

تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی پیچیده شده تقویت شده با صفحات گرافن

در این مقاله، به بررسی ارتعاشات آزاد یک تیر کامپوزیتی پرداخته شده که دارای پیچش اولیه است به نحوی که یک انتهای تیر بدون پیچش و انتهای دیگر تیر دارای حداکثر زاویه پیچش می باشد. تیر در این تحقیق لایه ای بوده به نحوی که هر لایه با مقداری از صفحات گرافن تقویت شده است. لایه های مختلف مقادیر مختلفی تقویت کننده دارند که موجب ایجاد یک توزیع هدفمند خواهد شد. مدول الاستیسیته کامپوزیت با قانون هالپین-سای و دو خاصیت چگالی و ضریب پواسون به کمک قانون ساده مخلوط ها محاسبه شده اند. برای مدلسازی تیر از تئوری تیر تیموشنکو استفاده شده است. توابع شکل به کار رفته در روش ریتز از نوع توابع چبیشف انتخاب شده است. با استفاده از روش ریتز و توابع چبیشف فرم ماترسی معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد حاصل شده و از حل این معادلات به شکل یک مساله مقدار ویژه، فرکانس های طبیعی تیر پیچیده شده به عنوان نتایج حاصل از این تحقیق به دست آمده اند. این نتایج در ابتدا با مراجع دیگر به شکل های مختلف صحت سنجی شده است. سپس تاثیر پارامترهای مختلف همچون تعداد لایه های کامپوزیت، شرایط مرزی، زاویه پیچش، نرخ زاویه پیچش، کسر حجمی گرافن و نحوه چیدمان آنها بر روی ارتعاشات آزاد تیر مورد نظر بررسی شده است. نتایج این تحقیق به خوبی نشان می دهد که بالا رفتن کسر حجمی گرافن باعث بالاتر رفتن فرکانس های طبیعی تیر می شود به طوری که بالاترین فرکانس ها مربوط به الگوی توزیع $FG-X$ بوده و کمترین فرکانس های طبیعی در حالت $FG-O$ مشاهده می شود. اثر زاویه پیچش نیز بر روی فرکانس طبیعی تیر به شماره فرکانس بستگی دارد به طوری که با بالا رفتن نرخ زاویه پیچش، فرکانس های تیر ممکن است کاهش یا افزایش پیدا کنند.

سحر گودرزی

هفشجان^۱

کارشناسی ارشد

یاسر کیانی^۲

دانشیار

واژه های راهنما: تیر کامپوزیتی، تیر پیچیده شده، صفحات گرافن، رابطه هالپین-سای، روش ریتز، زاویه پیچش، توابع چبیشف

^۱ کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد sahargoudarzi1994@gmail.com

^۲ نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد y.kiani@sku.ac.ir

۱- مقدمه

تحلیل ارتعاشی یک سازه جزء پراهمیت‌ترین تحلیل‌ها در طراحی درست و اصولی یک سازه است چرا که اگر در تحلیل‌های دینامیکی و ارتعاشی یک سازه، فرکانس‌های طبیعی سازه در نظر گرفته نشوند امکان رخ دادن پدیده تشدید در آن وجود دارد که خسارات جبران ناپذیری را برای سازه مورد نظر در پی خواهد داشت. بررسی رفتار تیرها از اوایل قرن ۱۸ مورد توجه قرار گرفته است. برای تحلیل رفتار دینامیکی تیرها به جای استفاده مستقیم از تئوری الاستیسیته، معمولاً از تئوری‌هایی موسوم به تئوری‌های تیر، استفاده می‌شود. در این زمینه تعدادی تئوری وجود دارد که از آن‌ها برای نشان دادن سینماتیک تغییر شکل استفاده می‌شود. تیرهای پیچیده شده به عنوان یکی از عناصر مهم ساختاری، به طور گسترده‌ای در شاخه‌های مختلف صنایع مدرن مانند فناوری هوافضا، اتومبیل، دریایی و هسته‌ای و... استفاده شده است. در این نمونه تیرها سفتی و نسبت استحکام به وزن اصلی‌ترین ویژگی‌هایی هستند که استفاده از مواد مرسوم را در ساخت آنها محدود می‌کند. در سال‌های گذشته برای ساخت تیرهای پیچیده شده معمولاً از مواد کامپوزیت مرسوم متشکل از یک ماده زمینه تقویت شده با الیاف میکروسایز مانند شیشه، کولار و کربن استفاده می‌شده است. به هر حال همپنان تحقیقات برای بهبود رفتار مواد کامپوزیتی ادامه یافته است [۲۰]. گرافن و نانولوله‌های کربنی از جمله تقویت‌کننده‌هایی هستند که فقط در ابعاد نانومتری وجود دارند. این نانوپرکننده‌ها خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی فوق العاده‌ای در مقایسه با تقویت‌کننده‌های میکروسایز مرسوم دارند. از این رو استفاده از این نانوپرکننده‌ها می‌تواند موجب بهبود موثرتری در خواص نانوکامپوزیت‌ها شود. گرافن آخرین دسته از دگرشکل‌های کربن است که کشف شده است (در سال ۲۰۰۴) و به دلیل داشتن خواص منحصر به فرد مانند سطح ویژه خاص، استحکام مکانیکی و هدایت الکتریکی بالا، مقاومت بالا در برابر شکست (۱۲۵ گیگا پاسکال)، مدول یانگ بالا (حدود ۱۱۰۰ گیگا پاسکال) و... محققین را به انجام تحقیقات گسترده بر روی این مواد مجاب کرده است و به عنوان پرکننده‌ای با درصد حجمی نسبتاً پایین (حداکثر یک درصد) نسبت به سایر نانومواد، نتایج مشابهی را به دست می‌دهد. مواد کامپوزیتی علی‌رغم داشتن ویژگی‌های مطلوب حرارتی و مکانیکی، دارای معایبی نیز هستند. به همین خاطر دسته‌ای از کامپوزیت‌های پیشرفته، به نام مواد هدفمند معرفی می‌شوند که با ایجاد تغییرات تدریجی و پیوسته (از سطحی به سطح دیگر) در خصوصیات ماده، مشکلات ناشی از عدم پیوستگی در سازه‌های کامپوزیتی را برطرف می‌کنند.

تا کنون تحقیقات زیادی در زمینه مکانیک تیرها و صفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفات گرافن صورت گرفته است. یانگ^۱ و همکاران [۱] در سال ۲۰۱۷، رفتار کمانش و پس‌کمانش^۲ تیرهای نانوکامپوزیتی چندلایه تقویت شده با صفحات گرافن دارای توزیع هدفمند و مستقر بر روی یک بستر الاستیک را بررسی کردند. نتایج این بررسی نشان داده‌اند که نانو صفحات گرافن اثر تقویت‌کنندگی چشمگیری در کمانش و پس‌کمانش تیرهای نانو کامپوزیتی دارند و اثر این تقویت‌کنندگی برای الگوی توزیعی که در آن لایه‌های سطحی حاوی مقادیر بیشتری تقویت‌کننده هستند، بیشتر خواهد بود. وو^۳ و همکاران [۲] در سال ۲۰۱۷، بر روی ناپایداری دینامیکی تیرهای نانوکامپوزیتی چندلایه و تقویت شده با مقدار کمی از نانو صفحات گرافن دارای توزیع

¹ Yang² Postbuckling³ Wu

هدفمند تحت یک نیروی محوری پرئودیک در محیط حرارتی، مطالعاتی انجام دادند. مجموعه نتایج عددی این مطالعه نشان می‌دهد که الگویی با توزیع بیشتر صفحات گرافن در نزدیکی سطوح بالا و پایین می‌تواند به طرز موثرتری فرکانس طبیعی را افزایش و اندازه ناحیه ناپایدار را کاهش دهد. سانگ^۱ و همکاران [۳] در سال ۲۰۱۷، ویژگی‌های ارتعاشات آزاد و اجباری صفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن دارای توزیع هدفمند را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحه، بررسی کردند. در این مقاله مدول مؤثر یانگ توسط مدل اصلاح شده هالپین-سای^۲ تخمین زده شده و ضریب پواسون و تراکم جرمی توسط قانون مخلوط^۳ تعیین شده است. در این بررسی، مشخص شده است که پراکندگی بیشتر نانوصفحات گرافنی مربع شکل نزدیک سطوح بالا و پایین از موثرترین راه‌ها برای افزایش فرکانس طبیعی و کاهش قابل ملاحظه انحرافات دینامیکی است. ارتعاشات آزاد و کمانش الاستیک تیرهای نانوکامپوزیتی متخلخل تقویت شده با صفحات گرافن دارای توزیع هدفمند در سال ۲۰۱۷ توسط کیتیپورنچای^۴ و همکاران [۴] مورد مطالعه قرار گرفت. در این مقاله معادلات حاکم، بر اساس تئوری تیر تیموشینکو به دست آمده‌اند و روش ریتز روی آنها اعمال شده است. نتایج نشان می‌دهد سفتی موثر تیر نانوکامپوزیتی متخلخل هنگامی که شیوه توزیع تخلخل‌ها و نیز الگوی توزیع نانوصفحات گرافن به صورت غیریکنواخت و درعین حال متقارن باشد به بهترین نحو بهبود می‌یابد. ردی^۵ و همکاران [۵] در سال ۲۰۱۸، رفتار ارتعاشات آزاد صفحات (با سه نوع نازک و نسبتاً ضخیم و ضخیم) چند لایه کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن دارای توزیع هدفمند را مطالعه کردند. در این تحقیق از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بر اساس روش المان محدود استفاده شده است. نتایج این مطالعه نشان داده‌اند برای همه الگوهای توزیع و نیز همگی نسبت‌های طول به ضخامت نانوصفحات گرافن، درصد افزایش فرکانس طبیعی برای نانوصفحات مربعی شکل بیشتر از نوع مستطیلی شکل آن خواهد بود. عارفی و همکاران [۶] در سال ۲۰۱۸، ارتعاشات آزاد نانوصفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن دارای توزیع هدفمند واقع بر بستر پاسترناک را تجزیه و تحلیل کردند. بررسی‌های عددی نشان داده است که الگوی توزیع FG-X (نانوصفحات گرافن) موجب ایجاد حداکثر فرکانس طبیعی و افزایش تعداد لایه‌ها و نیز افزایش مقدار پارامتر غیرمحلّی منجر به کاهش فرکانس طبیعی نانوصفحات گرافن می‌شود. همچنین افزایش سفتی در فونداسیون منجر به افزایش چشمگیر فرکانس ساختار کامپوزیتی می‌شود. فنگ^۶ و همکاران [۷] در سال ۲۰۱۷، به پژوهش روی ارتعاشات آزاد غیرخطی یک تیر نانوکامپوزیتی چند لایه تقویت شده با نانوصفحات گرافن با توزیع هدفمند و غیریکنواخت پرداختند. در این پژوهش معادلات حاکم بر تیر بر اساس اصل همیلتون، تئوری تیر تیموشینکو و روابط کرنش-جابجایی فون-کارمن^۷ به دست آمده‌اند. مدول مؤثر یانگ توسط مدل میکرومکانیک هالپین-سای برای بررسی اثرات هندسه و ابعاد نانوصفحات تقویت کننده گرافنی، تخمین زده شده است. فرکانس و دامنه ارتعاشات تیر از روش ریتز به طور عددی به دست آمده‌اند. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که استفاده

¹ Song

² Halpin-Tsai

³ Rule of Mixtures

⁴ Kitipornchai

⁵ Reddy

⁶ Feng

⁷ Von Karman

از تعداد تک لایه‌های گرافنی کمتر با اندازه بزرگتر و الگویی با توزیع بیشتر تقویت کننده‌ها در نزدیکی سطح بالا و پایین تیر، مؤثرترین راه برای تقویت سفتی تیر و افزایش فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی تیر است. ارتعاش غیر خطی و کمانش دینامیکی صفحه ساندویچی متخلخل و تقویت شده با صفحات گرافن با توزیع هدفمند و مستقر بر روی یک بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک^۱ توسط لی^۲ و همکاران [۸] در سال ۲۰۱۸ مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. نتایج این تحقیق نشان داده است که وجود نانوصفحات گرافنی تقویت کننده به دلیل بهبود سفتی صفحه باعث افزایش بار کمانشی صفحه می‌شود. چن^۳ و همکاران [۹] در سال ۲۰۱۷، رفتارهای پس کمانش و ارتعاشات آزاد غیر خطی تیرهای نانو کامپوزیتی متخلخل چندلایه ساخته شده از فوم فلزی و تقویت شده با صفحات گرافن به صورت مدرج تابعی را بررسی کردند. از تئوری تیر تیموشینکو و مدل غیر خطی فون-کارمن برای ایجاد معادلات دیفرانسیل حاکم استفاده و روش ریتز برای حل آن‌ها به کار گرفته شده است. مطالعه اثر پارامترهای مختلف مثل کسر وزنی، الگوی توزیع، هندسه و اندازه صفحات تقویت کننده گرافنی، الگوهای مختلف توزیع تخلخل، ضریب تخلخل و شرایط مرزی نشان داده است که نانوصفحات گرافنی با افزایش فرکانس طبیعی (ارتعاشات غیرخطی) و بارهای پس کمانش، اثر تقویت کنندگی قابل توجهی روی تیرهای متخلخل ایجاد می‌کنند این در حالی است که افزایش ضریب تخلخل موجب کاهش فرکانس طبیعی و بارهای پس کمانش می‌شود. تأثیر کسر وزنی تقویت کننده‌ها برای الگوهای توزیع مختلف، متفاوت است. همچنین در الگویی با توزیع متقارن تقویت کننده‌ها و تخلخل‌ها می‌توان به بالاترین میزان سفتی تیر دست یافت. وو و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۱۸، به بررسی ناپایداری صفحات نانو کامپوزیت تقویت شده با گرافن داری توزیع هدفمند تحت یک نیروی درون صفحه‌ای پرپیوندیک تک محوره و نیز یک افزایش دمای یکنواخت، پرداختند. بررسی‌ها نشان داده است که افزودن مقدار کمی از نانوصفحات گرافن به طور قابل توجهی بار کمانش بحرانی و فرکانس‌های طبیعی را افزایش می‌دهد اما موجب کاهش اندازه ناحیه‌ی ناپایداری می‌شود. سهمانی و محمدی اقدم [۱۱] در سال ۲۰۱۸، به تجزیه و تحلیل ارتعاشات غیرخطی دامنه بزرگ و وابسته به اندازه‌ی نانوتیرهای چند لایه ساخته شده از مواد هدفمند و تقویت شده با صفحات گرافن پرداختند. در این تحقیق از مدل میکرومکانیکی هالپین-سای برای تخمین خواص مؤثر نانوتیر استفاده شده است. معادلات دیفرانسیلی حاکم بر حرکت به کمک اصل همیلتون به دست آمده‌اند و سپس با استفاده از روش بهبود یافته اغتشاشات هموتویی همراه با روش گالرکین به صورت تحلیلی برای به دست آوردن گرادیان کرنش غیر موضعی و فرکانس غیرخطی نانوتیر حل شده‌اند. ارتعاشات آزاد صفحات چند لایه کامپوزیتی به شکل چهارضلعی تقویت شده با نانوصفحات گرافن توسط گو^۴ و همکاران [۱۲] در سال ۲۰۱۸ با استفاده از روش ریتز با تقریب حداقل مربعات متحرک توسعه یافته جهت تشکیل توابع شکل و بررسی فرکانس‌های طبیعی، مطالعه گردید. نتایج این مطالعه نشان داده‌اند که نانوصفحات گرافن در مقایسه با نانولوله‌های کربنی، به طور چشمگیری باعث افزایش فرکانس طبیعی صفحات چهارضلعی شده‌اند. قادری و ابراهیمی [۱۳] در سال ۲۰۲۰، رفتار ارتعاشی صفحه کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن مستقر بر بستر ویسکوالاستیک را در محیط حرارتی مورد مطالعه قرار دادند.

¹ Winkler-Pasternak

² Li

³ Chen

⁴ Guo

در این بررسی مشخص شد که فرکانس طبیعی با افزایش کسر وزنی نانوصفحات گرافن افزایش می‌یابد و با افزایش تغییرات حرارتی کاهش پیدا می‌کند. همچنین افزایش نسبت طول به ضخامت صفحه موجب افزایش فرکانس طبیعی و کاهش عرض صفحه موجب کاهش آن می‌شود. پشم فروش [۱۴] در سال ۲۰۱۹، به تجزیه و تحلیل آماری روی رفتارهای ارتعاشات آزاد صفحات نانوکامپوزیتی تقویت شده با گرافن دارای توزیع هدفمند پرداخت. در این تحقیق تجزیه و تحلیل ارتعاشات آزاد با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر انجام شده است و نتایج حاصل از آن نشان می‌دهد دو پارامتر شرط مرزی و کسر حجمی نانوصفحات گرافن، بیشترین تاثیر را روی فرکانس طبیعی دارند. بررسی ارتعاشات اجباری تیرهای نانوکامپوزیتی تقویت شده با صفحات گرافن در محیط های حرارتی توسط براتی و شاهوردی [۱۵] در سال ۲۰۲۰ با روش المان محدود، انجام شده است. این بررسی نشان داده است که انحراف دینامیکی به طور قابل توجهی تحت تاثیر کسر وزنی و نوع نانوصفحات گرافن، تغییر دما، بستر الاستیک و فرکانس تحریک بار دینامیکی اعمال شده قرار می‌گیرد. شن^۱ و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۱۷، به مدل سازی و تجزیه و تحلیل ارتعاشات غیر خطی تیرهای چند لایه کامپوزیتی تقویت شده با گرافن دارای توزیع هدفمند و مستقر بر روی بستر الاستیک در محیط های حرارتی، پرداختند. نتایج عددی نشان داده‌اند که توزیع هدفمند تقویت کننده های گرافنی تاثیر قابل توجهی روی سفتی و فرکانس طبیعی تیرهای چند لایه کامپوزیتی دارد. یانگ و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۱۸، رفتار ارتعاشات آزاد و کماتش صفحات کامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانوصفحات گرافن دارای توزیع هدفمند را تحلیل کردند. نتایج حاصل از این تحقیق نشان داده است که تخلخل ها اثر تضعیف کنندگی و نانوصفحات گرافن اثر تقویت کنندگی دارند. به طوری که بارهای کماتش تک محوره، دو محوره و برشی و همچنین فرکانس اصلی با افزایش ضریب تخلخل کاهش می‌یابند در حالی که با افزایش کسر وزنی نانوصفحات گرافن به طور چشمگیری افزایش پیدا می‌کنند. همچنین وقتی تخلخل ها در سطح میانی و نانوصفحات گرافن در اطراف سطوح توزیع شده باشند، می‌توان به بالاترین سفتی خمشی برای صفحات نانوکامپوزیتی متخلخل تقویت شده دست یافت. بر روی تیرهای پیچیده شده نیز تحقیقاتی صورت گرفته است. بانرجی^۲ [۱۸] در سال ۲۰۰۱، ارتعاشات آزاد یک تیر پیچیده شده را با استفاده از روش سفتی دینامیکی تحلیل کرد و در سال ۲۰۰۴ [۱۹] نیز ماتریس سفتی دینامیکی را برای تحلیل ارتعاشات آزاد یک تیر پیچیده شده تیموشنکو، توسعه داد. قربانی شناس و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۱۶، به تجزیه و تحلیل ارتعاشات تیرهای کامپوزیتی پیچیده شده و تقویت شده با نانولوله های کربنی به صورت هدفمند در محیط حرارتی، پرداختند. معادلات حاکم بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر تیرها و با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما و تنش های حرارتی اولیه، به دست آمده‌اند. روش چبیشف-ریتز به عنوان یک روش نیمه تحلیلی مؤثر و قدرتمند برای استخراج فرکانس ویژه استفاده شده است. چند جمله ای های چبیشف همراه با توابع مرزی مناسب، به عنوان توابع قابل قبول در روش ریتز استفاده شده‌اند که این امکان را ایجاد می‌کنند تا مسائل با مجموعه شرایط مرزی مختلف قابل حل باشند. نتایج حاصل از این پژوهش نشان می‌دهند که با افزایش زاویه پیچش، صرف نظر از شرایط مرزی تیر، فرکانس اصلی تیر افزایش می‌یابد اما تاثیر آن روی فرکانس های مرتبه بالاتر به طور قابل توجهی به تعداد مود و شرایط

¹ Shen² Banerjee

مرزی تیر بستگی دارد. لیونگ^۱ [۲۱] در سال ۲۰۱۰، روی ارتعاشات تیرهای نازک هلیکال که دارای پیچش اولیه هستند، مطالعاتی انجام داد. چن و همکاران [۲۲] در سال ۲۰۱۳، به تجزیه و تحلیل ارتعاشات تیرهای تیموشنکو پیچیده شده دارای میرایی داخلی کلوین-ویت^۲ پرداختند. در این مقاله با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و با اعمال اصل همیلتون، معادلات حرکت تیر پیچیده شده در یک دستگاه مختصات پیچشی به دست آمده و از آن برای مطالعه اثرات زاویه پیچش، میرایی داخلی و نوع تکیه‌گاه روی فرکانس ویژه تیرهای پیچیده شده استفاده شد. نتایج این مطالعات نشان داده‌اند که افزایش میرایی کلوین-ویت، بدون توجه به مقدار زاویه پیچش، موجب افزایش میرایی و کاهش فرکانس‌های ویژه سیستم می‌گردد. مدل‌سازی دینامیکی و بررسی ویژگی‌های کوپلینگ چرخش تیرهای شیب‌دار با مقطع پیچیده شده توسط زنگ^۳ و همکاران [۲۳] در سال ۲۰۲۰ انجام شده است. در این مقاله برای مدل‌سازی دینامیکی از اصل همیلتون و نیز تئوری تیر تیموشنکو استفاده شده است. اوندرا^۴ و تیتوروس^۵ [۲۴] در سال ۲۰۱۹، ارتعاشات یک تیر پیچیده شده دوار تحت بارگذاری محوری ناشی از تاندون^۶ را تحلیل و بررسی کردند. در این پژوهش معادلات حرکت سیستم تیر-تاندون با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل معرفی و با استفاده از ترکیب مسأله مقدار مرزی و روش کوادراتور دیفرانسیلی حل شده‌اند تا فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها به دست آیند.

همان‌گونه که بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد تاکنون به طور خاص تحقیقی بر روی ارتعاشات آزاد تیرهای تقویت شده با گرافن که دارای اثر پیچیدگی اولیه نیز باشند، انجام نشده است. تحقیق حاضر به بررسی پاسخ‌های ارتعاشات آزاد تیرهای پیچیده شده کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن خواهد پرداخت. همچنین سعی بر آن است که الگوهای مختلف توزیع نانوصفحات گرافن در کامپوزیت را با یکدیگر مقایسه کرده تا بهترین الگوی برای شرایط مختلف یافت شود.

۲- معادلات پایه

در تحقیق حاضر، رفتار ارتعاشی یک تیر کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با صفحات گرافن که دارای پیچش اولیه هست، مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض بر آن است که طول تیر برابر با L ، ضخامت تیر h و پهنای تیر نیز برابر با b باشد.

۲-۱- محاسبه خواص یک نانوکامپوزیت

تیر مورد بررسی از "لایه‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن" تشکیل شده است. تمامی این لایه‌ها دارای ضخامت یکسان بوده و کاملاً به هم چسبیده شده‌اند. هر لایه ترکیبی از زمینه پلیمری ایزوتروپیک و تقویت کننده‌های گرافنی است. همچنین فرض بر این است که نانوصفحات گرافنی به طور یکنواخت و با جهت‌گیری‌های تصادفی در هر لایه درون ماده زمینه پراکنده شده‌اند. اما کسر حجمی تقویت کننده‌ها از

¹ Leung

² Kelvin-Voigt

³ Zeng

⁴ Ondra

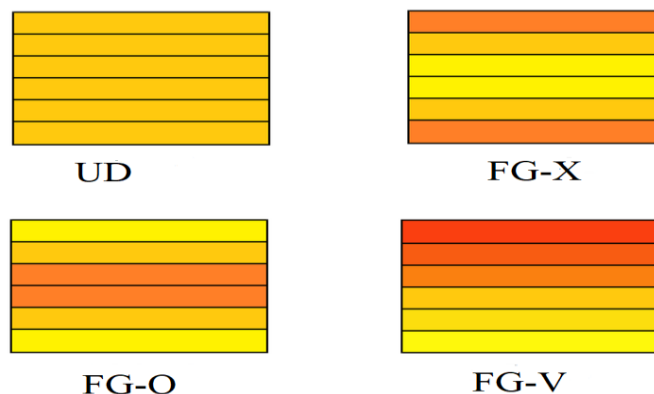
⁵ Titurus

⁶ tendon-induced axial loading

لایه‌ای به لایه دیگر متفاوت است. از این رو هر لایه از تیر کامپوزیتی مورد بررسی، ایزوتروپیک و همگن است پس می‌توان خواص لایه‌ها را با تحلیل‌های میکرومکانیکی تخمین زد که دارای فرض‌های ساده کننده‌ای هستند. در این پژوهش به منظور محاسبه‌ی خواص مکانیکی لایه‌های تشکیل دهنده از مدل میکرومکانیک هالپین-سای استفاده می‌شود. به سبب اینکه هر لایه دارای مقادیر متفاوتی از تقویت کننده می‌باشد، یک تیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع هدفمند صفحات گرافن به دست می‌آید. چهار الگوی مختلف توزیع برای نانوصفحات تقویت کننده گرافنی در سراسر ضخامت تیر در نظر گرفته شده است. این چهار الگو که به صورت شماتیک در شکل (۱) نشان داده شده‌اند، عبارتند از: UD, FG - X, FG - O, FG - V. در مدل UD، هر لایه دارای مقدار یکسانی از تقویت کننده می‌باشد. در مدل FG - X، لایه‌های بالایی و پایینی دارای بیشترین مقدار تقویت کننده هستند. اما مدل FG - O، الگویی کاملاً متضاد با مدل FG - X دارد. زیرا با نزدیکتر شدن به لایه‌های میانی، مقدار تقویت کننده افزایش پیدا می‌کند. در مدل FG - V، بالاترین لایه دارای بیشترین مقدار تقویت کننده می‌باشد که این مقدار با نزدیک شدن به پایین‌ترین لایه کاهش می‌یابد. برای تیر چند لایه کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن دارای توزیع هدفمند، کسر حجمی (V_{GPL}) برای لایه k ام و نیز برای چهار الگوی مختلف توزیع به قرار زیر است [۲]:

$$\begin{aligned} \text{UD: } V_{GPL}^{(k)} &= V_{GPL}^* \\ \text{FG - X: } V_{GPL}^{(k)} &= 2V_{GPL}^* \frac{|2k - N_L - 1|}{N_L} \\ \text{FG - O: } V_{GPL}^{(k)} &= 2V_{GPL}^* \left(1 - \frac{|2k - N_L - 1|}{N_L} \right) \\ \text{FG - V: } V_{GPL}^{(k)} &= V_{GPL}^* \frac{2k - 1}{N_L} \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه (۱)، $V_{GPL}^{(k)}$ نشان دهنده‌ی درصد حجمی نانوصفحات گرافن و k شماره هر لایه است به طوری که $k = 1, 2, 3, \dots, N_L$ می‌باشد. و N_L نیز تعداد کل لایه‌های تیر را نشان می‌دهد و همچنین V_{GPL}^* درصد حجمی نانوصفحات گرافن را در کل مقطع تیر مشخص می‌کند.



شکل ۱- شماتیک نحوه توزیع هدفمند تقویت کننده نانو در کامپوزیت لایه‌ای [۱۱]

می‌توان ثابت نمود که مقدار کل درصد حجمی نانوصفحات گرافن در مقطع تیر در هر چهار مدل، یکسان و مساوی با V_{GPL}^* خواهد بود. V_{GPL}^* نیز توسط رابطه (۲) محاسبه می‌شود [۲]:

$$V_{GPL}^* = \frac{W_{GPL}}{W_{GPL} + \frac{\rho_{GPL}}{\rho_m} (1 - W_{GPL})} \quad (2)$$

در رابطه (۲)، W_{GPL} کسر وزنی نانوصفحات گرافن است و ρ_{GPL} و ρ_m نیز به ترتیب چگالی جرمی تقویت کننده گرافن و چگالی جرمی ماده‌ی زمینه را مشخص می‌کنند. از آنجایی که هر لایه از تیر کامپوزیتی معرفی شده در صد حجمی متفاوتی از نانو صفحات گرافنی را به عنوان تقویت کننده دارا می‌باشد، پس خواص مکانیکی نیز در هر لایه از تیر متفاوت بوده و باید به طور جداگانه محاسبه شود. در این جا از مدل میکرومکانیکی هالپین-سای جهت تعیین مدول الاستیسیته هر لایه از تیر کامپوزیتی استفاده شده است و مدول الاستیسیته هر لایه از تیر کامپوزیتی با رابطه (۳) محاسبه می‌گردد [۱۱]:

$$E^{(k)} = \frac{3}{8} \frac{1 + \xi_L \eta_L V_{GPL}^{(k)}}{1 - \eta_L V_{GPL}^{(k)}} E_m + \frac{5}{8} \frac{1 + \xi_T \eta_T V_{GPL}^{(k)}}{1 - \eta_T V_{GPL}^{(k)}} E_m \quad (3)$$

در رابطه (۳) ضریب E_m مدول الاستیسیته ماده زمینه پلیمری است. V_{GPL} بیانگر مقدار درصد حجمی نانوصفحات گرافن است و مقدارش با توجه به الگوی توزیعی که برای تقویت کننده در هر لایه نظر گرفته می‌شود، متفاوت خواهد بود. ضریب طولی η_L و ضریب عرضی η_T که در رابطه (۳) مشاهده می‌شوند در قالب روابط (۴) قابل بیان می‌باشند [۱۲].

$$\eta_L = \frac{E_{GPL} - E_m}{E_{GPL} + \xi_L E_m} \quad (4)$$

$$\eta_T = \frac{E_{GPL} - E_m}{E_{GPL} + \xi_T E_m}$$

مقدار کمیت E_{GPL} بیانگر مدول الاستیسیته نانوصفحات گرافن است. همچنین دو پارامتر ξ_L و ξ_T مربوط به هندسه و ابعاد تقویت کننده نانو هستند و برحسب ابعاد نانوصفحات گرافن به صورت زیر ارائه می‌شوند [۱۲].

$$\xi_L = 2 \frac{a_{GPL}}{t_{GPL}} \quad (5)$$

$$\xi_T = 2 \frac{b_{GPL}}{t_{GPL}}$$

در رابطه (۵) پارامترهای a_{GPL} ، b_{GPL} و t_{GPL} به ترتیب بیانگر طول، عرض و ضخامت نانوصفحات گرافن (تقویت کننده) می‌باشند. برای محاسبه‌ی چگالی و ضریب پواسون تیر کامپوزیتی از قانون مخلوط‌ها به شرح زیر استفاده می‌گردد [۱۱]:

$$\begin{aligned} v^{(k)} &= v_m V_m^{(k)} + v_{GPL} V_{GPL}^{(k)} \\ \rho^{(k)} &= \rho_m V_m^{(k)} + \rho_{GPL} V_{GPL}^{(k)} \end{aligned} \quad (۶)$$

در رابطه‌ی (۶)، v_m ضریب پواسون ماده زمینه و v_{GPL} ضریب پواسون تقویت کننده نانو هستند. همچنین در این رابطه نماد ρ_m ، چگالی جرمی ماده زمینه و نماد ρ_{GPL} ، چگالی جرمی تقویت کننده نانو را مشخص می‌کنند. رابطه کسر حجمی ماده زمینه و کسر حجمی تقویت کننده نیز به صورت زیر است [۲]:

$$V_m + V_{GPL} = 1 \quad (۷)$$

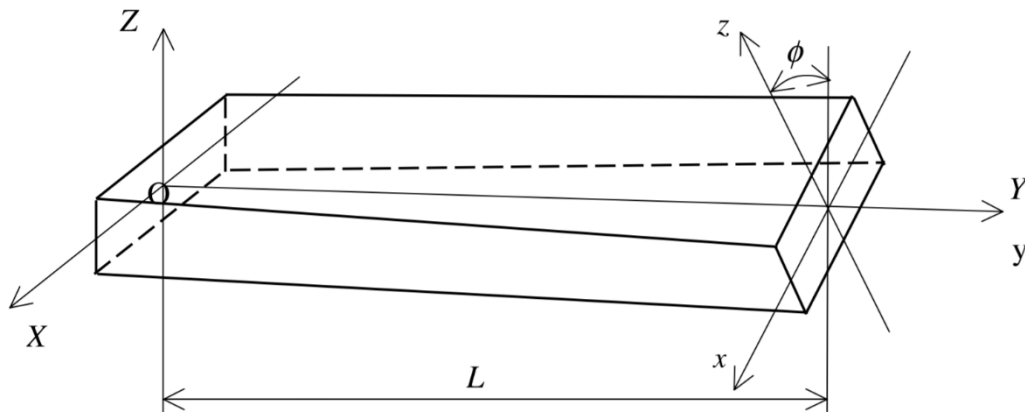
۲-۲- استخراج روابط مربوط به تیر پیچیده شده

تیر مورد بررسی، یک تیر کامپوزیتی پیچیده شده با N_L لایه است که توسط نانو صفحات گرافن تقویت شده است. دستگاه مختصات راستگرد در وسط تیر و روی لایه میانی آن در نظر گرفته شده است. یعنی مختصات طولی تیر از $-L/2$ تا $+L/2$ می‌باشد.

در شکل (۲) شماتیک یک تیر پیچیده شده به طول L در دستگاه مختصات دکارتی راستگرد نشان داده شده است. دستگاه مختصات مرجع XYZ در وسط تیر روی لایه میانی در نظر گرفته می‌شود. و دستگاه مختصات محلی xyz نیز که در نتیجه پیچش تیر ایجاد شده است در انتهای سمت راست تیر در نظر گرفته شده است. محورهای Y و y برهم منطبق، عمود بر مقطع تیر و نشان دهنده‌ی محور پیچش هستند. نرخ پیچش در طول تیر نیز K فرض می‌شود. با این فرض که پیچش در تیر با Φ نشان داده شود، نرخ پیچش در طول تیر به صورت زیر قابل محاسبه است. در این رابطه y راستای طول تیر است.

$$K = \frac{d\Phi}{dy} \quad (۸)$$

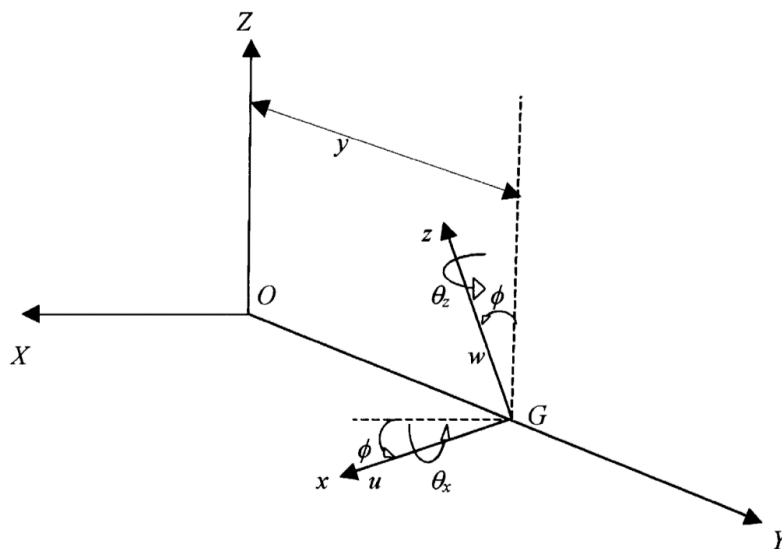
استخراج معادلات دیفرانسیل حرکت یک تیر پیچیده شده تحت ارتعاشات آزاد، از پیچیدگی قابل توجهی برخوردار است. به ویژه زمانی که اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی نیز در نظر گرفته شده است. در اینجا برای استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت یک تیر تیموشنکو پیچیده شده با ارتعاشات آزاد، از اصل همیلتون استفاده شده است.



شکل ۲- شماتیک تیر پیچیده شده تیموشنکو در دستگاه مختصات مرجع و محلی راستگرد دکارتی [۱۸]

نقطه $O(X, Y, Z)$ مبدأ دستگاه مختصات مرجع است و OY بدون انحرف از سطح مقطع عبور می کند. نقطه G روی $Y = y$ در نظر گرفته می شود. Gx و Gy محورهای اصلی (مختصات محلی) در خمش مقطع هستند. سیستم مختصات دو بعدی در سطح مقطع تیر توسط $G(x, Z)$ ارائه شده است که یک چرخش راستگرد Φ حول OY دارد. بنابراین زاویه بین Gx و Ox (و همچنین بین GZ و OZ)، Φ است که در شکل (۳) نیز نشان داده شده است. زاویه پیچش Φ ، در طول تیر متغیر در نظر گرفته شده است و به صورت توانی به شکل زیر در حال تغییر است. همانگونه که از این رابطه مشخص است در ابتدای تیر پیچش در نظر گرفته نشده است حال آنکه در انتهای تیر پیچش برابر با Φ_0 است. به کمک توان S نرخهای متنوعی از زاویه پیچش به دست خواهد آمد.

$$\Phi = \Phi_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{L} \right)^S \quad (9)$$



شکل ۳- جابه جاییها و چرخشهای مرکز G در فاصله y از مبدأ تیر پیچیده شده تیموشنکو در مختصات محلی [۱۸]

۱-۲-۲- بیان کرنش‌های برشی نرمال و انرژی کرنشی ناشی از آنها

برای بررسی ارتعاشات تیر مورد نظر، ابتدا باید میدان جابه‌جایی تعریف شود. از تئوری مرتبه اول یا تئوری تیر تیموشنکو برای تعریف میدان جابه‌جایی استفاده شده است. چون در تیرها بعد طول در مقایسه با دو بعد دیگر بیشتر است پس جابه‌جایی طولی مهم‌تر از دو نوع دیگر خواهد بود. جابه‌جایی‌های محلی در راستای Gx با u ، در راستای Gz با w و در راستای y با v نمایش داده می‌شوند. ترم‌های جابه‌جایی در راستای Gx و Gz به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۸].

$$U = u + \frac{\partial u}{\partial y} dy + w \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \quad (10)$$

$$W = \left(-u \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy\right) + w + \frac{\partial w}{\partial y} dy \quad (11)$$

کرنش برشی به عنوان کاهش زاویه قائمه در یک صفحه تعریف می‌شود. عبارات نهایی برای کرنش‌های برشی γ_{xy} و γ_{zy} به صورت زیر خواهند بود [۱۸]:

$$\gamma_{xy} = \psi + \frac{\partial u}{\partial y} + Kw \quad (12)$$

$$\gamma_{zy} = -\theta + \frac{\partial w}{\partial y} - Ku \quad (13)$$

در روابط فوق زوایای θ و ψ به ترتیب چرخش سطح مقطع را حول محورهای x و z مشخص می‌کنند و برای اصلاح کرنش‌های برشی در نظر گرفته می‌شوند. پس از تعریف روابط کرنش‌های برشی برای تیر پیچیده شده، اکنون می‌توان انرژی کرنشی مجازی δU_S را که ناشی از برش عرضی است، به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned} \delta U_S &= \iiint_V (K_S \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + K_S \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dy \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} \iint_A \{K_S Q_{66} \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + K_S Q_{44} \gamma_{yz} \delta \gamma_{yz}\} dA dy \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} \iint_A \left\{ K_S Q_{66} \left(\psi + \frac{\partial u}{\partial y} + Kw \right) \left(\delta \psi + \delta \frac{\partial u}{\partial y} + K \delta w \right) \right. \\ &\quad \left. + K_S Q_{44} \left(-\theta + \frac{\partial w}{\partial y} - Ku \right) \left(-\delta \theta + \delta \frac{\partial w}{\partial y} - K \delta u \right) \right\} dA dy \end{aligned} \quad (14)$$

در رابطه (۱۴) ضریب K_S بیانگر ضریب اصلاح برش است. این ضریب اصولاً به پارامترهای مختلفی همچون، هندسه تیر، جنس تیر، شرایط مرزی و نوع بارگذاری وابسته است. استفاده از این ضریب به دلیل کم کردن تقریب مربوط به فرض ثابت بودن کرنش برشی در راستای ضخامت است. هر چند برای سادگی این ضریب معمولاً برابر با ۰.۸۳۳ در نظر گرفته می‌شود که در تحقیق حاضر نیز از همین مقدار استفاده شده است. همچنین به شکل رایج مؤلفه‌های تنش برشی با σ_{xy} و σ_{yz} نشان داده شده‌اند. دو سفتی برشی Q_{44} و Q_{66} نیز همان مدول برشی تیر هستند که به راحتی بر حسب ضریب پواسون و مدول الاستیسیته قابل محاسبه می‌باشند. جابه‌جایی محوری در جهت y ، و به دنبال آن کرنش نرمال ε_y نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۸]:

$$\begin{aligned} V &= -(z + Kx dy) \left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy \right) + (x - Kz dy) \left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) \\ &= -z\theta + x\psi + \left(-Kx\theta - z \frac{\partial \theta}{\partial y} - Kz\psi + x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy \end{aligned} \quad (15)$$

$$\varepsilon_{yy} = v - Kx\theta - z \frac{\partial \theta}{\partial y} - Kz\psi + x \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (16)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۱۶) اکنون انرژی کرنشی مجازی تیر به صورت زیر قابل بیان است.

$$\begin{aligned} \delta U_B &= \iiint_V \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} dV = \int_{-L/2}^{L/2} \iint_A Q_{11} \varepsilon_{yy} \delta \varepsilon_{yy} dA dy \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} \iint_A \left[Q_{11} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - Kx\theta - z \frac{\partial \theta}{\partial y} - Kz\psi + x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - Kx\delta\theta - z\delta \frac{\partial \theta}{\partial y} - Kz\delta\psi + x\delta \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] dA dy \end{aligned} \quad (17)$$

۲-۲-۲- انرژی کرنشی کل ناشی از کرنش‌های خمشی و برشی

به منظور تعیین انرژی کرنشی کل، انرژی‌های کرنشی برشی و نرمال، از روابط (۱۴) و (۱۷) با یکدیگر جمع بسته می‌شوند. اما قبل از آن متغیرهای کمکی که در رابطه (۱۷) تعریف شده‌اند، در جهت ساده سازی رابطه انرژی کرنشی، به کار گرفته می‌شوند و نهایتاً رابطه انرژی کرنشی کل مطابق رابطه (۲۰) خواهد بود.

$$D_{ij} = \iint_A Q_{11} x^i z^j dA \quad (18)$$

$$E_{ij} = \iint_A K_s Q_{66} x^i z^j dA$$

$$F_{ij} = \iint_A K_s Q_{44} x^i z^j dA$$

که در روابط بالا:

$$Q_{44} = Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$Q_{11} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (19)$$

$$\delta U = \delta U_s + \delta U_B$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \left\{ D_{00} \frac{\partial v}{\partial y} \delta \frac{\partial v}{\partial y} + D_{10} \frac{\partial v}{\partial y} \delta \frac{\partial \psi}{\partial y} - D_{10} K \frac{\partial v}{\partial y} \delta \theta \right. \\ &- D_{01} K \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} - D_{01} K \frac{\partial v}{\partial y} \psi + D_{10} \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \frac{\partial v}{\partial y} + D_{20} \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &- D_{20} K \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \theta - D_{11} \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \frac{\partial \theta}{\partial y} - D_{11} K \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \psi - D_{10} K \theta \delta \frac{\partial v}{\partial y} \\ &- D_{20} K \theta \delta \frac{\partial \psi}{\partial y} + D_{20} K^2 \theta \delta \theta + D_{11} K \theta \delta \frac{\partial \theta}{\partial y} + D_{11} K^2 \theta \delta \psi \\ &- D_{01} \frac{\partial \theta}{\partial y} \delta \frac{\partial v}{\partial y} - D_{11} \frac{\partial \theta}{\partial y} \delta \frac{\partial \psi}{\partial y} + D_{11} K \frac{\partial \theta}{\partial y} \delta \theta + D_{02} \frac{\partial \theta}{\partial y} \delta \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &+ D_{02} K \frac{\partial \theta}{\partial y} \delta \psi - D_{01} K \psi \delta \frac{\partial v}{\partial y} - D_{11} K \psi \delta \frac{\partial \psi}{\partial y} + D_{11} K^2 \psi \delta \theta \\ &+ D_{02} K \psi \delta \frac{\partial \theta}{\partial y} + D_{02} K^2 \psi \delta \psi + E_{00} \psi \delta \psi + E_{00} \psi \delta \frac{\partial u}{\partial y} \\ &+ E_{00} K \psi \delta w + E_{00} \frac{\partial u}{\partial y} \delta \psi + E_{00} \frac{\partial u}{\partial y} \delta \frac{\partial u}{\partial y} + E_{00} K \frac{\partial u}{\partial y} \delta w \\ &+ E_{00} K w \delta \psi + E_{00} K w \delta \frac{\partial u}{\partial y} + E_{00} K^2 \frac{\partial w}{\partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial y} + F_{00} \theta \delta \theta \\ &- F_{00} \theta \delta \frac{\partial w}{\partial y} + F_{00} K \psi \delta u - F_{00} \frac{\partial w}{\partial y} \delta \theta + F_{00} \frac{\partial w}{\partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial y} \\ &\left. - F_{00} K \frac{\partial w}{\partial y} \delta u + F_{00} K u \delta \theta - F_{00} K u \delta \frac{\partial w}{\partial y} + F_{00} K^2 \frac{\partial u}{\partial y} \delta \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dy \quad (20) \end{aligned}$$

۳-۲-۲- بیان انرژی جنبشی

انرژی جنبشی تیر پیچیده شده تیموشنکو را می‌توان از روی سرعت فرمول بندی کرد. با گرفتن مشتق زمانی از جابه‌جایی‌ها، در جهت‌های Gx و Gy و Gz ، مولفه‌های سرعت به دست می‌آیند. واضح است که سرعت در جهت‌های Gx و Gy و Gz ، به ترتیب \dot{u} ، $\dot{v} + x\dot{\psi} - z\dot{\theta}$ و \dot{w} هستند. بنابراین انرژی جنبشی T ، برای تیر پیچیده شده مطابق رابطه (۲۱) خواهد بود.

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \{ \dot{u}^2 + (\dot{v} + x\dot{\psi} - z\dot{\theta})^2 + \dot{w}^2 \} dV \quad (21)$$

در رابطه (۲۱)، پارامتر ρ ، چگالی مواد تیر است. به منظور ساده سازی رابطه (۲۱)، متغیر کمکی مطابق رابطه (۲۲)، تعریف می‌شود و نهایتاً رابطه ساده شده انرژی جنبشی تیر پیچیده شده تیموشنکو طبق رابطه (۲۳) خواهد بود.

$$I_{ij} = \iint_A \rho z^i y^j dA \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \delta T = \int_{-L/2}^{L/2} \{ & I_{00}(\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}) + I_{10}(\dot{v}\delta\dot{\psi} + \dot{\psi}\delta\dot{v}) + I_{20}\dot{\psi}\delta\dot{\psi} \\ & - I_{01}(\dot{v}\delta\dot{\theta} + \dot{\theta}\delta\dot{v}) + I_{02}\dot{\theta}\delta\dot{\theta} - I_{11}(\dot{\theta}\delta\dot{\psi} + \dot{\psi}\delta\dot{\theta}) \} dy \end{aligned} \quad (23)$$

۳-۲- کاربرد اصل همیلتون

در این پژوهش از روش ریتز همراه با اصل همیلتون برای دستیابی به مقادیر ویژه فرکانس معادلات ارتعاشات آزاد استفاده شده است. برای تحلیل ارتعاشات آزاد، اصل همیلتون طبق رابطه (۲۴) تعریف می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T) dt = 0 \quad (24)$$

در رابطه (۲۴)، t_1 و t_2 دو زمان دلخواه و δ اوپراتور وریشنال است. T و U نیز به ترتیب انرژی‌های کرنشی و جنبشی هستند.

با در نظر گرفتن این موضوع که تغییرات انرژی جنبشی باید در اصل همیلتون قرار بگیرد به عنوان مثال برای جمله اول انتگرال بالا و با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2} I_{00} \dot{u} \delta \dot{u} dt = I_{00} \dot{u} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} I_{00} \ddot{u} \delta u dt \quad (25)$$

جمله اول در سمت راست تساوی بالا با مراجعه به شرط مکمل همیلتون برابر با صفر است. این شرط بیان می‌کند که تغییرات کلیه متغیرهای اساسی در دو زمان ابتدایی و انتهایی برابر با صفر است. با اعمال شرایط مشابهی به سایر جملات انتگرال (۲۳)، در نهایت تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر قابل بیان است.

$$\delta T = \int_{-L/2}^{L/2} \{-I_{00}(\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w) - I_{10}(\ddot{v}\delta\psi + \ddot{\psi}\delta v) - I_{20}\ddot{\psi}\delta\psi + I_{11}(\ddot{\theta}\delta\psi + \ddot{\psi}\delta\theta) + I_{01}(\ddot{v}\delta\theta + \ddot{\theta}\delta v) - I_{02}\ddot{\theta}\delta\theta\} dy \quad (26)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها وابستگی زمانی و مکانی هر یک از کمیت‌ها به صورت زیر تفکیک می‌شود.

$$\begin{aligned} u(y, t) &= \sum_{m=1}^N U_m(t) N_m^u(y) \\ v(y, t) &= \sum_{m=1}^N V_m(t) N_m^v(y) \\ w(y, t) &= \sum_{m=1}^N W_m(t) N_m^w(y) \\ \theta(y, t) &= \sum_{m=1}^N \theta_m(t) N_m^\theta(y) \\ \psi(y, t) &= \sum_{m=1}^N \psi_m(t) N_m^\psi(y) \end{aligned} \quad (27)$$

در رابطه (۲۷)، N_m^α ($\alpha = u, v, w, \theta, \psi$)، توابع شکل هستند که توسط چند جمله‌ای‌های چبیشف در شرایط مرزی هندسی مختلف تعریف می‌شوند. پارامتر N ، تعداد جملات لازم برای دست یافتن به همگرایی مناسب در جواب نهایی است که از طریق آزمون و خطا مشخص خواهد شد.

پایه توابع شکل به کار رفته بر مبنای چند جمله‌ای‌های چبیشف است. توابع چبیشف توابعی متعامد هستند که در بازه $[-1, 1]$ تعریف می‌شوند. ضمناً ویژگی مهم دیگری که در مورد این توابع باید گفت آن است که این توابع در دو انتهای بازه غیر صفر هستند. این خاصیت کمک ویژه‌ای به انتخاب توابع شکل می‌کند. با توجه به آنکه مختصات فیزیکی مساله در بازه $[-0.5L, +0.5L]$ است می‌توان گفت که توابع چبیشف مسأله حاضر به صورت زیر هستند.

$$T_n(y) = \cos \left((n-1) \cos^{-1} \left(\frac{2y}{L} \right) \right) \quad (28)$$

در تحقیق حاضر سه نوع شرط مرزی در نظر گرفته شده است که عبارتند از شرط مرزی ساده، شرط مرزی گیردار و شرط مرزی آزاد. انتخاب توابع شکل در روش ریتز به شدت به شرایط مرزی مسأله و آن هم نوع شرط مرزی اساسی بستگی دارد. برای سه نوع شرط مرزی یاد شده شرایط مرزی اساسی به قرار زیر هستند.

$$C: u = v = w = \theta = \psi = 0$$

$$S: u = v = w = 0 \quad (29)$$

$$F: -$$

همانطور که گفته شد سه نوع شرط مرزی برای دو انتهای تیر در نظر گرفته شده است که عبارتند از تیر دو سر ساده، تیر دو سر گیردار و تیر یک سر گیردار. با توجه به شرایط مرزی گفته شده و این خاصیت از توابع چبیشف که در دو انتها صفر نیستند توابع شکل برای هر حالت مطابق جدول (۱) خواهد بود. با مشخص بودن توابع شکل و قرار دادن مجموعه روابط (۲۷)، در رابطه (۲۴) و انتگرال گیری بر روی توابع شکل و مشتقات آنها نتیجه اصل همیلتون تنها بر حسب زمان خواهد بود. به عنوان مثال یکی از جملات اصل همیلتون به شکل زیر خواهد بود.

جدول ۱- توابع شکل مناسب روش ریتز برای انواع شرایط مرزی

شرط مرزی	C - C	C - F	S - S
$N_m^u(y)$	$\left(1 + \frac{2y}{L}\right) \left(1 - \frac{2y}{L}\right) T_n(y)$	$\left(1 + \frac{2y}{L}\right) T_n(y)$	$\left(1 + \frac{2y}{L}\right) \left(1 - \frac{2y}{L}\right) T_n(y)$
$N_m^v(y)$	$\left(1 + \frac{2y}{L}\right) \left(1 - \frac{2y}{L}\right) T_n(y)$	$\left(1 + \frac{2y}{L}\right) T_n(y)$	$\left(1 + \frac{2y}{L}\right) \left(1 - \frac{2y}{L}\right) T_n(y)$
$N_m^w(y)$	$\left(1 + \frac{2y}{L}\right) \left(1 - \frac{2y}{L}\right) T_n(y)$	$\left(1 + \frac{2y}{L}\right) T_n(y)$	$\left(1 + \frac{2y}{L}\right) \left(1 - \frac{2y}{L}\right) T_n(y)$
$N_m^\theta(y)$	$\left(1 + \frac{2y}{L}\right) \left(1 - \frac{2y}{L}\right) T_n(y)$	$\left(1 + \frac{2y}{L}\right) T_n(y)$	$T_n(y)$
$N_m^\psi(y)$	$\left(1 + \frac{2y}{L}\right) \left(1 - \frac{2y}{L}\right) T_n(y)$	$\left(1 + \frac{2y}{L}\right) T_n(y)$	$T_n(y)$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{-L/2}^{L/2} D_{00} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \delta \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{-L/2}^{L/2} D_{00} \left(\sum_{m=1}^N U_m(t) \frac{dN_m^u(y)}{dy} \right) \left(\delta \sum_{n=1}^N U_n(t) \frac{dN_n^u(y)}{dy} \right) dy dt \quad (30)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{-L/2}^{L/2} D_{00} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N U_m(t) \frac{dN_m^u(y)}{dy} \frac{dN_n^u(y)}{dy} dy dt$$

با اعمال شرایط مشابهی به سایر جملات انتگرال (۲۴)، در نهایت با مرتب و فشرده سازی، برحسب ماتریس‌های جرم و سفتی به صورت زیر قابل بیان هستند.

$$\begin{bmatrix} [M^{VV}] & [M^{VU}] & [M^{VW}] & [M^{V\theta}] & [M^{V\psi}] \\ [M^{VU}]^T & [M^{UU}] & [M^{UW}] & [M^{U\theta}] & [M^{U\psi}] \\ [M^{VW}]^T & [M^{UW}]^T & [M^{WW}] & [M^{W\theta}] & [M^{W\psi}] \\ [M^{V\theta}]^T & [M^{U\theta}]^T & [M^{W\theta}]^T & [M^{\theta\theta}] & [M^{\theta\psi}] \\ [M^{V\psi}]^T & [M^{U\psi}]^T & [M^{W\psi}]^T & [M^{\theta\psi}]^T & [M^{\psi\psi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{V}\} \\ \{\dot{U}\} \\ \{\dot{W}\} \\ \{\dot{\theta}\} \\ \{\dot{\psi}\} \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} [K^{VV}] & [K^{VU}] & [K^{VW}] & [K^{V\theta}] & [K^{V\psi}] \\ [K^{VU}]^T & [K^{UU}] & [K^{UW}] & [K^{U\theta}] & [K^{U\psi}] \\ [K^{VW}]^T & [K^{UW}]^T & [K^{WW}] & [K^{W\theta}] & [K^{W\psi}] \\ [K^{V\theta}]^T & [K^{U\theta}]^T & [K^{W\theta}]^T & [K^{\theta\theta}] & [K^{\theta\psi}] \\ [K^{V\psi}]^T & [K^{U\psi}]^T & [K^{W\psi}]^T & [K^{\theta\psi}]^T & [K^{\psi\psi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{V\} \\ \{U\} \\ \{W\} \\ \{\theta\} \\ \{\psi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

درایه‌های ماتریس‌های جرم و سفتی (۳۱) که دارای مقادیر غیر صفر هستند، به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$M_{mn}^{VV} = \int_{-L/2}^{L/2} I_{00} N_m^v N_n^v dy$$

$$M_{mn}^{V\theta} = \int_{-L/2}^{L/2} -I_{01} N_m^v N_n^\theta dy$$

$$M_{mn}^{V\psi} = \int_{-L/2}^{L/2} I_{10} N_m^v N_n^\psi dy$$

$$\begin{aligned}
 M_{mn}^{UU} &= \int_{-L/2}^{L/2} I_{00} N_m^u N_n^u dy \\
 M_{mn}^{WW} &= \int_{-L/2}^{L/2} I_{00} N_m^w N_n^w dy \\
 M_{mn}^{\theta\theta} &= \int_{-L/2}^{L/2} I_{02} N_m^\theta N_n^\theta dy \\
 M_{mn}^{\theta\psi} &= \int_{-L/2}^{L/2} -I_{11} N_m^\theta N_n^\psi dy \\
 M_{mn}^{\psi\psi} &= \int_{-L/2}^{L/2} I_{20} N_m^\psi N_n^\psi dy \\
 K_{mn}^{VV} &= \int_{-L/2}^{L/2} D_{00} \frac{dN_m^v}{dy} \frac{dN_n^v}{dy} dy \\
 K_{mn}^{V\theta} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(-D_{10} K \frac{dN_m^v}{dy} N_n^\theta - D_{01} \frac{dN_m^v}{dy} \frac{dN_n^\theta}{dy} \right) dy \\
 K_{mn}^{V\psi} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(-D_{01} K \frac{dN_m^v}{dy} N_n^\psi + D_{10} \frac{dN_m^v}{dy} \frac{dN_n^\psi}{dy} \right) dy \\
 K_{mn}^{UU} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(E_{00} \frac{dN_m^u}{dy} \frac{dN_n^u}{dy} + K^2 F_{00} N_m^u N_n^u \right) dy \\
 K_{mn}^{UW} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(E_{00} K \frac{dN_m^u}{dy} N_n^w - F_{00} K N_m^u \frac{dN_n^w}{dy} \right) dy \\
 K_{mn}^{U\theta} &= \int_{-L/2}^{L/2} F_{00} K N_m^u N_n^\theta dy \\
 K_{mn}^{U\psi} &= \int_{-L/2}^{L/2} F_{00} \frac{dN_m^u}{dy} N_n^\psi dy
 \end{aligned} \tag{۳۲}$$

$$K_{mn}^{WW} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(E_{00} K^2 N_m^w N_n^w + F_{00} \frac{dN_m^w}{dy} \frac{dN_n^w}{dy} \right) dy$$

$$K_{mn}^{W\theta} = \int_{-L/2}^{L/2} -F_{00} \frac{dN_m^w}{dy} N_n^\theta dy$$

$$K_{mn}^{W\psi} = \int_{-L/2}^{L/2} E_{00} K N_m^w N_n^\psi dy$$

$$K_{mn}^{\theta\theta} = \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ (F_{00} + D_{20} K^2) N_m^\theta N_n^\theta - D_{02} \frac{dN_m^\theta}{dy} \frac{dN_n^\theta}{dy} + D_{11} K N_m^\theta \frac{dN_n^\theta}{dy} + D_{11} K \frac{dN_m^\theta}{dy} N_n^\theta \right\} dy$$

$$K_{mn}^{\theta\psi} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(D_{11} K^2 N_m^\theta N_n^\psi - D_{11} \frac{dN_m^\theta}{dy} \frac{dN_n^\psi}{dy} - D_{20} K N_m^\theta \frac{dN_n^\psi}{dy} - D_{02} K \frac{dN_m^\theta}{dy} N_n^\psi \right) dy$$

$$K_{mn}^{\psi\psi} = \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ (E_{00} + K^2 D_{02}) N_m^\psi N_n^\psi + D_{20} \frac{dN_m^\psi}{dy} \frac{dN_n^\psi}{dy} - D_{11} K \frac{dN_m^\psi}{dy} N_n^\psi - D_{11} K N_m^\psi \frac{dN_n^\psi}{dy} \right\} dy$$

با مشخص شدن درایه‌های ماتریس (۳۱) به شکل بسته شده، رابطه (۳۱) را می‌توان به شکل زیر نمایش داد.

$$M\ddot{X} + KX = 0 \quad (33)$$

با در نظر گرفتن حرکت تکرار شونده ارتعاشات آزاد برای تیر خمیده، بردار جابجایی وابسته به زمان X به صورت زیر قابل بیان خواهد بود.

$$X = \hat{X} \cos(\omega t + \alpha) \quad (34)$$

نهایتاً با قرار دادن رابطه (۳۴) در رابطه (۳۳) مسأله مقدار ویژه زیر حاصل می‌گردد. در رابطه (۳۴)، ω بیانگر فرکانس طبیعی تیر پیچیده شده می‌باشد. معادله مشخصه فرکانسی تیر پیچیده شده برابر است با:

$$(K - \omega^2 M)\bar{X} = 0 \quad (35)$$

از حل معادله (۳۵) به صورت یک مسأله مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی سیستم محاسبه می‌شود.

۳- نتایج و بحث

در تحقیق حاضر به بررسی رفتار ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با صفحات گرافن پرداخته شده است. فرض بر آن است که تیر دارای پیچش اولیه است به نحوی که یک انتهای آن زاویه پیچش ندارد در حالی که انتهای دیگر تیر دارای مقدار دلخواهی از پیچش است. نرخ پیچش در طول تیر کاملاً دلخواه است و فرمولاسیون حاضر قادر به در نظر گرفتن پیچش از هر مرتبه و به هر شکلی است. با این وجود در تحقیق حاضر پیچش به شکل تابع چند جمله‌ای در نظر گرفته شده است. تیر کامپوزیتی به کار رفته در این تحقیق دارای چندین لایه بوده که با صفحات گرافن تقویت شده‌اند. همانگونه که پیش از این اشاره شد، مقدار کسر حجمی گرافن در لایه‌ها می‌تواند متغیر باشد که منجر به یک توزیع هدفمند خواهد شد. شرایط مرزی متنوعی برای تیر در نظر گرفته شده است و فرمولاسیون به کار رفته روش ریتز و توابع چبیشف می‌باشد. لازم به ذکر است که در کل این تحقیق به جز در مواردی که خلاف آن ذکر شده است، از تقویت کننده گرافن و ماتریس اپوکسی به عنوان دو جز استفاده شده است. خواص این دو جز در جدول (۲) ارائه شده است. صفحات گرافن به کار رفته دارای طول ۲/۵ میکرومتر، عرض ۱/۵ میکرومتر و ضخامت ۱/۵ نانومتر هستند. این مقادیر برای محاسبه خواص مکانیکی کامپوزیت مورد نیاز است.

۳-۱- مطالعه همگرایی و مقایسه‌ای

روش حل به کار رفته در تحقیق حاضر روش ریتز است و همواره یکی از فاکتورهای مهم در روش ریتز تعداد جملات برای حصول همگرایی می‌باشد. به عنوان نمونه‌ای از مطالعات همگرایی، سه تیر با سه شرط مرزی مختلف انتخاب شده است. دیگر خواص به کار رفته در تیر عبارتند از توزیع $FG - X$ ، کسر وزنی $W_{GPL} = 0.5\%$ ، زاویه پیچش انتهایی $\Phi_0 = 40^\circ$ به همراه نرخ ثابت زاویه پیچش $S = 1$ و تعداد لایه برابر با ۱۰. همچنین ابعاد هندسی تیر به صورت $L/h = 10$ و $L/b = 15$ انتخاب شده است. در طول این سه تحقیق که نتایج آن در در جداول (۳)، (۴) و (۵) ارائه شده است، پارامتر فرکانس بدون بعد به صورت زیر تعریف شده است.

$$\Omega = \omega L \sqrt{\rho_m (1 - \nu_m^2) / E_m} \quad (36)$$

مقدار پنج فرکانس اول تیر برای مقادیر مختلف تعداد جملات به کار رفته در روش ریتز ارائه شده است. نتایج ارائه شده در جداول (۳)، (۴) و (۵) به ترتیب به شرایط مرزی دو سر گیردار، دو سر ساده و یک سر گیردار

مربوط هستند. همانگونه که از نتایج ارائه شده در این جداول مشخص است برای اطمینان از همگرایی و رسیدن به دقت لازم انتخاب ۱۲ تابع شکل برای هر یک از متغیرهای اساسی در روش ریتز لازم است. با این کار یک سیستم ۶۰ درجه آزادی به وجود خواهد آمد. به همین دلیل برای ارائه نتایج بعدی در این تحقیق تعداد جملات در روش ریتز ۱۲ جمله انتخاب شده است.

لازم به ذکر است که همانگونه که از نتایج ارائه شده در سه جدول (۳)، (۴) و (۵) مشخص است و انتظار می‌رود، بالاترین فرکانس مربوط به تیر دو سر گیردار است که به دلیل شرایط مرزی مستحکم تر در این نوع از شرط مرزی است.

جدول ۲- خواص مکانیکی دو جزء ماتریس و تقویت کننده [۲]

نام خاصیت	جز پلیمری	جز تقویت کننده
مدول الاستیسیته (گیگا پاسکال)	۳	۱۰۱۰
چگالی (کیلوگرم بر متر مکعب)	۱۲۰۰	۱۰۶۲/۵
ضریب پواسون	۰/۳۴	۰/۱۸۶

جدول ۳- آنالیز همگرایی بر روی پنج فرکانس بدون بعد اول تیر با شرایط مرزی دو سر گیردار

تعداد جملات N	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
۴	۰/۷۰۴۹	۱/۰۶۳۱	۱/۸۹۷۰	۲/۷۸۷۰	۵/۱۲۴۱
۵	۰/۷۰۲۲	۱/۰۵۸۳	۱/۸۷۴۰	۲/۶۹۲۷	۳/۵۹۸۱
۶	۰/۷۰۲۱	۱/۰۵۷۷	۱/۸۴۹۵	۲/۶۶۳۴	۳/۵۴۳۰
۷	۰/۷۰۲۱	۱/۰۵۷۷	۱/۸۴۹۱	۲/۶۵۵۳	۳/۴۵۲۸
۸	۰/۷۰۲۱	۱/۰۵۷۷	۱/۸۴۸۹	۲/۶۵۴۹	۳/۴۵۰۸
۹	۰/۷۰۲۱	۱/۰۵۷۷	۱/۸۴۸۸	۲/۶۵۴۶	۳/۴۴۸۶
۱۰	۰/۷۰۲۰	۱/۰۵۷۵	۱/۸۴۸۷	۲/۶۵۴۴	۳/۴۴۸۰
۱۱	۰/۷۰۲۰	۱/۰۵۷۵	۱/۸۴۸۴	۲/۶۵۴۲	۳/۴۴۷۹
۱۲	۰/۷۰۱۹	۱/۰۵۷۳	۱/۸۴۸۳	۲/۶۵۴۰	۳/۴۴۷۳

جدول ۴- آنالیز همگرایی بر روی پنج فرکانس بدون بعد اول تیر با شرایط مرزی دو سر ساده

تعداد جملات N	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
۴	۰/۳۱۰۰	۰/۵۱۵۴	۱/۵۳۱۱	۲/۳۸۷۸	۳/۷۳۱۲
۵	۰/۳۰۸۹	۰/۵۱۰۰	۱/۲۳۴۳	۱/۹۴۴۹	۳/۶۹۲۱
۶	۰/۳۰۸۷	۰/۵۰۹۶	۱/۲۳۰۲	۱/۹۰۷۳	۲/۷۱۷۵
۷	۰/۳۰۸۷	۰/۵۰۹۶	۱/۲۲۴۳	۱/۸۹۶۴	۲/۷۱۳۸

۲/۶۷۳۰	۱/۸۹۴۲	۱/۲۲۴۳	۰/۵۰۹۶	۰/۳۰۸۷	۸
۲/۶۷۲۵	۱/۸۹۴۱	۱/۲۲۴۲	۰/۵۰۹۶	۰/۳۰۸۷	۹
۲/۶۷۱۹	۱/۸۹۴۱	۱/۲۲۴۲	۰/۵۰۹۶	۰/۳۰۸۷	۱۰
۲/۶۷۱۸	۱/۸۹۴۱	۱/۲۲۴۲	۰/۵۰۹۶	۰/۳۰۸۷	۱۱
۲/۶۷۱۸	۱/۸۹۴۱	۱/۲۲۴۲	۰/۵۰۹۶	۰/۳۰۸۷	۱۲

جدول ۵- آنالیز همگرایی بر روی پنج فرکانس بدون بعد اول تیر با شرایط مرزی یک سر گیردار

Ω_5	Ω_4	Ω_3	Ω_2	Ω_1	تعداد جملات N
۲/۵۶۲۱	۱/۱۱۴۷	۰/۶۹۷۳	۰/۱۸۵۰	۰/۱۱۰۴	۴
۱/۹۱۵۷	۱/۰۸۴۴	۰/۶۸۷۰	۰/۱۸۴۶	۰/۱۱۰۴	۵
۱/۸۹۱۰	۱/۰۷۸۴	۰/۶۸۳۶	۰/۱۸۴۶	۰/۱۱۰۳	۶
۱/۸۶۱۹	۱/۰۷۷۷	۰/۶۸۳۵	۰/۱۸۴۶	۰/۱۱۰۳	۷
۱/۸۶۱۴	۱/۰۷۷۶	۰/۶۸۳۵	۰/۱۸۴۶	۰/۱۱۰۳	۸
۱/۸۶۱۰	۱/۰۷۷۶	۰/۶۸۳۵	۰/۱۸۴۶	۰/۱۱۰۳	۹
۱/۸۶۱۰	۱/۰۷۷۶	۰/۶۸۳۵	۰/۱۸۴۶	۰/۱۱۰۳	۱۰
۱/۸۶۱۰	۱/۰۷۷۶	۱/۶۸۳۴	۰/۱۸۴۶	۰/۱۱۰۳	۱۱
۱/۸۶۰۹	۱/۰۷۷۵	۱/۶۸۳۴	۰/۱۸۴۶	۰/۱۱۰۳	۱۲

دو مطالعه مقایسه‌ای نیز در این بخش صورت گرفته است. لازم به ذکر است که هیچ گونه تحقیق بر روی ارتعاشات تیرهای تقویت شده با صفحات گرافن که دارای پیچش اولیه باشند، گزارش نشده است. به همین دلیل دو مطالعه صورت پذیرفته است که اولی مربوط به تیر کامپوزیتی حاضر بدون پیچش و دیگری مربوط به تیر هموزن و ایزوتروپ در حضور پیچش اولیه است.

جدول ۶- مطالعه مقایسه‌ای بر روی پنج فرکانس اول تیر با شرایط مرزی دو سر گیردار

Ω_6	Ω_5	Ω_4	Ω_3	Ω_2	Ω_1	مرجع	چیدمان
۲/۷۳۶۱	۲/۰۵۴۳	۱/۵۲۵۰	۱/۱۰۱۰	۰/۵۹۹۷	۰/۴۱۶۰	حاضر	بدون تقویت کننده
۲/۷۳۶۱	-	۱/۵۲۴۸	-	۰/۵۹۹۸	-	وو و همکاران [۲]	
۳/۸۶۶۳	۲/۹۰۲۷	۲/۱۵۴۸	۱/۵۵۵۵	۰/۸۴۷۴	۰/۵۸۷۷	حاضر	UD
۳/۸۶۶۲	-	۲/۱۵۴۶	-	۰/۸۴۷۵	-	وو و همکاران [۲]	
۴/۱۳۹۹	۲/۹۰۲۸	۲/۳۳۲۷	۱/۵۵۵۶	۰/۹۲۹۲	۰/۵۸۷۷	حاضر	FG-X
۴/۱۳۹۹	-	۲/۳۳۲۵	-	۰/۹۲۹۳	-	وو و همکاران [۲]	
۳/۵۱۷۳	۲/۹۰۲۸	۱/۹۳۵۷	۱/۵۵۵۶	۰/۷۵۰۷	۰/۵۸۷۷	حاضر	FG-O
۳/۵۱۷۱	-	۱/۹۳۵۵	-	۰/۷۵۰۸	-	وو و همکاران [۲]	
۳/۷۵۱۴	۲/۹۰۲۸	۲/۰۸۳۷	۱/۵۵۵۶	۰/۸۱۶۳	۰/۵۸۷۷	حاضر	FG-V
۳/۷۵۱۲	-	۲/۰۸۳۵	-	۰/۸۱۶۴	-	وو و همکاران [۲]	

در مطالعه مقایسه‌ای اول شش فرکانس اول تیر با شرایط مرزی دو سر گیردار ارائه شده است. برای این مطالعه تیر بدون حضور پیچش در نظر گرفته شده است. همچنین تعداد لایه تیر کامپوزیتی برابر با ۱۰ لایه و کسر وزنی برابر با ۰/۳ درصد در نظر گرفته شده است. چیدمان‌های مختلفی نیز لحاظ شده است. نتایج مرجع حاضر با نتایج وو و همکاران مقایسه شده است که در آن تحقیق نسبت طول به ضخامت برابر ۱۰ در نظر گرفته شده است یعنی $L/h = 10$. از آنجایی که در این مرجع تیر به صورت خمش در یک صفحه مدل شده است بعضی از فرکانس‌های در نظر گرفته در تحقیق حاضر رؤیت نمی‌شود که مربوط به خمش در صفحه دیگر است. نتایج حاصل از این تحقیق در جدول (۶) ارائه شده است. فرکانس‌ها در این تحقیق مطابق آنچه در فرمول (۳۶) ارائه شد، بدون بعد گردیده‌اند. همچنین دیگر بعد هندسی به صورت $L/b = 15$ در نظر گرفته شده است. مشخص است که نتایج مرجع حاضر با دقت بسیار خوبی با نتایج وو و همکاران [۲] که بر حسب تئوری تیموشنکو و روش عددی مربعات دیفرانسیلی ارائه شده همخوانی مطلوبی دارد. لازم به ذکر است که همانگونه که از مقایسه نتایج عددی بر می‌آید بالاترین فرکانس مربوط به چیدمان $FG - X$ بوده و کمترین فرکانس مربوط به چیدمان $FG - O$. دلیل این نحوه تغییرات آن است که در چیدمان $FG - X$ صفحاتی که بیشترین فاصله را از تار میانی دارند بیشتر تقویت شده‌اند. بنابراین سفتی خمشی در این مدل تیرها از سایر مدل‌ها بیشتر است. توضیح مربوط به پایین بودن فرکانس‌های طبیعی در چیدمان $FG - O$ نیز کاملاً برعکس است. در دیگر مطالعه مقایسه‌ای که نتایج آن در جدول (۷) ارائه شده است، یک تیر ایزوتروپ هموزن در نظر گرفته شده است. برای اینکه بتوان مدل حاضر را با مدل ارائه شده توسط بانرجی و دیگران مقایسه کرد، کافی است کسر وزنی را برابر با صفر قرار دارد و دیگر خواص هندسی و فیزیکی تیر را برابر با آنچه بانرجی انتخاب کرده است، انتخاب نمود. بانرجی [۱۹] تیری با طول ۳/۰۴۸ متر را مورد بررسی قرار داد. برای این تیر مدول الاستیسیته ۷۰ گیگاپاسکال و ضریب پواسون ۰/۲۹۶ انتخاب شده است. چگالی تیر نیز برابر با ۲۷۰۰ در نظر گرفته شده است. دیگر خواص تیر نیز عبارتند از:

$$D_{00} = 893669000, D_{02} = 2869.7, D_{20} = 57393, E_{00} = F_{00} = 344700900$$

به دلیل ایزوتروپ و هموزن بودن، مابقی ضرایب معرفی نشده برابر با صفر هستند. تیر دارای زاویه پیچش انتهایی ۴۰ درجه بوده و نرخ پیچش در طول تیر ثابت است، به عبارت دیگر $s = 1$ و $\Phi_0 = 40^0$. پنج فرکانس اول تیر با آنچه توسط بانرجی ارائه شده مقایسه گردیده است که همانگونه که مشاهده می‌شود نتایج به خوبی با یکدیگر همخوانی دارد. لازم به ذکر است که در مرجع یاد شده توسط بانرجی تیر یک سر گیردار بوده و از دو تئوری تیموشنکو و اوپلر برای استخراج معادلات و ارائه نتایج استفاده شده است. همانگونه که انتظار می‌رود نتایج با آنچه توسط بانرجی بر پایه تئوری تیموشنکو ارائه کرده همخوانی بهتری دارد. در دو مرجع دیگر توسط لیونگ [۲۱] و همچنین روزن [۲۵] نیز از تئوری تیر اوپلر استفاده شده است. با این وجود کلاً نتایج تطابق خوبی با هم دارند.

۳-۲- مطالعات پارامتری

پس از اطمینان از دقت و صحت روش حل به کار رفته و همچنین فرمولاسیون استفاده شده از طریق بررسی مطالعات همگرایی و مقایسه‌ای، در ادامه به ارائه نتایج مربوط به مطالعه رفتار ارتعاشات آزاد یک تیر تقویت شده با صفحات گرافن که دارای پیچیدگی اولیه نیز می‌باشد، پرداخته می‌شود. در ادامه در بخش‌های مختلف

به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر روی ارتعاشات آزاد تیر پرداخته می‌شود. در کلیه نتایج این بخش از تیری با خواص هندسی $L/h = 10$ و $L/b = 15$ استفاده شده است.

۳-۲-۱- تأثیر تعداد لایه و الگوی توزیع بر ارتعاشات آزاد

در این بخش به مطالعه تأثیر تعداد لایه بر روی فرکانس‌های طبیعی یک تیر با پیچش اولیه که با صفحات گرافن نیز تقویت شده است، پرداخته می‌شود. نتایج این بخش برای هر سه حالت شرط مرزی ارائه شده است و نتایج در سه جدول (۸)، (۹) و (۱۰) ارائه گردیده است. این سه جدول به ترتیب مربوط به شرایط مرزی دو سر گیردار، دو سر ساده و همچنین یک سر گیردار هستند. برای هر یک از این سه جدول چهار نوع چینش در نظر گرفته شده است. همچنین پنج فرکانس اول تیر برای مقادیر مختلف تعداد لایه محاسبه شده و ارائه گردیده است. فرض بر آن است که زاویه پیچش انتهایی برابر با 90° درجه بوده و نرخ تغییرات زاویه پیچش ثابت است به عبارت دیگر مقدار $S = 1$ در نظر گرفته شده است. کسر وزنی گرافن نیز برابر با 0.5 درصد در نظر گرفته شده است.

جدول ۷- مطالعه مقایسه‌ای بر روی پنج فرکانس اول تیر ایزوتروپ و هموزن (بر حسب رادیان بر ثانیه) با شرایط مرزی یک سر گیردار

مرجع	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
حاضر	۳/۴۷۱۶	۱۳/۳۴۰	۲۵/۱۶۳	۵۶/۳۶۱	۱۰۳/۲۱
بانرجی بر پایه تیموشنکو [۱۹]	۳/۴۷۱۵	۱۳/۳۴۰	۲۵/۱۶۵	۵۶/۳۶۳	۱۰۳/۲۰
بانرجی بر پایه اویلر [۱۹]	۳/۴۷۱۷	۱۳/۳۴۷	۲۵/۱۷۱	۵۶/۳۷۲	۱۰۳/۲۶
لیونگ [۲۱]	۳/۴۷۱۷	۱۳/۳۴۷	۲۵/۱۷۱	۵۶/۳۷۲	۱۰۳/۲۶
روزن و همکاران [۲۵]	۳/۴۶۲۶	۱۳/۲۷۴	۲۵/۲۷۰	۵۶/۳۰۱	۱۰۳/۲۰

جدول ۸- تأثیر تعداد لایه بر پنج فرکانس اول تیر با توزیع‌های مختلف و شرایط مرزی دو سر گیردار

نوع ماده	Ω	$N_L = 4$	$N_L = 6$	$N_L = 8$	$N_L = 10$	$N_L = 12$	$N_L = 14$
FG-X	Ω_1	۰/۷۷۴۲	۰/۷۷۸۳	۰/۷۷۹۷	۰/۷۸۰۴	۰/۷۸۰۶	۰/۷۸۱۰
	Ω_2	۰/۹۴۰۳	۰/۹۴۹۱	۰/۹۵۲۱	۰/۹۵۳۵	۰/۹۵۴۲	۰/۹۵۴۷
	Ω_3	۱/۹۹۶۸	۲/۰۰۵۹	۲/۰۰۹۱	۲/۰۱۰۶	۲/۰۱۱۴	۲/۰۱۱۹
	Ω_4	۲/۴۱۶۵	۲/۴۳۵۰	۲/۴۴۱۳	۲/۴۴۴۱	۲/۴۴۵۷	۲/۴۴۶۶
	Ω_5	۳/۶۷۵۴	۳/۶۹۱۳	۳/۶۹۶۹	۳/۶۹۹۵	۳/۷۰۰۹	۳/۷۰۱۷
FG-O	Ω_1	۰/۷۲۴۴	۰/۷۱۹۱	۰/۷۱۷۲	۰/۷۱۶۳	۰/۷۱۵۸	۰/۷۱۵۵
	Ω_2	۰/۸۱۵۱	۰/۷۹۹۸	۰/۷۹۴۳	۰/۷۹۱۶	۰/۷۹۰۲	۰/۷۸۹۴
	Ω_3	۱/۸۸۹۷	۱/۸۷۸۵	۱/۸۷۴۶	۱/۸۷۲۷	۱/۸۷۱۷	۱/۸۷۱۱
	Ω_4	۲/۱۳۰۳	۲/۰۹۳۰	۲/۰۷۹۴	۲/۰۷۲۹	۲/۰۶۹۴	۲/۰۶۷۳
	Ω_5	۳/۴۹۵۰	۳/۴۷۷۳	۳/۴۷۰۹	۳/۴۶۸۰	۳/۴۶۶۴	۳/۴۶۵۴
FG-V	Ω_1	۰/۷۳۸۱	۰/۷۳۷۲	۰/۷۳۶۸	۰/۷۳۶۶	۰/۷۳۶۶	۰/۷۳۶۵

	Ω_2	۰/۸۵۳۸	۰/۸۵۱۳	۰/۸۵۰۳	۰/۸۴۹۹	۰/۸۴۹۷	۰/۸۴۹۵
	Ω_3	۱/۹۱۸۴	۱/۹۱۶۳	۱/۹۱۵۷	۱/۹۱۵۲	۱/۹۱۵۰	۱/۹۱۴۹
	Ω_4	۲/۲۱۹۴	۲/۲۱۳۱	۲/۲۱۰۹	۲/۲۰۹۷	۲/۲۰۹۲	۲/۲۰۸۹
	Ω_5	۳/۵۴۰۳	۳/۵۳۶۷	۳/۵۳۵۴	۳/۵۳۴۸	۳/۵۳۴۵	۳/۵۳۴۳
UD	Ω_1	۰/۷۵۰۷	۰/۷۵۰۷	۰/۷۵۰۷	۰/۷۵۰۷	۰/۷۵۰۷	۰/۷۵۰۷
	Ω_2	۰/۸۸۵۶	۰/۸۸۵۶	۰/۸۸۵۶	۰/۸۸۵۶	۰/۸۸۵۶	۰/۸۸۵۶
	Ω_3	۱/۹۴۵۵	۱/۹۴۵۵	۱/۹۴۵۵	۱/۹۴۵۵	۱/۹۴۵۵	۱/۹۴۵۵
	Ω_4	۲/۲۹۶۰	۲/۲۹۶۰	۲/۲۹۶۰	۲/۲۹۶۰	۲/۲۹۶۰	۲/۲۹۶۰
	Ω_5	۳/۵۸۷۱	۳/۵۸۷۱	۳/۵۸۷۱	۳/۵۸۷۱	۳/۵۸۷۱	۳/۵۸۷۱

نتایج ارائه شده در جداول (۸)، (۹) و (۱۰) بیانگر آن است که در هر حال بالاترین فرکانس‌ها مربوط به توزیع $FG - X$ بوده و کمترین فرکانس‌های طبیعی در حالت $FG - O$ مشاهده می‌شود. دلیل این امر را می‌توان در چیدمان لایه‌ای بررسی کرد. در حالت $FG - X$ لایه‌هایی که بالاترین مقدار کسر حجمی را دارند در فواصل دورتری از لایه میانی قرار گرفته‌اند. بنابراین در چنین حالتی مقدار سفتی خمشی تیر افزایش پیدا خواهد کرد که به دنبال آن سفتی کل تیر نیز بالاتر رفته و فرکانس‌های طبیعی بیشتری مشاهده خواهد شد. در حالت $FG - O$ تحلیل کاملاً برعکس خواهد بود.

جدول ۹ - تأثیر تعداد لایه بر پنج فرکانس اول تیر با توزیع‌های مختلف و شرایط مرزی دو سر ساده

نوع ماده	Ω	$N_L = 4$	$N_L = 6$	$N_L = 8$	$N_L = 10$	$N_L = 12$	$N_L = 14$
FG-X	Ω_1	۰/۳۱۴۴	۰/۳۱۴۵	۰/۳۱۴۶	۰/۳۱۴۶	۰/۳۱۴۶	۰/۳۱۴۶
	Ω_2	۰/۴۷۳۱	۰/۴۷۹۳	۰/۴۸۱۴	۰/۴۸۲۴	۰/۴۸۲۹	۰/۴۸۳۲
	Ω_3	۱/۳۰۶۶	۱/۳۱۱۶	۱/۳۱۳۴	۱/۳۱۴۲	۱/۳۱۴۶	۱/۳۱۴۹
	Ω_4	۱/۷۲۱۱	۱/۷۳۸۲	۱/۷۴۴۱	۱/۷۴۶۷	۱/۷۴۸۲	۱/۷۴۹۰
	Ω_5	۲/۸۶۲۶	۲/۸۷۶۸	۲/۸۸۱۸	۲/۸۸۴۱	۲/۸۸۵۴	۲/۸۸۶۱
FG-O	Ω_1	۰/۳۱۱۹	۰/۳۱۱۵	۰/۳۱۱۳	۰/۳۱۱۲	۰/۳۱۱۲	۰/۳۱۱۲
	Ω_2	۰/۳۹۰۲	۰/۳۸۰۶	۰/۳۷۷۱	۰/۳۷۵۵	۰/۳۷۴۶	۰/۳۷۴۱
	Ω_3	۱/۲۴۹۲	۱/۲۴۳۳	۱/۲۴۱۲	۱/۲۴۰۲	۱/۲۳۹۷	۱/۲۳۹۳
	Ω_4	۱/۴۷۰۲	۱/۴۳۹۲	۱/۴۲۸۰	۱/۴۲۲۷	۱/۴۱۹۸	۱/۴۱۸۰
	Ω_5	۲/۷۱۱۳	۲/۶۹۷۱	۲/۶۹۲۰	۲/۶۸۹۷	۲/۶۸۸۴	۲/۶۸۷۷
FG-V	Ω_1	۰/۳۱۲۷	۰/۳۱۲۷	۰/۳۱۲۷	۰/۳۱۲۷	۰/۳۱۲۷	۰/۳۱۲۷
	Ω_2	۰/۴۳۰۷	۰/۴۳۰۳	۰/۴۳۰۱	۰/۴۳۰۱	۰/۴۳۰۰	۰/۴۳۰۰
	Ω_3	۱/۲۷۷۵	۱/۲۷۷۳	۱/۲۷۷۳	۱/۲۷۷۳	۱/۲۷۷۳	۱/۲۷۷۳
	Ω_4	۱/۵۴۳۲	۱/۵۳۷۶	۱/۵۳۵۶	۱/۵۳۴۶	۱/۵۳۴۱	۱/۵۳۳۸
	Ω_5	۲/۷۳۷۳	۲/۷۳۳۷	۲/۷۳۲۳	۲/۷۳۱۷	۲/۷۳۱۴	۲/۷۳۱۲
UD	Ω_1	۰/۳۱۳۴	۰/۳۱۳۴	۰/۳۱۳۴	۰/۳۱۳۴	۰/۳۱۳۴	۰/۳۱۳۴

	Ω_2	۰/۴۳۵۷	۰/۴۳۵۷	۰/۴۳۵۷	۰/۴۳۵۷	۰/۴۳۵۷	۰/۴۳۵۷
	Ω_3	۱/۲۷۸۹	۱/۲۷۸۹	۱/۲۷۸۹	۱/۲۷۸۹	۱/۲۷۸۹	۱/۲۷۸۹
	Ω_4	۱/۶۱۲۵	۱/۶۱۲۵	۱/۶۱۲۵	۱/۶۱۲۵	۱/۶۱۲۵	۱/۶۱۲۵
	Ω_5	۲/۷۸۶۷	۲/۷۸۶۷	۲/۷۸۶۷	۲/۷۸۶۷	۲/۷۸۶۷	۲/۷۸۶۷

مطلب مهم دیگری که از نتایج ارائه شده در این سه جدول برداشت می‌شود آن است که در چیدمان FG - X با بالارفتن تعداد لایه‌ها فرکانس‌های طبیعی نیز افزایش جزئی را دارند حال آنکه در دو چیدمان FG - O و FG - V افزایش تعداد لایه‌ها باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. در چیدمان UD همانگونه که انتظار می‌رود تعداد لایه‌ها تأثیری بر روی فرکانس طبیعی تیر ندارد زیرا در این حالت کلیه لایه‌ها مشابه با همدیگر بوده و تعداد آن‌ها با احتساب ثابت نگه داشتن ضخامت تیر بی‌تأثیر خواهد بود.

جدول ۱۰ - تأثیر تعداد لایه بر پنج فرکانس اول تیر با توزیع‌های مختلف و شرایط مرزی یک سر گیردار

نوع ماده	Ω	$N_L = 4$	$N_L = 6$	$N_L = 8$	$N_L = 10$	$N_L = 12$	$N_L = 14$
FG-X	Ω_1	۰/۱۱۱۸	۰/۱۱۱۹	۰/۱۱۱۹	۰/۱۱۱۹	۰/۱۱۱۹	۰/۱۱۱۹
	Ω_2	۰/۱۷۳۶	۰/۱۷۶۱	۰/۱۷۷۰	۰/۱۷۷۴	۰/۱۷۷۶	۰/۱۷۷۷
	Ω_3	۰/۷۱۸۵	۰/۷۲۰۵	۰/۷۲۱۲	۰/۷۲۱۵	۰/۷۲۱۷	۰/۷۲۱۸
	Ω_4	۰/۹۸۹۳	۱/۰۰۰۵	۱/۰۰۴۳	۱/۰۰۶۱	۱/۰۰۷۰	۱/۰۰۷۶
	Ω_5	۱/۹۸۲۵	۱/۹۹۰۵	۱/۹۹۳۲	۱/۹۹۴۵	۱/۹۹۵۲	۱/۹۹۵۶
FG-O	Ω_1	۰/۱۱۱۱	۰/۱۱۱۰	۰/۱۱۱۰	۰/۱۱۱۰	۰/۱۱۱۰	۰/۱۱۱۰
	Ω_2	۰/۱۴۱۱	۰/۱۳۷۵	۰/۱۳۶۱	۰/۱۳۵۵	۰/۱۳۵۲	۰/۱۳۵۰
	Ω_3	۰/۶۹۵۰	۰/۶۹۲۴	۰/۶۹۱۵	۰/۶۹۱۱	۰/۶۹۰۸	۰/۶۹۰۷
	Ω_4	۰/۸۳۳۹	۰/۸۱۵۴	۰/۸۰۸۷	۰/۸۰۵۶	۰/۸۰۳۸	۰/۸۰۲۸
	Ω_5	۱/۸۹۲۵	۱/۸۸۳۴	۱/۸۸۰۲	۱/۸۷۸۷	۱/۸۷۷۹	۱/۸۷۷۴
FG-V	Ω_1	۰/۱۱۱۴	۰/۱۱۱۴	۰/۱۱۱۴	۰/۱۱۱۴	۰/۱۱۱۴	۰/۱۱۱۴
	Ω_2	۰/۱۵۰۵	۰/۱۴۹۹	۰/۱۴۹۶	۰/۱۴۹۵	۰/۱۴۹۴	۰/۱۴۹۴
	Ω_3	۰/۷۰۱۳	۰/۷۰۰۸	۰/۷۰۰۶	۰/۷۰۰۵	۰/۷۰۰۵	۰/۷۰۰۵
	Ω_4	۰/۸۷۹۸	۰/۸۷۶۵	۰/۸۷۵۳	۰/۸۷۴۸	۰/۸۷۴۵	۰/۸۷۵۴
	Ω_5	۱/۹۱۴۱	۱/۹۱۲۲	۱/۹۱۱۵	۱/۹۱۱۲	۱/۹۱۱۱	۱/۹۱۱۰
UD	Ω_1	۰/۱۱۱۶	۰/۱۱۱۶	۰/۱۱۱۶	۰/۱۱۱۶	۰/۱۱۱۶	۰/۱۱۱۶
	Ω_2	۰/۱۵۸۷	۰/۱۵۸۷	۰/۱۵۸۷	۰/۱۵۸۷	۰/۱۵۸۷	۰/۱۵۸۷
	Ω_3	۰/۷۰۷۴	۰/۷۰۷۴	۰/۷۰۷۴	۰/۷۰۷۴	۰/۷۰۷۴	۰/۷۰۷۴
	Ω_4	۰/۹۲۰۴	۰/۹۲۰۴	۰/۹۲۰۴	۰/۹۲۰۴	۰/۹۲۰۴	۰/۹۲۰۴
	Ω_5	۱/۹۳۸۷	۱/۹۳۸۷	۱/۹۳۸۷	۱/۹۳۸۷	۱/۹۳۸۷	۱/۹۳۸۷

مهمترین مطلبی که از این سه جدول به دست می‌آید آن است که تغییرات فرکانس طبیعی برای تعداد لایه بیش از ۱۰ بسیار اندک است و به همین دلیل می‌توان گفت که یک کامپوزیت تقویت شده با صفحات گرافن و ۱۰ لایه می‌تواند تقریباً بسیار خوبی برای یک کامپوزیت با تغییرات خواص پیوسته باشد. با توجه به آنچه در مورد تغییرات فرکانس در چهار حالت چیدمانی در جداول بالا مشاهده می‌شود می‌توان گفت که با در نظر گرفتن چیدمان‌های مختلف برای تیر می‌توان فرکانس‌های طبیعی تیر را نیز در محدوده مشخصی کنترل کرد. در کلیه نتایجی که در ادامه ارائه خواهد شد تعداد لایه کامپوزیت برابر با ۱۰ لایه در نظر گرفته شده است زیرا همانگونه که نتایج جداول (۸)، (۹) و (۱۰) نشان دادند به کار بردن بیش از این تعداد لایه تغییر خاصی در فرکانس‌های طبیعی تیر نخواهد داشت.

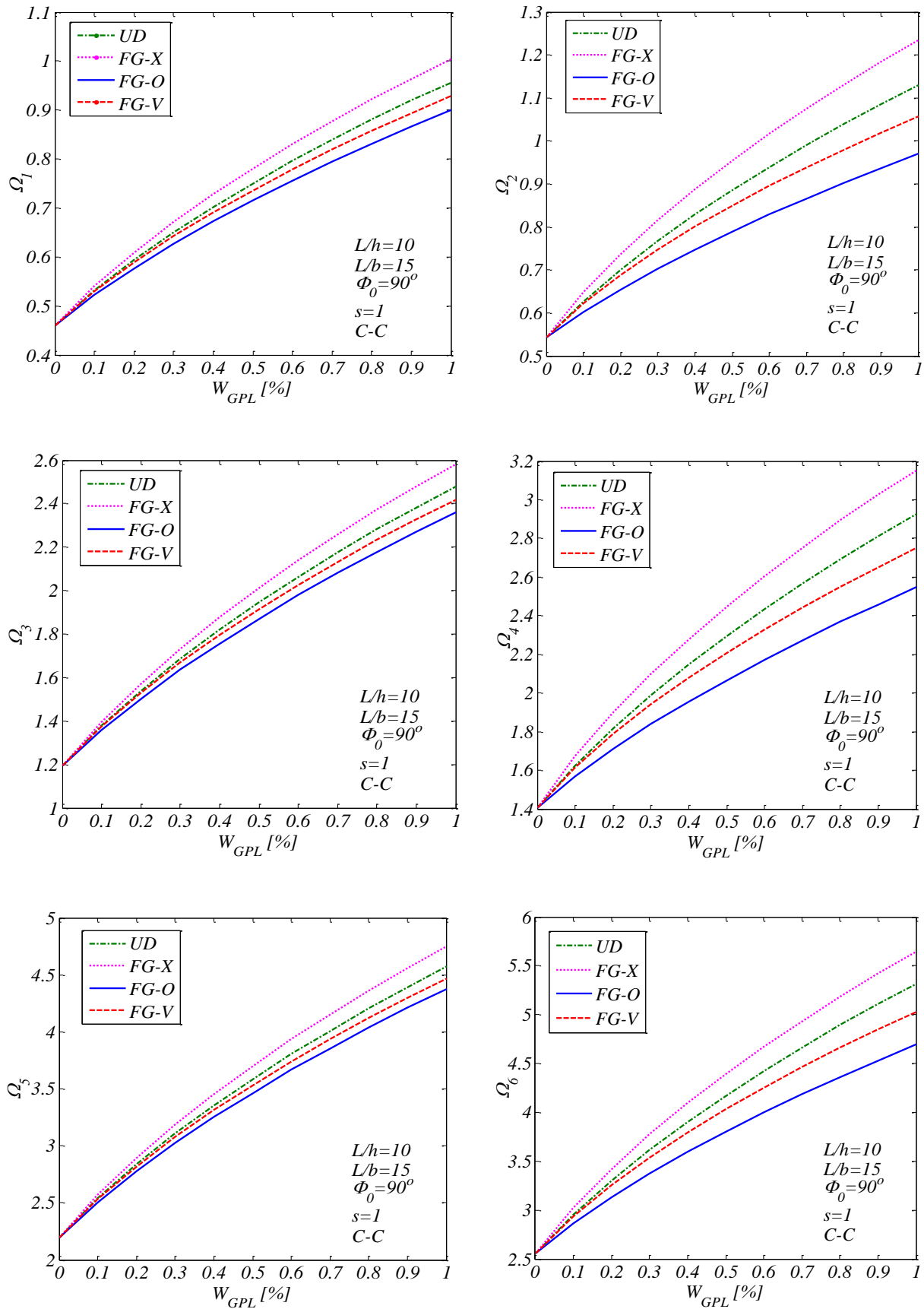
۳-۲-۲- بررسی تاثیر درصد وزنی و الگوی توزیع بر ارتعاشات آزاد

در این بخش نتایج ارائه شده برای تاثیر درصد وزنی صفحات گرافن بر روی شش فرکانس طبیعی اول ارائه شده است. نتایج این بخش برای هر سه حالت شرایط مرزی ارائه گردیده و در سه شکل (۴)، (۵) و (۶) به ترتیب برای شرایط مرزی دو سر گیردار، دو سر ساده و یک سر گیردار ارائه شده است. از تیری با زاویه پیچش ۹۰ درجه با تغییرات خطی شدت پیچش استفاده شده است. نتایج ارائه شده به خوبی نشان می‌دهد که با بالارفتن کسر حجمی (وزنی) گرافن فرکانس‌های طبیعی تیر افزایش می‌یابد. زیرا با بالارفتن کسر وزنی مدول الاستیسیته کامپوزیت به شدت بالا رفته که به دنبال آن سفتی تیر نیز بالاتر رفته و فرکانس‌ها بیشتر می‌شود.

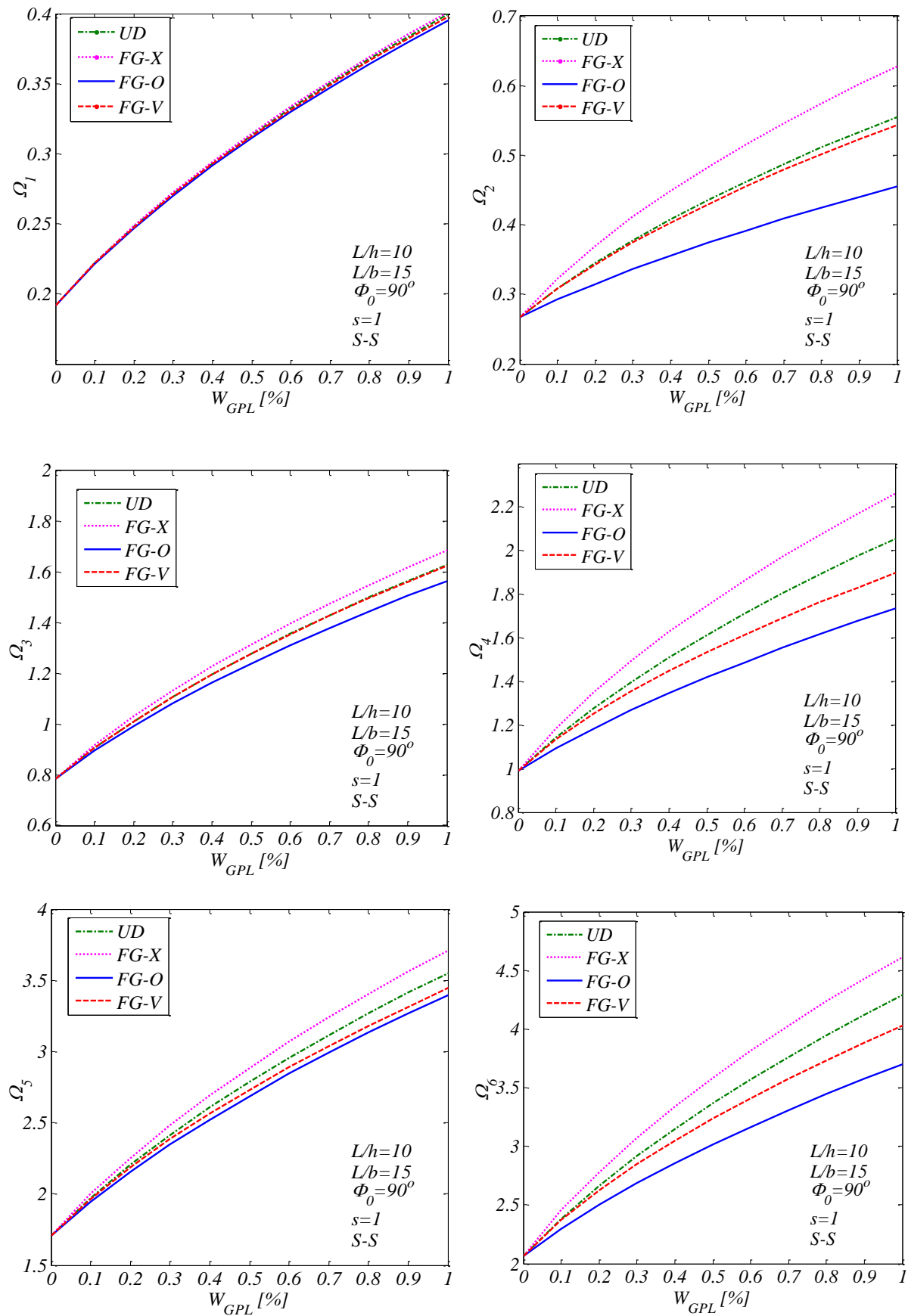
۳-۲-۳- بررسی تاثیر زاویه پیچش بر ارتعاشات آزاد

در ادامه نتایج ارائه شده در این پژوهش به بررسی تاثیر زاویه پیچش بر روی فرکانس‌های طبیعی تیر با حضور پیچش اولیه پرداخته می‌شود. برای این منظور سه حالت شرایط مرزی در نظر گرفته شده است و نتایج مربوط به تغییرات چهار فرکانس اول تیر بر حسب زاویه پیچش برای شرایط مرزی دو سر گیردار، دو سر ساده و یک سر ساده به ترتیب در شکل‌های (۷)، (۸) و (۹) آمده است. برای نتایج ارائه شده در این شکل‌ها فرض شده است که کسر حجمی گرافن به کار رفته برابر با ۰/۵ درصد باشد. همچنین تغییرات زاویه پیچش در طول تیر خطی در نظر گرفته شده است و یا به عبارتی شدت زاویه پیچش مقداری ثابت است که با برابر واحد قرار دادن پارامتر S این تغییرات برآورده می‌شود.

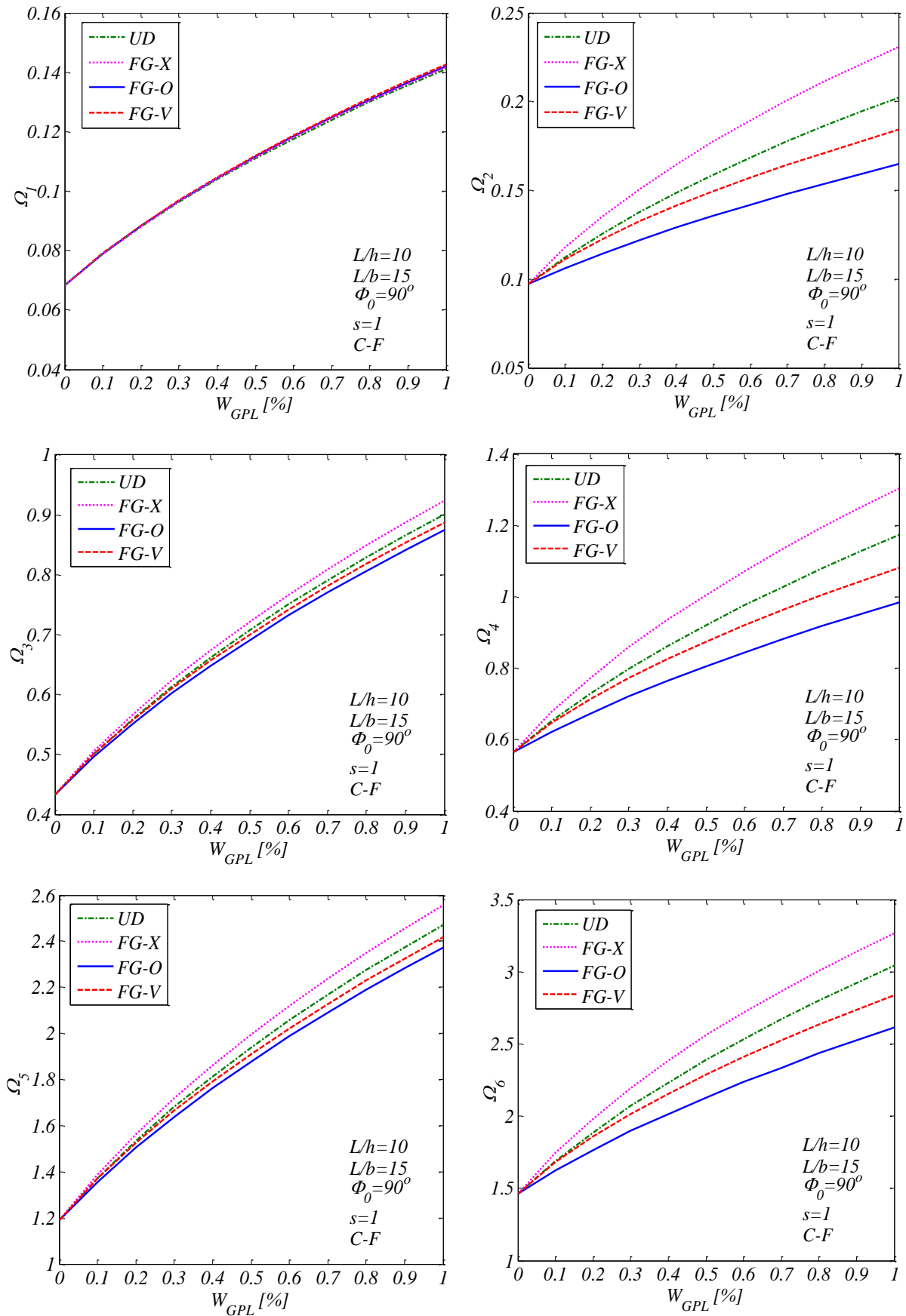
همانگونه که از نتایج ارائه شده در این سه شکل می‌توان استنباط نمود، تاثیر زاویه پیچش به شدت بستگی به شماره فرکانس طبیعی تیر دارد. برای هر سه حالت شرط مرزی که در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است، می‌توان گفت که فرکانس اول و همچنین فرکانس سوم تیر با بالارفتن زاویه پیچش افزایش پیدا می‌کنند حال آنکه هر دو فرکانس دوم و چهارم تیر با افزایش زاویه پیچش تیر کاهش می‌یابند. این نحوه تغییرات در هر سه حالت شرط مرزی مشاهده می‌شود و با آنچه که لیونگ نیز گزارش داده است همخوانی دارد. لازم به ذکر است که مجدداً مشاهده می‌شود که بیشترین فرکانس تیر مربوط به توزیع $FG - X$ و کمترین فرکانس مربوط به توزیع $FG - O$ است که دلایل مربوط به این نحوه تغییرات پیش از این گزارش شد.



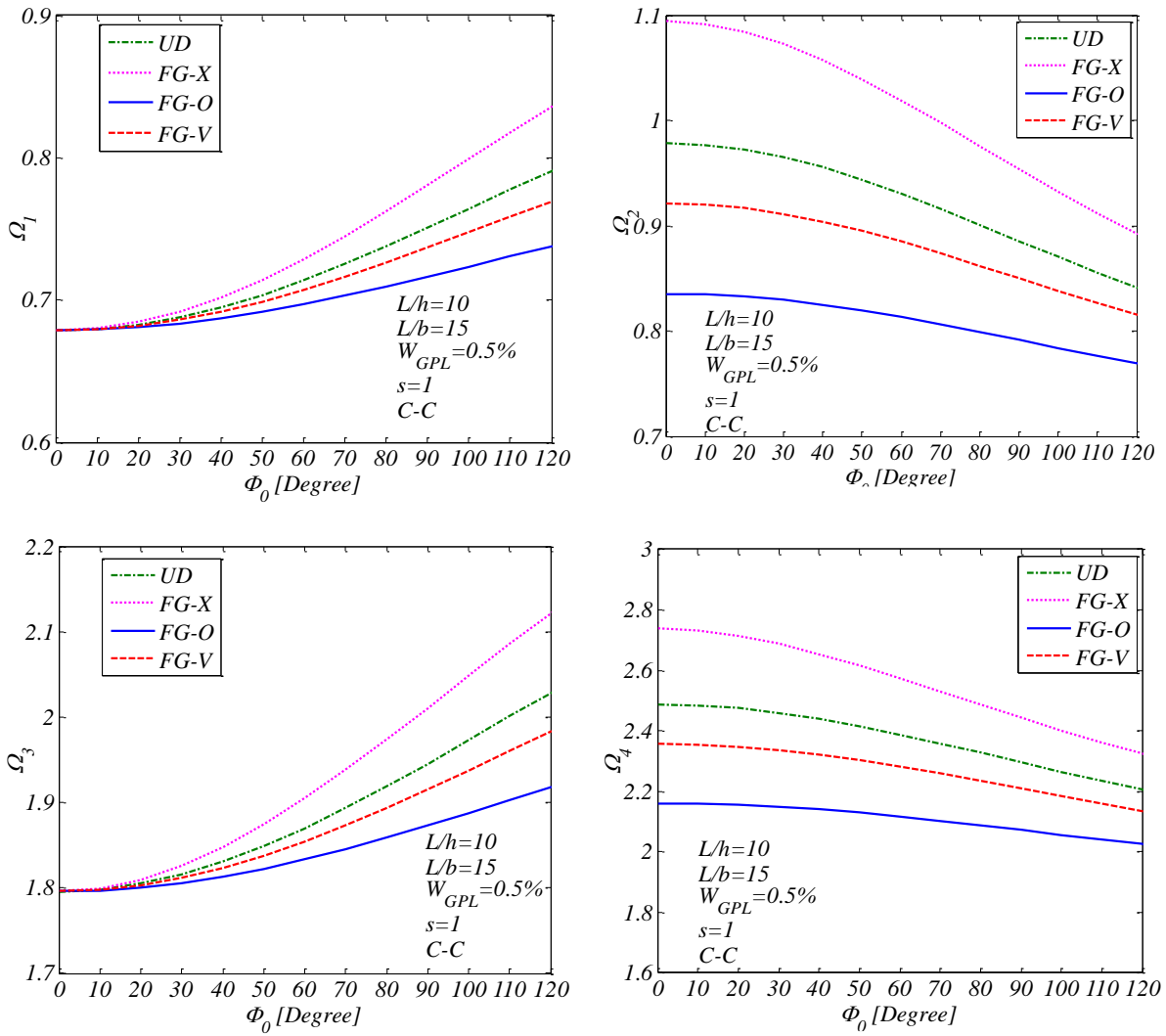
شکل ۴- بررسی تأثیر کسر وزنی بر روی شش فرکانس اول تیر با شرط مرزی دوسر گیردار



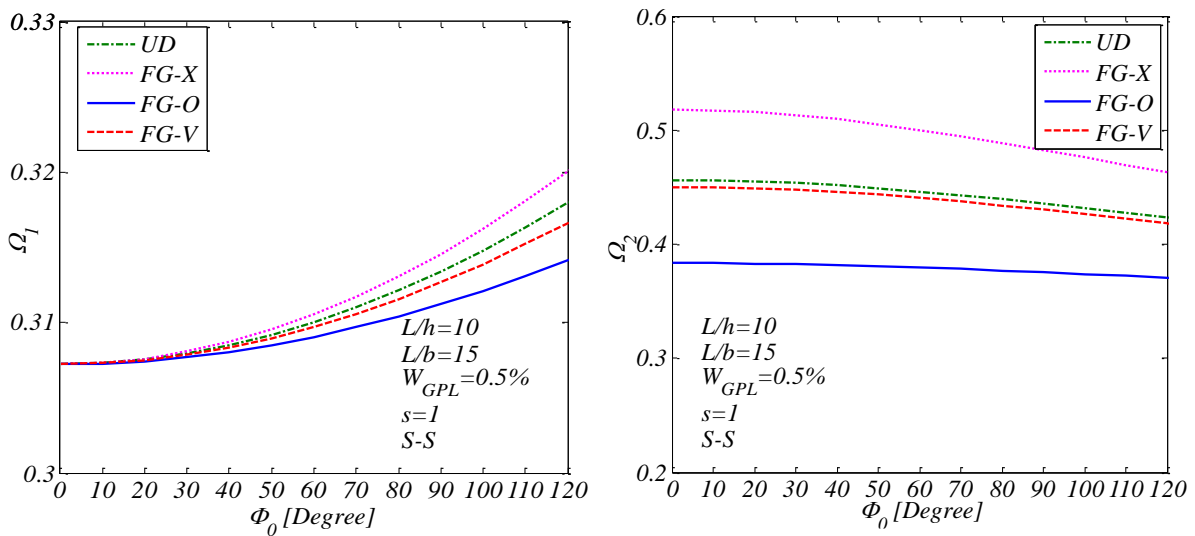
شکل ۵- بررسی تأثیر کسر وزنی بر روی شش فرکانس اول تیر با شرایط مرزی دو سر ساده

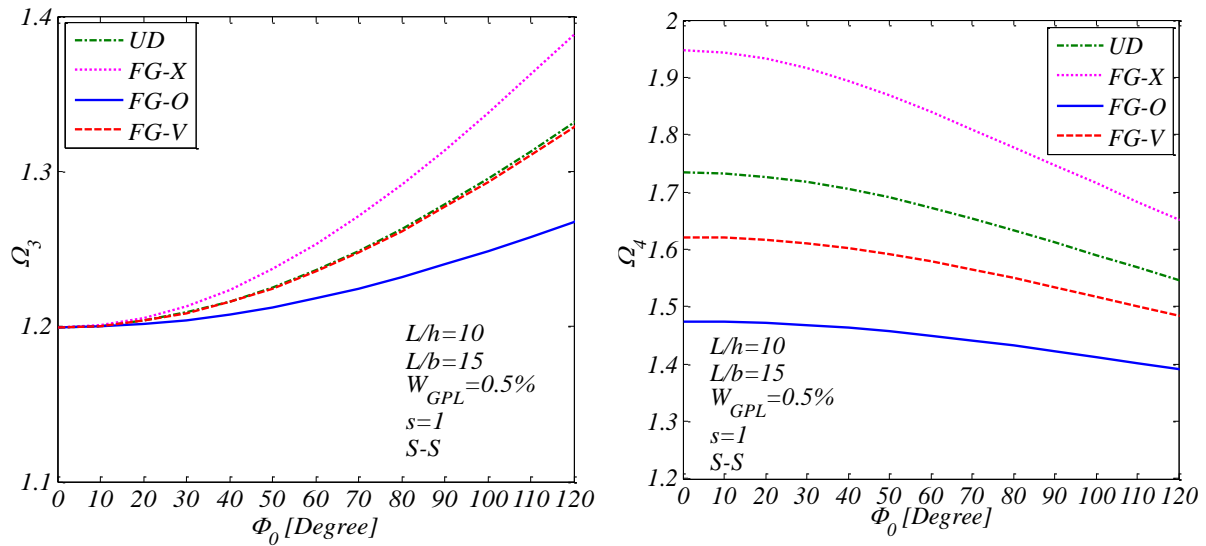


شکل ۶- بررسی تأثیر کسر وزنی بر روی شش فرکانس اول تیر با شرایط مرزی یک سر گیردار

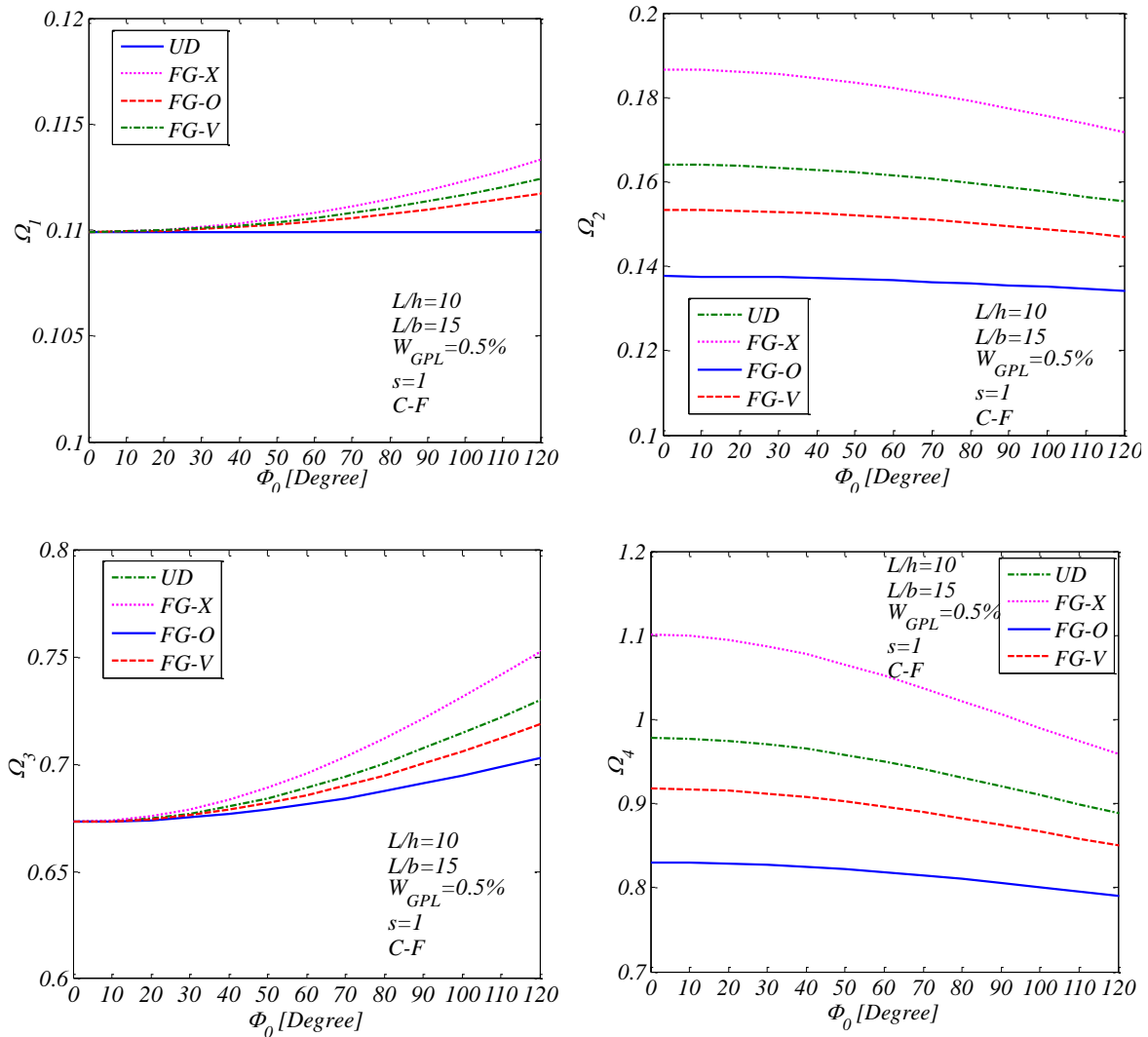


شکل ۷- بررسی تأثیر زاویه پیچش بر روی چهار فرکانس اول تیر با شرایط مرزی دو سر گیردار





شکل ۸- بررسی تأثیر زاویه پیچش بر روی چهار فرکانس اول تیر با شرایط مرزی دو سر ساده

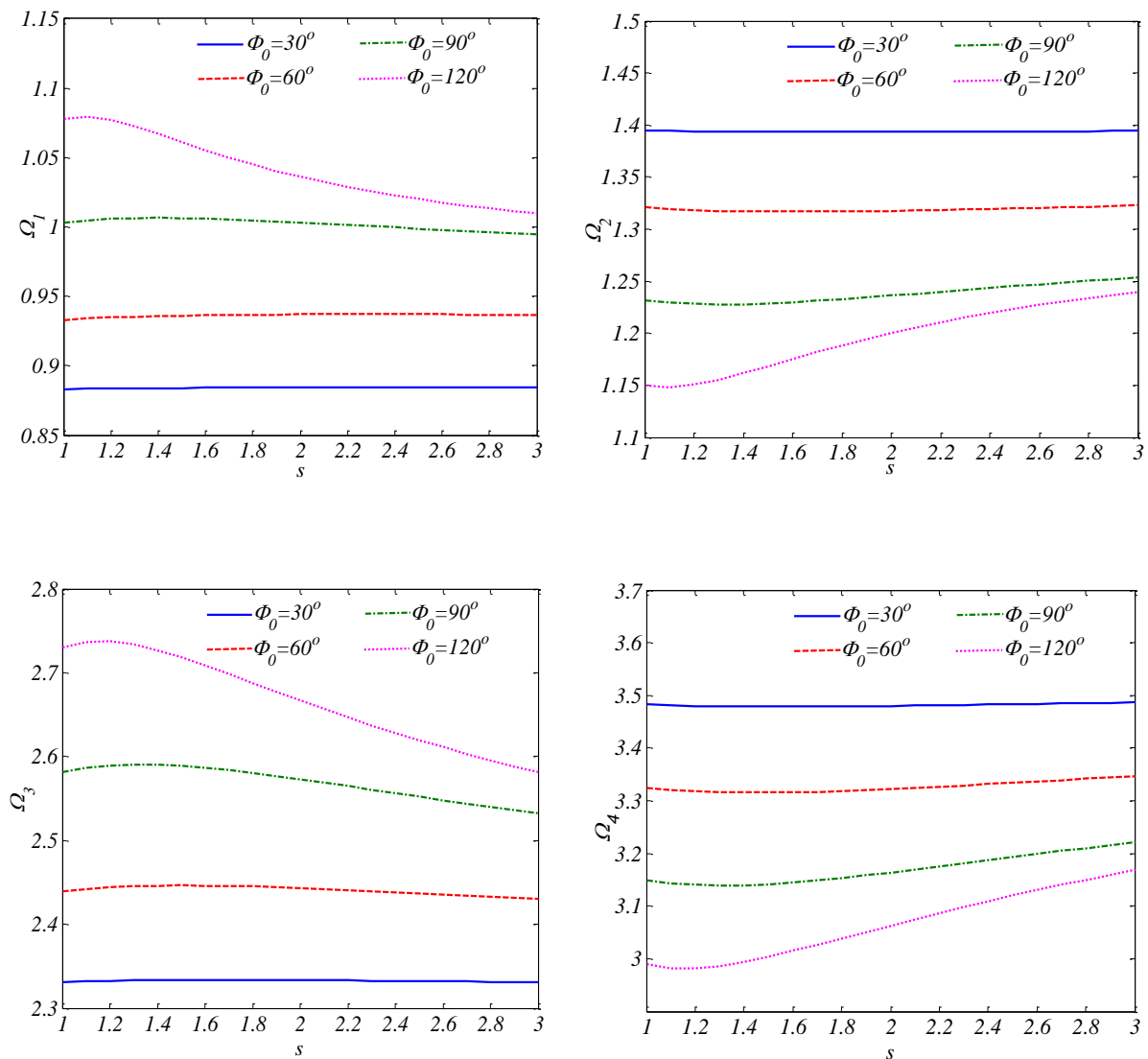


شکل ۹- بررسی تأثیر زاویه پیچش بر روی چهار فرکانس اول تیر با شرایط مرزی یک سر گیردار

۳-۲-۴- بررسی تأثیر نرخ تغییرات زاویه پیچش

در این بخش به بررسی تأثیر نرخ زاویه پیچش پرداخته می‌شود. نرخ تغییرات زاویه پیچش از طریق نمای S قابل کنترل است. در شکل (۱۰) تأثیر این پارامتر نشان داده شده است. بدین منظور تیری با شرایط مرزی دو سر گیردار مورد بررسی قرار گرفته است. فرض بر آن است که توزیع تقویت کننده گرافن به صورت $FG - X$ بوده و کسر وزنی گرافن برابر با یک درصد در نظر گرفته شده است. چهار فرکانس اول تیر بر حسب S برای مقادیر مختلفی از زاویه پیچش ترسیم شده است.

همانگونه که از نتایج ارائه شده در شکل (۱۰) مشهود است، پارامتر S که به نوعی کنترل کننده نرخ زاویه پیچش است تأثیر متفاوتی را بر روی فرکانس‌ها دارد. همچنین با بالا رفتن زاویه پیچش تأثیر این پارامتر بیشتر خواهد شد. تأثیر پارامتر S بر روی فرکانس‌های شماره زوج به یک صورت بوده و بر روی فرکانس‌ها با شماره فرد نیز به صورت مشابهی است.



شکل ۱۰- بررسی تأثیر نرخ زاویه پیچش بر روی چهار فرکانس اول تیر با شرایط مرزی دو سر گیردار برای زوایای پیچش مختلف

۴- نتیجه گیری

در تحقیق انجام شده به بررسی ارتعاشات آزاد یک تیر پرداخته شده است که در آن اثرات پیچش اولیه نیز منظور گردیده است. فرض بر این است که ابتدای تیر بدون پیچش بوده و انتهای تیر دارای حداکثر پیچش است. نرخ زاویه پیچش در تیر نیز متغیر در نظر گرفته شده است که این متغیر بودن از طریق یک توزیع چندجمله‌ای بیان شده است. تیر به کار رفته کامپوزیتی چند لایه بوده به نحوی که هر لایه از تیر با مقدار مشخصی از گرافن تقویت شده است. هر لایه از تیر مقدار متفاوتی از تقویت کننده را دارد و به همین دلیل در راستای ضخامت تیر یک توزیع گرادینانی هدفمند به وجود می‌آید. برای برآورد خواص الاستیک تیر از مدل هالپین-تسای استفاده شده است که در آن ابعاد تقویت کننده نیز در نظر گرفته می‌شود. همچنین دو خاصیت دیگر تیر یعنی ضریب پواسون و چگالی با استفاده از قانون ساده مخلوطها محاسبه می‌شوند. به دلیل وجود پیچش اولیه تیر باید هر سه مولفه جابجایی را در تیر در نظر گرفت. در مجموع با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو یک مدل تیر با پنج مؤلفه میدان شامل سه مولفه جابه‌جایی بر روی تار میانی و دو مولفه چرخش سطح مقطع در نظر گرفته شده است. انرژی کرنشی و همچنین انرژی جنبشی تیر فرمول‌بندی شده و با استفاده از روش ریتز این دو انرژی گسسته سازی شده‌اند. به منظور تقریب در روش ریتز از چندجمله‌ای‌های چبیشف استفاده شده است که یک مجموعه چندجمله‌ای متعامد بوده و دقت همگرایی بالایی دارند. با استفاده از حل مقدار ویژه فرکانس‌های طبیعی تیر به دست آمده است. ابتدا صحت سنجی میان کار حاضر و نتایج موجود صورت گرفته است. سپس تحقیقات گسترده‌ای به منظور بررسی پارامترهای متنوعی همچون نحوه توزیع گرافن، کسر وزنی گرافن، شرایط مرزی تیر، زاویه پیچش تیر و همچنین نرخ تغییر زاویه پیچش تیر صورت گرفته است. نتایج این مطالعات در قالب شکل و جداولی ارائه گردیده است. با بررسی نتایج به دست آمده از تحقیق حاضر می‌توان نتایج کلی کار را به شرح زیر بیان نمود:

- با مطالعه ارتعاشات آزاد تیر پیچیده شده تقویت شده با صفحات گرافن مشخص شد که همواره بالاترین فرکانس‌های طبیعی مربوط به تیری با توزیع $FG - X$ و کمترین فرکانس‌های طبیعی مربوط به تیری با توزیع $FG - 0$ است.
- با بررسی فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از تیر پیچیده شده نانوکامپوزیت می‌توان نتیجه گرفت که با بالاتر رفتن درصد وزنی و یا درصد حجمی تقویت کننده نانو، فرکانس‌های طبیعی تیر نیز افزایش می‌یابد. اضافه کردن تنها درصد کمی از تقویت کننده گرافن (به عنوان مثال یک درصد) نیز تأثیر چشمگیری در افزایش فرکانس‌های طبیعی دارد.
- با بالا رفتن تعداد لایه‌های ماده کامپوزیتی هدفمند در توزیع $FG - X$ فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. حال آنکه در نقطه مقابل در توزیع $FG - 0$ و یا $FG - V$ شاهد کاهش فرکانس‌های طبیعی هستیم.
- یک کامپوزیت هدفمند ۱۰ لایه تقریب بسیار مناسبی برای یک ماده هدفمند با تغییرات پیوسته خواص در راستای ضخامت می‌باشد.
- افزایش زاویه پیچش تیر تأثیر متفاوتی را بر روی فرکانس‌های طبیعی دارد. به عنوان مثال برای شرایط مرزی و هندسه به کار رفته در این تحقیق نشان داده شد که با بالا رفتن زاویه پیچش فرکانس اول و سوم افزایش می‌یابد حال آنکه فرکانس دوم و چهارم کاهش می‌یابد.

- تأثیر نرخ زاویه پیچش در مقادیر بالای زاویه پیچش بیشتر مشهود است.
- تأثیر نرخ زاویه پیچش در فرکانس‌های بالای تیر بیشتر مشهود است.
- با بالا رفتن نرخ زاویه پیچش فرکانس‌های تیر ممکن است کاهش یا افزایش پیدا کنند.

مراجع

- [1] Yang, J., Wu, H., and Kitipornchai, S., "Buckling and Postbuckling of Functionally Graded Multilayer Graphene Platelet-reinforced Composite Beams", *Composite Structures*, Vol. 161, pp. 11-118, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.11.048>, (2017).
- [2] Wu, H., Yang, J., and Kitipornchai, S., "Dynamic Instability of Functionally Graded Multilayer Graphene Nanocomposite Beams in Thermal Environment", *Composite Structures*, Vol. 162, pp. 244-254, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.001>, (2017).
- [3] Song, M., Kitipornchai, S., and Yang, J., "Free and Forced Vibrations of Functionally Graded Polymer Composite Plates Reinforced with Graphene Nanoplatelets", *Composite Structures*, Vol. 159, pp. 579-588, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.09.070>, (2017).
- [4] Kitipornchai, S., Chen, D., and Yang, J., "Free Vibration and Elastic Buckling of Functionally Graded Porous Beams Reinforced by Graphene Platelets", *Materials and Design*, Vol. 116, pp. 656-665, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.12.061>, (2017).
- [5] Reddy, R.M.R., Karunasena, W., and Lokuge, W., "Free Vibration of Functionally Graded-GPL Reinforced Composite Plates with Different Boundary Conditions", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 78, pp. 147-156, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.04.019>, (2018).
- [6] Arefi, M., Bidgoli, E.M.R., Dimitri, R., and Tornabene, F., "Free Vibrations of Functionally Graded Polymer Composite Nanoplates Reinforced with Graphene Nanoplatelets", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 81, pp. 108-117, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.07.036>, (2018).
- [7] Feng, C., Kitipornchai, S., and Yang, J., "Nonlinear Free Vibration of Functionally Graded Polymer Composite Beams Reinforced with Graphene Nanoplatelets (GPLs)", *Engineering Structures*, Vol. 140, pp. 110-119, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.02.052>, (2017).
- [8] Li, Q., Wu, D., Chen, X., Liu, L., Yu, Y., and Gao, W., "Nonlinear Vibration and Dynamic Buckling Analyses of Sandwich Functionally Graded Porous Plate with Graphene Platelet Reinforcement Resting on Winkler–Pasternak Elastic Foundation", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 148, pp. 596-610, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.09.020>, (2018).
- [9] Chen, D., Yang, J., and Kitipornchai, S., "Nonlinear Vibration and Postbuckling of Functionally Graded Graphene Reinforced Porous Nanocomposite Beams", *Composites*

Science and Technology, Vol. 142, pp. 235-245, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2017.02.008>, (2017).

[10] Wu, H., Yang, J., and Kitipornchai, S., "Parametric Instability of Thermo-mechanically Loaded Functionally Graded Graphene Reinforced Nanocomposite Plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 135, pp. 431-440, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.11.039>, (2018).

[11] Sahmani, S., and Aghdam, M.M., "Small Scale Effects on the Large Amplitude Nonlinear Vibrations of Multilayer Functionally Graded Composite Nanobeams Reinforced with Graphene-nanoplatelets", *International Journal of Nanoscience and Nanotechnology*, Vol. 14, pp. 207-227, (2018).

[12] Guo, H., Cao, Sh., Yang, T., and Chen, Y., "Vibration of Laminated Composite Quadrilateral Plates Reinforced with Graphene Nanoplatelets using the Element-free IMLS-Ritz Method", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 142-143, pp. 610-621, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.05.029>, (2018).

[13] Qaderi, S., and Ebrahimi, F., "Vibration Analysis of Polymer Composite Plates Reinforced with Graphene Platelets Resting on Two-parameter Viscoelastic Foundation", *Engineering with Computers*, Vol. 33, pp. 195-208, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00366-020-01066-z>, (2020).

[14] Pashmforoush, F., "Statistical Analysis on Free Vibration Behavior of Functionally Graded Nanocomposite Plates Reinforced by Graphene Platelets", *Composite Structures*, Vol. 213, pp. 14-24, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.01.066>, (2019).

[15] Barati, M.R., and Shahverdi, H., "Finite Element Forced Vibration Analysis of Refined Shear Deformable Nanocomposite Graphene Platelet-reinforced Beams", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 42, pp. 33, DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-019-2118-8>, (2020).

[16] Shen, H-Sh., Lin, F., and Xiang, Y., "Nonlinear Vibration of Functionally Graded Graphene-reinforced Composite Laminated Beams Resting on Elastic Foundations in Thermal Environments", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 90, pp. 899-914, DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3701-0>, (2017).

[17] Yang, J., Chen, D., and Kitipornchai, S., "Buckling and Free Vibration Analyses of Functionally Graded Graphene Reinforced Porous Nanocomposite Plates Based on Chebyshev-Ritz Method", *Composite Structures*, Vol. 193, pp. 281-294, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.090>, (2018).

[18] Banerjee, J.R., "Free Vibration of a Twisted Beam using the Dynamic Stiffness Method", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 6703-6722, DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00119-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00119-6), (2001).

[19] Banerjee, J.R., "Development of an Exact Dynamic Stiffness Matrix for Free Vibration Analysis of a Twisted Timoshenko Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 270, pp. 379-401, DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00633-3](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00633-3), (2004).

- [20] Shenan, A.G., Malekzadeh, P., and Ziaee, S., "Vibration Analysis of Pre-twisted Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Beams in Thermal Environment", *Composite Structures*, Vol. 162, 325–340, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.009>, (2017).
- [21] Leung, A.Y.T., "Dynamics and Buckling of Thin Pre-twisted Beams under Axial Load and Torque", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 10, pp. 957–981, DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455410003956>, (2010).
- [22] Chen, W.R., Hsin, S.W., Chu, T.H., "Vibration Analysis of Twisted Timoshenko Beams with Internal Kelvin-Voigt Damping", *Procedia Engineering*, Vol. 11, pp. 541-572, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.12.053>, (2013).
- [23] Zeng, J., Zhao, C., Ma, H., Wen, B., "Dynamic Modeling and Coupling Characteristics of Rotating Inclined Beams with Twisted-shape Sections", *Frontiers of Mechanical Engineering*, Vol. 15(3), pp. 374-389, DOI: <https://doi.org/10.1007/s11465-019-0580-8>, (2020).
- [24] Ondra, V., Titurus, B., "Free Vibration Analysis of a Rotating Pre-twisted Beam Subjected to Tendon-induced Axial Loading", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 461(24), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114912>, (2019).
- [25] Rosen, A., Loewy, R.G., and Mathew, B., "Use of Twisted Principal Coordinates and Non-physical Coordinates in Blade Analysis", *Vertica*. 11, pp. 541-572, (1987).

فهرست نمادهای انگلیسی

A	مساحت مقطع تیر
a_{GPL}	طول نانوصفحات گرافن
b	عرض تیر کامپوزیتی
b_{GPL}	عرض نانوصفحات گرافن
D_{ij}	متغیر کمکی
E_{ij}	متغیر کمکی
$E^{(k)}$	مدول الاستیسیته لایه k
E_{GPL}	مدول الاستیسیته نانوصفحات تقویت کننده
E_m	مدول الاستیسیته ماده زمینه
F_{ij}	متغیر کمکی
h	ضخامت تیر کامپوزیتی
I	ممان اینرسی
K	نرخ پیچش

شماره هر لایه	k
ماتریس سفتی	$[K]$
ضریب اصلاح برش	K_s
طول تیر کامپوزیتی	L
ماتریس جرم	$[M]$
تعداد کل لایه‌های تیر کامپوزیتی	N_L
مختصات نقطه دلخواه	P
مدول برشی	Q
انرژی جنبشی	T
توابع چبیشف	$T_n(y)$
زمان	t
انرژی کرنشی	U
جابه‌جایی در راستای x	u
بردار جابه‌جایی راستای x	$\{U\}$
درصد حجمی نانوصفحات گرافن	$V_{GPL}^{(k)}$
درصد حجمی نانوصفحات گرافن در کل مقطع تیر	V_{GPL}^*
کسر حجمی تقویت کننده نانو	V_{GPL}
کسر حجمی ماده زمینه	V_m
حجم	V
جابه‌جایی در راستای y	v
بردار جابه‌جایی راستای y	$\{V\}$
کسر وزنی نانوصفحات گرافن	W_{GPL}
جابه‌جایی در راستای z	w
بردار جابه‌جایی راستای z	$\{W\}$
بردار جابه‌جایی وابسته به زمان	X

نمادهای یونانی

کرنش برشی	γ_{ij}
اوپراتور وریشنال	δ
کرنش نرمال	ϵ_{ii}
ضریب طولی	η_L
ضریب عرضی	η_T
زاویه چرخش سطح مقطع حول محور x	θ
ضریب پواسون	ν

ν_{GPL}	ضریب پواسون نانوصفحات گرافن
ν_m	ضریب پواسون ماده زمینه
ξ_L	ضریب هندسی طولی
ξ_T	ضریب هندسی عرضی
ρ	چگالی جرمی
ρ_{GPL}	چگالی جرمی نانوصفحات گرافن
ρ_m	چگالی جرمی ماده زمینه
σ_{ij}	تنش
ψ	زاویه چرخش سطح مقطع حول محور \mathbf{z}
ω	فرکانس طبیعی
Φ	زاویه پیچش تیر
Φ_0	زاویه پیچش اولیه تیر
Ω	پارامتر بدون بعد فرکانس

Free Vibration Analysis of Twisted Composite Beam Reinforced with Graphene Platelets

Sahar Goudarzi Hafshejani

MS.c., Shahrekord University, Mechanical Engineering Department, sahangoudarzi1994@gmail.com

* Corresponding author: **Yaser Kiani**

Associate Professor, Shahrekord University, Faculty of Engineering, y.kiani@sku.ac.ir

Abstract

In this work, free vibrations of a composite beam is investigated. Considered composite beam is assumed with the presence of pre-twist. One of the beam is without twist while the other end of the beam has the maximum twist angle. Twist rate in the beam is assumed to be non-constant where a higher order polynomial variation of twist angle is assumed. Composite beam of this study is composed of a number of layers where each layer of the beam is reinforced with graphene platelets. Layers may have different amount of graphene which leads to the functionally graded composite laminated beam with pre-twist. Elasticity modulus of the beam is estimated by means of the Halpin-tsai rule while the mass density and Poisson's ratio are assumed using the simple rule of mixtures approach. Timoshenko beam theory is adopted to estimate the displacement field in the beam. Due to the present of twist, five degrees of freedom containing three displacements and two cross-section rotations are considered. Using the Hamilton principle and with the aid of the Ritz method, the equations of motion are discretized. Shape functions of the Ritz method are constructed by means of the Chebyshev polynomials. This set of functions are orthogonal and has high rate of convergency. Matrix representation of the governing equations is obtained using the Chebyshev-Ritz method. The governing equations of the free vibration motion are established and solved as an eigenvalue problem. Results of this study cover the case of free vibration of a graphene platelet reinforced composite laminated pre-twisted beam. At first results of this study are validated with the available data in the open literature and also the required number of shape functions in the Ritz method are estimated through the convergence studies. After that using parametric studies, the influences of different parameters such as number of layers of composite, boundary conditions, twist angle, twist rate, graphene weight fraction and their pattern are explored. Numerical results of this study show that by increasing the weight fraction of graphene platelets, natural frequencies of the beam are enhanced. Also through adoption of a proper pattern, the natural frequencies in the beam may be controlled. The effect of twist angle on the frequencies of the beam is shown. It is depicted that increasing the twist angle may increase/decrease the frequencies depending on the mode number.

Keywords: Composite beam, Twisted beam, Graphene platelets, Halpin-Tsai rule, Ritz method