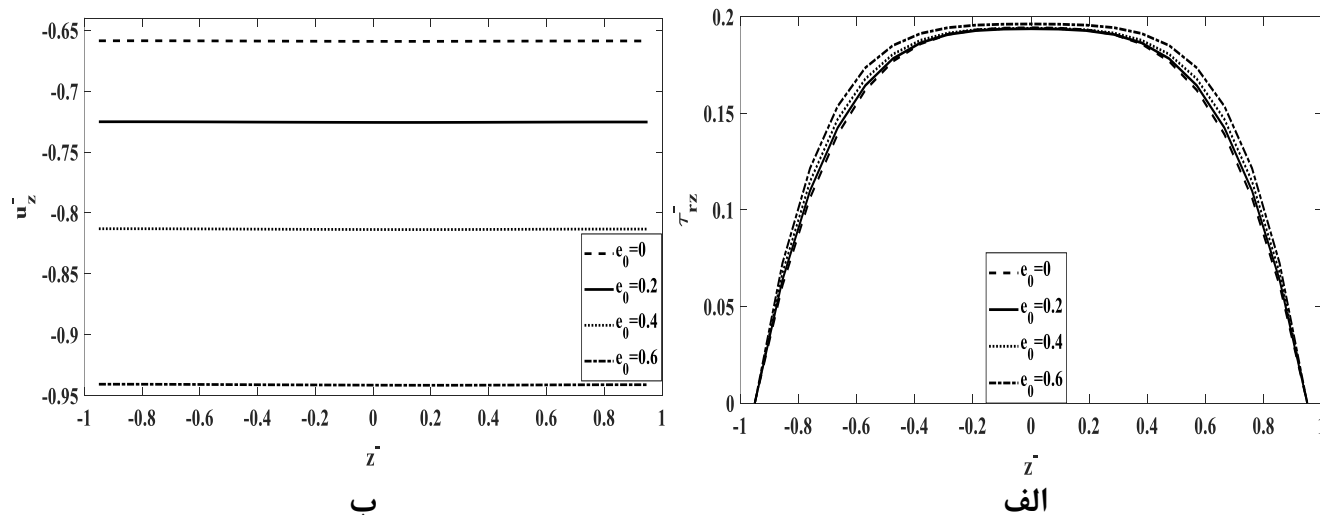


ب

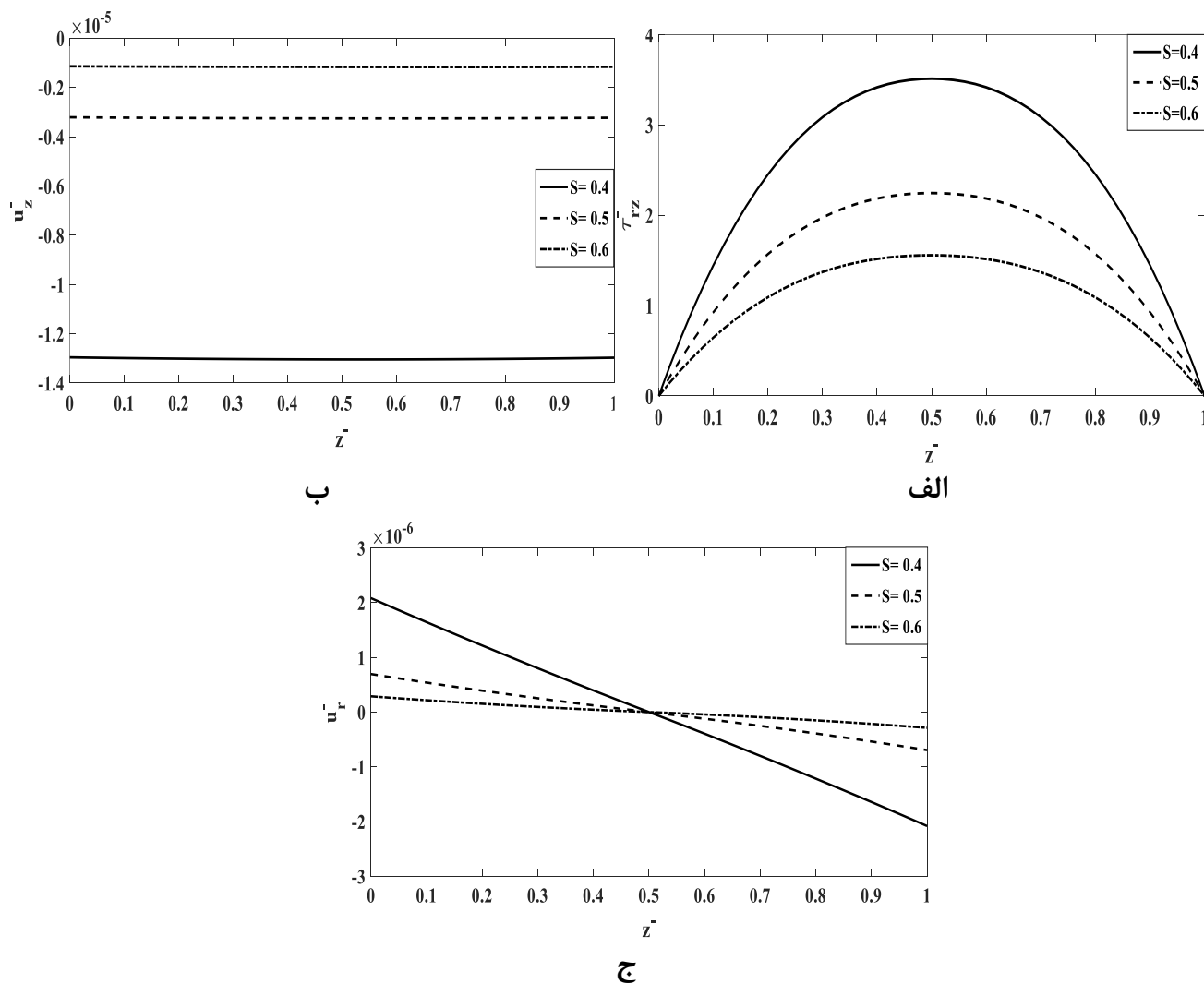


الف

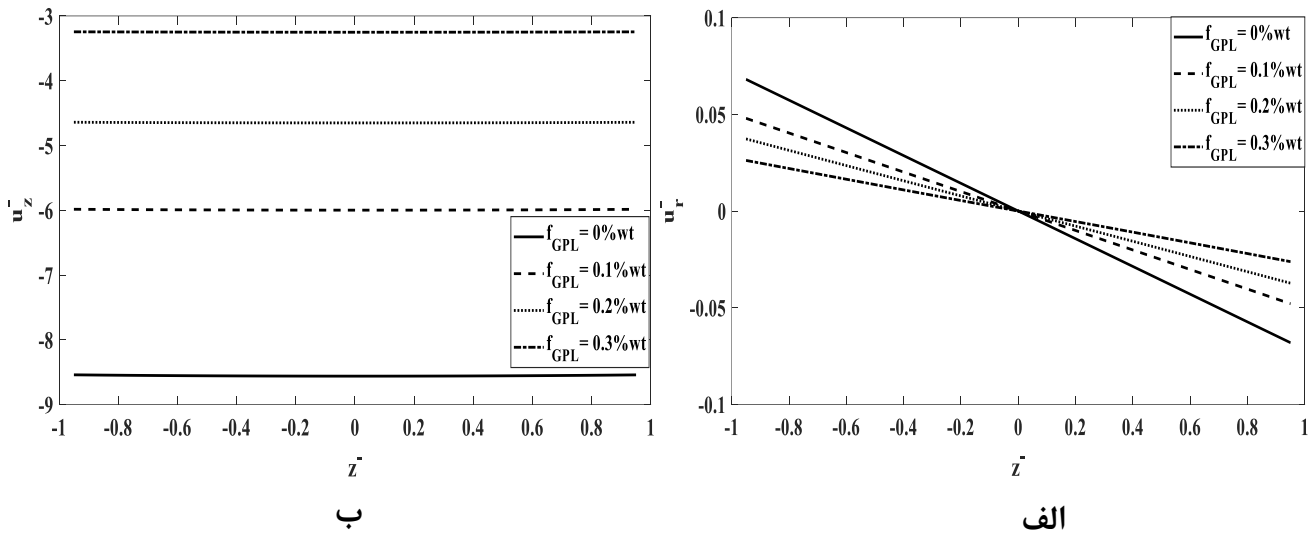
شکل ۵- تاثیر شرایط مرزی مختلف بر روی جابه جایی ها در راستای ضخامت ورق حلقوی. (الف) جابه جایی شعاعی بی بعد، (ب) جابه جایی عرضی بی بعد. ( $P.D.1 GPLX, R/h=5, f_{GPL} = 1\%wt$ )



**شکل ۶-** تاثیر تخلخل داخلی بر روی توزیع تنش برشی عرضی و جابه‌جایی عرضی بی‌بعد در شرایط مرزی گیردار-گیردار در راستای ضخامت ورق حلقوی. الف) تنش برشی عرضی بی‌بعد، ب) جابه‌جایی عرضی بی‌بعد.  $(P.D.1 GPLX, R/h=5, f_{GPL} = 1\%wt)$



**شکل ۷-** تاثیر نسبت ضخامت به شعاع خارجی  $(S=h/R)$  در راستای ضخامت ورق حلقوی تحت شرط مرزی گیردار-گیردار. الف) تنش برشی عرضی بی‌بعد، ب) جابه‌جایی عرضی بی‌بعد، ج) جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد.  $(P.D.1 GPLX, f_{GPL} = 1\%wt)$



شکل ۸- تاثیر درصد حجمی گرافن بر روی توزیع جابه‌جایی‌ها تحت شرط مرزی گیردار-گیردار در راستای ضخامت ورق حلقوی. (الف) جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد، (ب) جابه‌جایی عرضی بی‌بعد. ( $P, D, 1 GPLX, R/h=5$ )

شکل ۶ (الف-ب) تاثیر تخریل بر روی توزیع تنش برشی عرضی و جابه‌جایی عرضی بی‌بعد را در شرایط مرزی گیردار-گیردار برای ورق حلقوی نشان می‌دهد. طبق شکل‌های نشان داده شده، با افزایش اندازه و چگالی تخریل داخلی، سختی ورق کاهش می‌یابد و در نتیجه جابه‌جایی و تنش برشی در راستای ضخامت ورق افزایش می‌یابد.

شکل تاثیر نسبت ضخامت به شعاع خارجی ( $S=h/R$ ) را در ورق حلقوی برای تکیه‌گاه گیردار-گیردار نشان می‌دهد. شکل ۷ (الف-ج) به ترتیب برای تنش برشی عرضی و جابه‌جایی‌های عرضی و شعاعی رسم شده است. بر اساس شکل‌های رسم شده، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع به دلیل افزایش سختی و مقاومت کامپوزیت، مقدار تنش برشی عرضی و جابه‌جایی‌ها کاهش می‌یابد. به طوری که دیده می‌شود، تغییر  $S$  از  $0/5$  به  $0/6$  تقریباً چهار برابر جابه‌جایی عرضی را نسبت به تغییر  $S$  از  $0/4$  به  $0/5$  کاهش می‌دهد.

به منظور نشان دادن تاثیر درصد حجمی گرافن در مقاومت کامپوزیت، از شکل‌های ۸ (الف-ب) استفاده شده است. شکل‌های مذکور جابه‌جایی شعاعی و عرضی بی‌بعد ورق را در کسر وزنی‌های مختلف نشان می‌دهد. به طوری که مشاهده می‌شود با افزایش کسر وزنی گرافن، جابه‌جایی شعاعی ورق نیز کاهش می‌یابد و همچنین جابه‌جایی شعاعی ورق در مرکز ورق تقریباً در تمامی کسرو زنی‌ها صفر می‌باشد. جابه‌جایی عرضی ورق نیز در راستای ضخامت با افزایش کسر وزنی گرافن کاهش می‌یابد.

## ۶- نتیجه گیری

تحلیل خمشی ورق دایروی/حلقوی کامپوزیتی متخلل تقویت شده با صفحات گرافن با استفاده از روش تفاضلات مربعی در مقاله حاضر مورد مطالعه قرار گرفته است. در این پژوهش از الگوهای مختلف توزیع گرافن در راستای ضخامت ورق استفاده شده است. همچنین به جهت محاسبه مدول الاستیسیته نانوکامپوزیت از مدل هالپین تسای استفاده شده است. به دلیل پیچیدگی زیاد در روش حل تحلیلی، از حل نیمه تحلیلی برای حل استفاده



شده است. اعتبارسنجی مقاله حاضر نیز با مقالات معتبر دیگر انجام شده است که همخوانی خوبی بین روش حاضر و روش به کار رفته در مقالات دیگر را نشان می‌دهد. نتایج عددی صورت گرفته شده در این پژوهش به صورت زیر می‌باشد:

- الگوی  $GPL - X$  به دلیل مقدار جابه‌جایی‌های عرضی و شعاعی کم‌تر نسبت به سایر الگوها، به عنوان الگوی مناسب در این پژوهش انتخاب شده است.
- تکیه‌گاه گیردار و آزاد به ترتیب دارای کم‌ترین و بیش‌ترین تنش برشی عرضی می‌باشد. همچنین تکیه‌گاه گیردار نسبت به سایر تکیه‌گاه‌ها دارای کم‌ترین مقدار جابه‌جایی عرضی و شعاعی می‌باشد.
- تنش برشی عرضی و همچنین جابه‌جایی‌های عرضی و شعاعی با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، کاهش می‌یابند.
- افزایش کسر وزنی گرافن باعث افزایش مقاومت قابل‌ملاحظه ورق می‌شود به صورتی که با افزایش درصد حجمی گرافن در راستای ضخامت ورق، جابه‌جایی شعاعی و عرضی بی‌بعد به شدت کاهش پیدا می‌کنند.

## مراجع

- [1] Potts, J.R., Dreyer, D.R., Bielawski, C.W., and Ruoff, R.S., "Graphene-based Polymer Nanocomposites", *Polymer*, Vol. 52, No. 1, pp. 5-25, (2011).
- [2] Rafiee, M.A., Rafiee, J., Srivastava, I., Wang, Z., Song, H., Yu, Z., and Koratkar, N., "Fracture and Fatigue in Graphene Nanocomposites", *Small*, Vol. 6, No. 2, pp. 179-183, (2010).
- [3] Sobhy, M., "Generalized Two-variable Plate Theory for Multi-layered Graphene Sheets with Arbitrary Boundary Conditions", *Acta Mechanica*, Vol. 225, No. 9, pp. 2521-2538, (2014).
- [4] Sobhy, M., "Levy-type Solution for Bending of Single-layered Graphene Sheets in Thermal Environment using the Two-variable Plate Theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 90, pp. 171-178, (2015).
- [5] Wang, Y., Feng, C., Zhao, Z., and Yang, J., "Buckling of Graphene Platelet Reinforced Composite Cylindrical Shell with Cutout", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 18, No. 03, Article Number. 1850040, (2018).
- [6] Wang, S., Tambraparni, M., Qiu, J., Tipton, J., and Dean, D., "Thermal Expansion of Graphene Composites", *Macromolecules*, Vol. 42, No. 14, pp. 5251-5255, (2009).
- [7] Rafiee, M.A., Rafiee, J., Wang, Z., Song, H., Yu, Z., and Koratkar, N., "Enhanced Mechanical Properties of Nanocomposites at Low Graphene Content", *ACS Nano*, Vol. 3, No. 12, pp. 3884-3890, (2009).
- [8] Alibeigloo, A., "Three-dimensional Free Vibration Analysis of Multi-layered Graphene Sheets Embedded in Elastic Matrix", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 19, No. 16, pp. 2357-2371, (2013).

- [9] Ghaderi, A., "Thermal Properties of Graphene and Multilayer Graphene: Applications in Thermal Interface Materials", *Solid State Communications*, Vol. 152, No. 15, pp. 1331-1340, (2012).
- [10] Hosseini-Abbandanak, S.N., Siadati, M.H., and Eslami-Farsani, R., "Effects of Functionalized Graphene Nanoplatelets on the Flexural Behaviors of Basalt Fibers/Epoxy Composites", *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 5, No. 3, pp. 315-324, (2018). ( in Persian)
- [11] Guan, X., Sok, K., Wang, A., Shuai, C., Tang, J., and Wang, Q., "A General Vibration Analysis of Functionally Graded Porous Structure Elements of Revolution with General Elastic Restraints", *Composite Structures*, Vol. 209, pp. 277-299, (2019).
- [12] Wang, T., Ma, L.S., and Shi, Z.F., "Analytical Solutions for Axisymmetric Bending of Functionally Graded Circular/Annular Plates", *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 36(3), pp. 348-353, (2004).
- [13] Arshid, E., and Khorshidvand, A.R., "Vibrations Analysis of a Solid Circular Plate Made of Porous Material", *System Dyanamics and Solid Mechanics*, *Iranian Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 19(1), No. 46, pp. 78-100, (2016).
- [14] Nie, G., and Zhong, Z., "Axisymmetric Bending of Two-directional Functionally Graded Circular and Annular Plates", *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 20, No. 4, pp. 289-295, (2007).
- [15] Bisheh, H., and Alibeigloo, A., "Static Analysis of Graphene Reinforced Composite Circular Plate", *The 27th Annual International Conference of Iranian Society of Mechanical Engineers-ISME 2019*, 30 April- 2 May, Tehran, Iran, (2019).
- [16] Yun, W., Rongqiao, X., and Haojiang, D., "Three-dimensional Solution of Axisymmetric Bending of Functionally Graded Circular Plates", *Composite Structures*, Vol. 92, No. 7, pp. 1683-1693, (2010).
- [17] Alibeigloo, A., and Simintan, V., "Elasticity Solution of Functionally Graded Circular and Annular Plates Integrated with Sensor and Actuator Layers using Differential Quadrature", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 10, pp. 2473-2486, (2011).
- [18] Yousefzadeh, S., Jafari, A., and Mohammadzadeh, A., "Hydroelastic Vibration Analysis of Functionally Graded Circular Plate in Contact with Bounded Fluid by Ritz Method", *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 5, No. 4, pp. 529-538, (2019). ( in Persian)
- [19] Arteshyar, K., and Mohieddin Ghomshei, M.M., "Free Vibration Analysis of Thin Annular Plates Integrated with Piezoelectric Layers using Differential Quadrature Method", *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME*, Vol. 20(1) No. 32, pp. 71-93 (2019).
- [20] Yang, J., Chen, D., and Kitipornchai, S., "Buckling and Free Vibration Analyses of Functionally Graded Graphene Reinforced Porous Nanocomposite Plates Based on Chebyshev Ritz Method", *Composite Structures*, Vol. 193, pp. 281-294, (2018).

[21] Affdl, J.H., and Kardos, J., "The Halpin-Tsai Equations: A Review", Polymer Engineering and Science, Vol. 16, No. 5, pp. 344-352, (1976).

[22] Shu, C., and Richards, B.E., "Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 15, No. 7, pp. 791-798, (1992).

### فهرست نمادهای انگلیسی

$e_0^*, e_0$	ضرایب تاثیر تخلل در مدول مکانیکی
$e_m^*, e_m$	ضریب تاثیر تخلل در چگالی
$E_c$	مدول الاستیک موثر نانو کامپوزیت
$E_M$	ماتریس الاستیسیته مدول
$E_{GPL}$	گرافن الاستیسیته مدول
$E^*$	مدول یانگ ورق تقویت شده با گرافن و بدون تخلل
$f_{GPL}$	درصد حجمی گرافن
$G$	ماتریس فضای حالت
$G^*$	مدول برشی ورق تقویت شده با گرافن و بدون تخلل
$h$	ضخامت ورق
$L_{GPL}$	طول صفحات گرافن
$R_i$	شعاع داخلی ورق
$R_o$	شعاع خارجی ورق
$u_r, u_z$	مولفه های جابه جایی
$t_{GPL}$	ضخامت صفحات گرافن
$W_{GPL}$	عرض صفحات گرافن

### نمادهای یونانی

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	مولفه های تنش نرمال
$\tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta}$	مولفه های کرنش برشی
$\xi_L$	فاکتور هندسی طولی گرافن
$\xi_W$	فاکتور هندسی عرضی گرافن
$V_{GPL}$	کسر حجمی گرافن

- $\rho_{GPL}$  چگالی گرافن  
 $\rho_M$  چگالی ماتریس پلیمر  
 $\rho^*$  چگالی ورق تقویت شده با گرافن و بدون تخلل  
 $\alpha'$  ضریب تاثیر تخلل در چگالی  
 $\alpha$  ضریب تاثیر تخلل در مدول مکانیکی

پیوست

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{2(1+\nu)}{E} \\ \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} & -\frac{\nu}{r(1-\nu)} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial r} & a_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{E}{r(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{E}{r^2(1+\nu)}$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{R_o} \bar{g}_{ij} - \frac{h}{R_o} \frac{1}{\bar{r}} \\ 0 & 0 & -\frac{h}{R_o} \bar{g}_{ij} & \frac{2(1+\nu)}{\bar{E}} \\ \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\bar{E}(1-\nu)} & -\frac{h}{R_o} \frac{\nu}{\bar{r}(1-\nu)} - \frac{h}{R_o} \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{ij} & 0 & 0 \\ -\frac{h}{R_o} \frac{\nu}{1-\nu} \bar{g}_{ij} & \bar{a}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_1 = -\left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \bar{g}_{ij}^{(2)} - \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{\bar{r}(1-\nu^2)} \bar{g}_{ij} + \left(\frac{h}{R_o}\right)^2 \frac{\bar{E}}{\bar{r}^2(1+\nu)}$$

**Abstract**

Due to important role of composite materials in broad spectrum of applications, this paper focused on bending of a functionally graded graphene platelet reinforced composite porous circular/annular plates with various boundary conditions by employing state-space differential quadrature method (DQM). Equations of motion are established within the framework of theory of elasticity and are formulated along the thickness direction in the form of state-space. Applying DQM along the radial direction provides a semi-analytical solution to bending of the plate. The results of applying present approach are validated by comparing them with those reported in the literature. A thorough parametric investigation is conducted on the effects of different GPLs distributions integrated with various distribution patterns of internal porosity, thickness to radius ratio, graphene platelets (GPLs) weight fraction, porosity coefficient and edge boundary conditions on the bending behavior of FG-GPLRC circular/annular plates. The results reveal a very useful practical designing hint that locating more GPLs in the vicinity of the upper and bottom surfaces of the circular/annular plates with lower outer radius to thickness.