

طراحی قانون هدایت برای فاز نهایی ماموریت فرود سه بعدی بوستر با روش بسط مرتبه بالا

در این مقاله، طراحی قانون هدایت بهینه با در نظر گرفتن شرایط و زمان نهایی مقید برای مرحله نهایی مسئله فرود سه بعدی بوستر یک ماهواره بر مورد بررسی قرار گرفته است. هدف اصلی تحقیق، بررسی نحوه توسعه و افزایش قابلیت روش بسط مرتبه بالای برداری برای طراحی قانون هدایت بهینه است. این قانون نسبت به انحرافات بزرگ اولیه متغیر حالت، حساسیت حداقلی دارد و همچنین امکان پیاده سازی آنلاین آن با حداقل محاسبات در عمل وجود دارد. اثر بخشی روش بسط مرتبه بالا با شبیه سازی مونت کارلو مورد بررسی قرار گرفته است و نشان داده شد که قانون هدایت بر اساس بسط مرتبه بالای برداری نه تنها از دقت مناسبی برخوردار است بلکه می تواند جایگزین خوبی برای مسئله تعقیب مسیر نامی باشد.

مرتضی شرفی^۱

دکتری

ناصر رهبر^۲

دانشیار

علی محرم پور^۳

استادیار

عبدالرضا کاشانی نیا^۴

استادیار

واژه‌های راهنما: بسط مرتبه بالای برداری، کنترل بهینه غیر خطی، فرود بوستر، هدایت بهینه

۱- مقدمه

مسئله فرود عمودی در حوزه‌ی برنامه‌های فضایی انواع مختلفی دارند. مثلاً فرود ماه‌نشین نوعی فرود نرم است که بدون تأثیرات نیروهای آیرودینامیک حل می‌شود و برخی از ماموریت‌های منظومه شمسی از جمله فرود روی سطح مریخ از نوعی است که در هنگام فرود وسیله یا ربات کاوش‌گر بر روی یک بالشتک فرود می‌آید. منظور از فرود نرم فرآیند فرودی است که هم بردار سرعت و هم موقعیت در نقطه فرود مقادیری نزدیک به صفر داشته باشند. مانند فرود بوستر ماهواره‌برهای فالکون اسپیس ایکس. در پژوهش‌های اخیر قانون هدایت بهینه‌ی صریحی برای مسئله فرود ماه‌نشین طراحی شده است که در آن هدف مینیمم کردن تغییرات فرمان شتاب است [۱].

این مسئله علاوه بر قیودی که بر اندازه نیروی پیشران قرار داده شده است مسیر بهینه با توجه به انحراف‌های اولیه به شکل آنلاین تولید می‌شوند [۲].

^۱ دکتری، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، ایران sharafi@mut.ac.ir

^۲ نویسنده مسؤل، دانشیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، ایران rahbar_nas@mut.ac.ir

^۳ استادیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، ایران moharampour@mut.ac.ir

^۴ استادیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، ایران akashaninia@mut.ac.ir

محققان از روش بهینه‌سازی PSO برای استخراج مسیر بهینه با کمترین خطا در زمان نهایی با حداقل سوخت مصرفی برای فرود بوستر یک ماهواره‌بر استفاده کرده‌اند [۳]. در این تحقیق فرض می‌شود فرمان اندازه‌ی نیروی پیشران به شکل bang-off-bang و جهت آن به شکل پیوسته با استفاده از بهینه‌سازی استخراج می‌شود. این مسئله بر روی مدل موشک فالکون ۹ کمپانی اسپیس ایکس پیاده شده است. در تحقیق دیگری مسئله فرود بوستر با کمک روش شبه‌طیفی مورد مطالعه قرار گرفته است اما این بار از روش Conjugate Gradient که روشی مرسوم و کلاسیک برای بهینه‌سازی است برای بدست آوردن پاسخ معادلات شبه‌طیفی استفاده می‌شود [۴]. در سال ۲۰۰۸ روش بسط مرتبه بالا با استفاده از جبر دیفرانسیلی برای حل مسائل دینامیک فضایی مورد مطالعه قرار گرفت [۵]. جبر دیفرانسیلی ابزاری است که به کمک آن عملیات جبری بر روی توابع نه تنها برای مقدار تابع در محل متغیر مستقل انجام می‌گیرد بلکه مشتقات مراتب بالا را نیز می‌توان در معادلات دخیل کرد. بنابراین اطلاعات بیشتری را می‌توان از حل یک مسئله استخراج کرد. این روش در سال ۱۹۹۹ توسط آقای مارتین برز برای حل مسائل در فیزیک ذرات توسعه داده شد [۶]. روش دیگری برای هدایت مقاوم در هدایت مسائل فضایی نیز بر اساس روش مرتبه بالای جبر دیفرانسیلی بررسی و پیشنهاد شده است [۷]. در این روش مسئله کنترل بهینه برای تولید فرمان هدایت حل شده است [۵]. تفاوت در این است که این بار محقق‌ها محاسبه اصلاح فرمان هدایت در اثر انحراف در متغیر حالت را هدف قرار داده‌اند. در این مقاله دو مثال بررسی شده‌اند که اولی مسئله هدایت فضاپیما با پیشران پیوسته از زمین تا مریخ است و مثال دوم همانند مسئله بهره‌گیری از پسا برای کاهش سرعت در سفر به مریخ است که در مرجع قبل نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. در مطالعه‌ای دیگر روشی مشابه با مراجع قبلی برای چند مثال مختلف پیاده‌سازی شده است به‌علاوه‌ی آن که استخراج معادلات حاکم بر دینامیک مسئله هدایت مورد نظر ارائه شده است [۸]. در مطالعه‌ی دیگر، با روش جبر دیفرانسیلی این بار مسئله مورد نظر با مقادیر محدودشده اندازه نیروی پیشران مدل شده است [۹]. این تغییر در مدل‌سازی مسئله به این خاطر در نظر گرفته شده که در صورت لحاظ نکردن این محدودیت بر اندازه نیروی پیشران در هدایت، در شروع مسئله احتمالاً اندازه فرمان هدایت بزرگ بوده و در مسائل واقعی نیاز است که این مقدار محدود شود چراکه از توان فیزیکی مسائل پیاده‌سازی آن خارج است. یکی از کاربردهای جالب توجه دیگر بسط مرتبه بالا، استفاده از جبر دیفرانسیلی است [۱۰]. یک کاربرد متفاوت دیگر از بسط مرتبه بالا و استفاده از جبر دیفرانسیلی در محاسبات آن است که در آن مسئله مورد نظر انتقال یک فضاپیما از نقطه لاگرانژی به سمت ماه و برخورد آن به ماه جهت متلاشی کردن فضاپیما است [۱۱]. از آنجاکه این مانور، آخرین مانور ممکن برای فضاپیما است که می‌تواند به دلیل از رده خارج شدن آن و یا دلایل مشابه باشد بنابراین طبیعتاً سوخت محدودی برای این مانور در نظر گرفته شده و امکان انجام اصلاح متعدد مداری نیست، مسیر تعیین شده برای این مأموریت باید دقیق باشد. گاهی تغییر و انحراف در زمان نهایی مسئله نیز محتمل است که تأثیر غیرقابل چشم‌پوشی‌ای در حل معادلات دینامیک مسئله خواهد گذاشت. با نرمال‌سازی متغیر زمان، یک متغیر حالت به مجموع متغیرهای مسئله اضافه شده که مقدار اولیه این متغیر، معرف زمان نامی است. سپس انحراف از این مقدار به‌عنوان یک پارامتر لحاظ می‌شود و به سادگی انحراف از زمان نهایی در مسئله مدل می‌شود. یک تحقیق مزیت استفاده از بسط مرتبه بالای جبر دیفرانسیلی را برای این موضوع نشان داده است [۱۳]. در این تحقیق، برای ۶ جسم مختلف آنالیز پیش‌بینی انحراف از مسیر مرجع

در نتیجه اغتشاشات ذکر شده با استفاده از بسط مرتبه ۴ جبر دیفرانسیلی انجام شده است. این اجسام هر یک در مدارهای متنوعی قرار دارند و انحراف آن‌ها در اثر اغتشاشات اولیه مطالعه شده است. سپس این مطالعه در تکمیل شده و در این تحقیق احتمال برخورد با استفاده از آنالیز مونت کارلو برآورد شده است [۱۴]. اخیراً نیز این موضوع در پکیج نرم‌افزاری (MISS) تحت پروژه COMPASS اتحادیه اروپا مورد مطالعه قرار گرفته است که در آن روش‌های آنالیز احتمال برخورد فضاپیما یا ماهواره‌ها باهم یا زباله‌های فضایی مطالعه شده است [۱۵].

یک موضوع متفاوت دیگر، با بسط مرتبه بالا، طراحی فیلتر غیرخطی برای ناوبری است [۱۶]. فیلترهای غیرخطی نقش انکارناپذیر و بسیار مهمی در مسائل مهم و دقیق هوافضایی از جمله تعیین مدار در حضور دینامیک‌های غیرخطی، مأموریت گردش به دور اجسام کوچک فضایی، مأموریت فرود بر روی ماه و مریخ، فرود بوستر باقابلیت استفاده مجدد بر روی سطح (زمین یا سیاره دیگر) دارند. برای این مأموریت‌ها دقت اندازه‌گیری‌ها بسیار اهمیت دارند. هرچه دقت اندازه‌گیری‌ها و طبعاً مدل‌سازی دینامیک غیرخطی جهت حذف اغتشاشات دقیق‌تر باشد، متغیرهای حالت و در نتیجه مسیر حرکت پرنده با دقت بالاتر قابل تخمین است. روش مرسوم برای فیلترینگ داده‌های اندازه‌گیری شده روش EKF یا فیلتر کالمن توسعه یافته است. این روش با مدل دینامیک خطی مسئله پیاده‌سازی شده است [۱۷]. اخیراً فیلتری غیرخطی با روش بسط مرتبه بالا با عنوان $HNEKF^1$ و $HAEKF^2$ ارائه شده است که دقتی بالاتر از EKF دارند [۱۸] و [۱۹]. به دلیل پیچیدگی محاسباتی در این دو فیلتر، محاسبات همین دو فیلتر با استفاده از جبر دیفرانسیلی انجام شده است [۱۶] و [۲۰]. بر اساس دستاوردهای این تحقیق نشان داده شده است که با استفاده از جبر دیفرانسیلی و مدل‌سازی مسئله غیرخطی به شکل بسط مرتبه بالا می‌توان فیلترهایی با دقت و کیفیت بالاتر و بار محاسباتی کم را طراحی کرده و به کار برد. نگرشی متفاوت از بسط مرتبه بالا با عنوان بسط مرتبه بالای برداری یا $VHOE^3$ با در نظر گرفتن مسئله کنترل بهینه برای هدایت یک پرنده بدون سرنشین برای فاز فرود معرفی شده است [۲۱]. در این روش از جبر دیفرانسیلی استفاده نشده و ساختار ریاضی مورد نیاز جهت انجام محاسبات با معرفی متغیرهای حساسیت پیاده‌سازی شده است. از معادلات خط دید هم برای استخراج یک قانون هدایت برای پرنده بدون سرنشین که مانورهای متوالی جهت گذر از نقاط از پیش تعیین شده انجام می‌دهد، استفاده می‌شود [۲۲]. سرانجام بسط مرتبه بالای برداری برای طراحی یک قانون هدایت تقریباً بهینه مورد استفاده قرار گرفته است [۲۳]. در این پژوهش مسئله مورد نظر در کنترل بهینه مدل شده است و مأموریت آن هدایت فضاپیما جهت ورود با سرعت زیاد به اتمسفر جهت کاهش سرعت و سپس خروج از آن در زمان و شرایط نهایی مشخص است. در مطالعات اخیر روش بسط مرتبه بالای برداری با روش کنترلی SDRE که عمل تعقیب را انجام می‌دهد مقایسه شده است و در ایده‌ای برای حل آنالین به روش بسط مرتبه بالا معرفی شده است [۲۵] و [۲۶]. در این مقاله، طراحی قانون هدایت بهینه با در نظر گرفتن شرایط و زمان نهایی مقید برای مرحله نهایی مسئله فرود بوستر یک فضاپیما یا ماهواره بر مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. این قانون هدایت علاوه بر اینکه معیاری از بهینگی را برقرار می‌سازد، نسبت به انحرافات بزرگ اولیه متغیر حالت، حساسیت حداقلی

¹ Higher Order Numerical Extended Kalman Filter

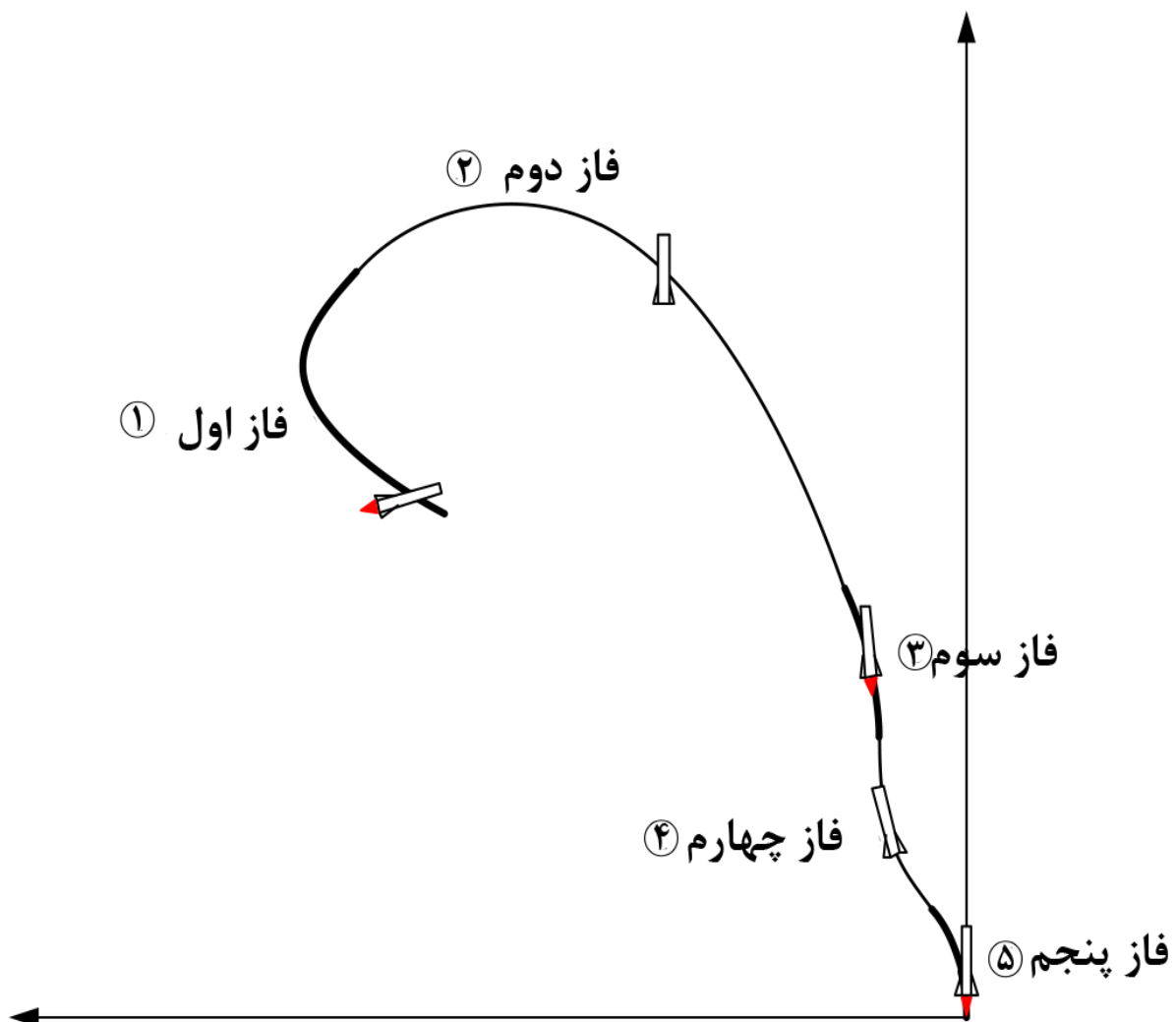
² Hierarchical Adaptive Extended Kalman Filter

³ Vectorized high order expansion

داشته؛ چراکه اثر عبارات غیرخطی در مدل ریاضی مسئله هدایت با استفاده از روش بسط مرتبه بالا لحاظ می شود. هدف اصلی تحقیق، بررسی نحوه توسعه و افزایش قابلیت روش بسط مرتبه بالا برای طراحی قانون هدایت بهینه است. در انتها نشان داده شده که قانون هدایت بر اساس بسط مرتبه بالای برداری بر اساس سری تیلور نه تنها از دقت مناسبی برخوردار است بلکه می تواند جایگزین خوبی برای مسئله تعقیب مسیر نامی باشد.

۲- شرح مسئله

در این پژوهش، مسئله ی فاز نهایی فرود بوستر مد نظر قرار گرفته است. ماموریت بازگشت بوستر شامل فازهای متعددی است. این فازها می تواند با موتورهای روشن یا خاموش در نظر گرفته شود. اما در این تحقیق، نویسندگان تنها فاز پایانی را مد نظر قرار داده اند. فرض شده است که در این مسئله، موتور بوستر همواره فعال بوده، بردار تراست همواره در راستای منفی محور طولی بوستر است و نرخ تغییرات آن به عنوان متغیر کنترلی در نظر گرفته شده است. هدف ارضای شرایط نهایی با دقت بالا در نقطه فرود می باشد. به همین خاطر مسئله هدایت به شکل یک مسئله کنترل بهینه با شرایط نهایی مقید مدل خواهد شد.

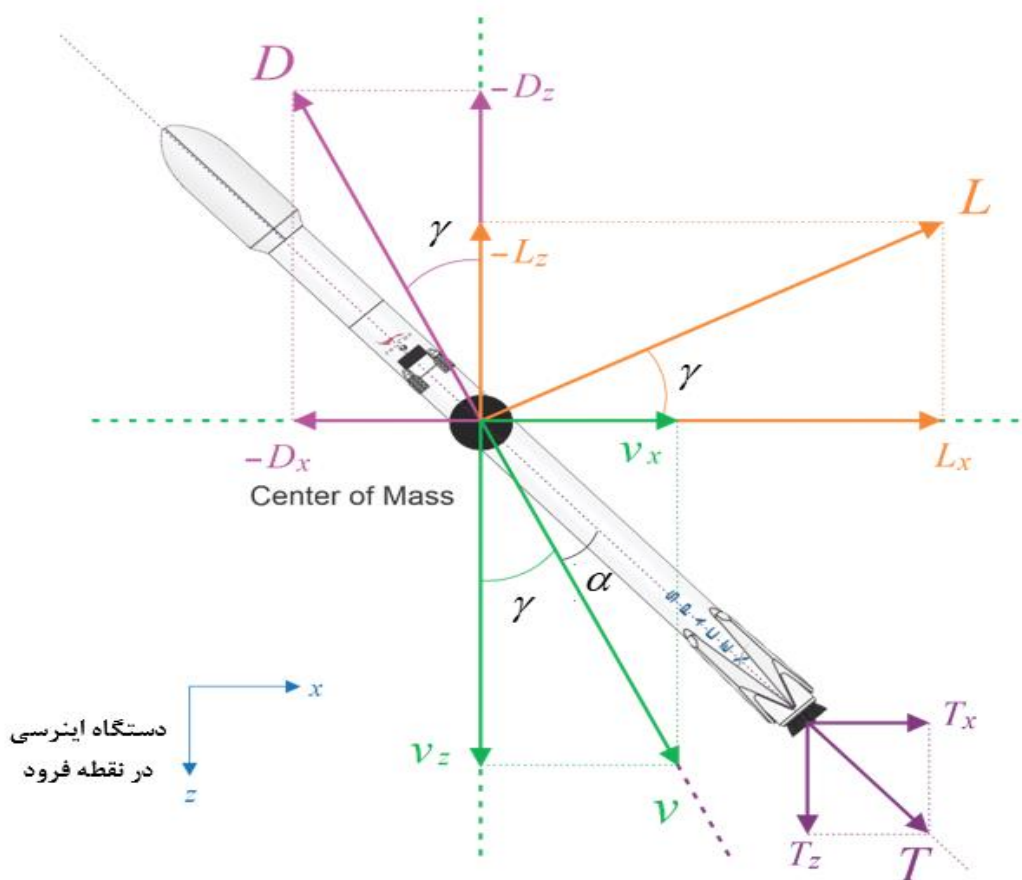


شکل ۱- تصویر شماتیک مراحل فرود بوستر [۴]

۲-۱- مدل ریاضی برای شبیه‌سازی

با فرض جسم ذره‌ای و زمین تخت مدل ریاضی دینامیک بوستر به فرم معادله (۱) ارائه می‌گردد [۴].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \sin \gamma \cos \chi \\ \dot{y} &= v \sin \gamma \sin \chi \\ \dot{z} &= v \cos \gamma \\ \dot{v} &= -\frac{D}{m} + g \cos \gamma - T' \cos \alpha \cos \beta \\ \dot{\chi} &= \frac{Y}{mv \sin \gamma} - \frac{T' \cos \alpha \sin \beta}{v \sin \gamma} \\ \dot{\gamma} &= \frac{L}{mv} - \frac{T' \sin \alpha}{v} - \frac{g}{v} \sin \gamma \\ \dot{T}' &= T'_{rate} \\ \dot{\alpha} &= \alpha_{rate} \\ \dot{\beta} &= \beta_{rate} \\ \dot{m} &= -\frac{mT'}{I_{sp}g_0} \end{aligned} \quad (1)$$



شکل ۲- نیروها و زوایای حاکم بر مدل بوستر

در این رابطه متغیرهای حالت $x, y, z, v, \chi, \gamma, T', \alpha, \beta$ و m هستند که به ترتیب برد، انحراف جانبی، قرینه ارتفاع، اندازه سرعت، زاویه سمت، زاویه مسیر، نیروی تراست تقسیم بر جرم، زاویه حمله، زاویه سرش جانبی و جرم هستند. از طرفی دیگر T'_{rate} و α_{rate} و β_{rate} متغیرهای کنترلی مسئله هستند که به ترتیب نرخ اندازه نیرو تراست نرمال شده، نرخ زاویه حمله و نرخ زاویه سرش جانبی هستند. دقت شود که $T' = T/m$ است. در این مجموعه روابط، همان طور که بیان شد چگالی و جاذبه به شکل کامل با روابط:

$$g = g_0 \left(\frac{R_E}{R_E - z} \right)^2, \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{h}{h_0}} \quad (2)$$

مدل می‌شوند. در این رابطه $h = -z$ بوده، $h_0 = 7.5 \text{ km}$ و $\rho_0 = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ بوده که به ترتیب ارتفاع مرجع و چگالی سطح دریا هستند و g_0 جاذبه در ارتفاع صفر و معادل با 9.81 متر بر مجذور ثانیه $R_E = 6378 \text{ km}$ و شعاع زمین است. از طرفی برای آن که تمامی ورودی‌های کنترلی مسئله رابطه خطی در معادلات دیفرانسیل داشته باشند، برای اندازه نیروی تراست نرمال شده، یک معادله دیفرانسیل اضافی در نظر گرفته شده و نرخ تغییرات آن به عنوان متغیر کنترلی در نظر گرفته می‌شود (همانند زاویه حمله و زاویه سرش جانبی که این چنین در نظر گرفته شده است). همچنین فرض شده که بردار تراست در راستای محور طولی بوستر قرار دارد. روابط مربوط به محاسبه نیروهای آیرودینامیک به صورت هستند:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \rho v^2 s C_{L\alpha} \sin 2\alpha \\ D &= \frac{1}{2} \rho v^2 s (C_{D_0} + C_{D\alpha} \sin(2\alpha - \frac{\pi}{2})) \\ Y &= \frac{1}{2} \rho v^2 s C_{L\alpha} \sin 2\beta \end{aligned} \quad (3)$$

مدل آیرودینامیک ارائه شده از [۴] گرفته شده که در آن پارامترهای مربوط به مدل سازی به شرح زیر هستند:

$$\begin{aligned} C_{D_0} &= 9.4 \\ C_{D\alpha} &= 6.5 \frac{1}{\text{deg}} \\ C_{L\alpha} &= 4 \frac{1}{\text{deg}} \\ s &= 10.752 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

در رابطه (۳) عبارت ρ معرف چگالی اتمسفر است که با مدل استاندارد COESA^۱ محاسبه شده است. باید خاطر نشان کرد، اگرچه، مدل دینامیکی مسئله از نوع مدل جسم ذره‌ای است، اما بدلیل حضور

^۱ Committee on Extension to the Standard Atmosphere

نیروهای آیرودینامیک، متغیر حالت برای زاویه حمله در نظر گرفته شده و نرخ تغییرات آن به عنوان یک متغیر کنترلی لحاظ شده است.

۲-۲- حل نامی مسأله هدایت

قدم اول برای حل مسئله هدایت مرتبه بالا، استخراج حل نامی مسئله است. از GPOPS^۱ برای این منظور استفاده خواهد شد. توجه شود که در حل GPOPS نیز همانند شبیه سازی جرم متغیر در نظر گرفته شده است. برای مسئله مورد نظر هدف ارضای شرایط نقطه فرود با در نظر گرفتن شرایط اولیه برد ۱۰۰۰- متر، فاصله عرضی ۲۵۰- متر، ارتفاع ۴۴۰۰ متر است در حالی که جرم اولیه ۴۷۰۰۰ کیلوگرم، سرعت اولیه ۴۰۰ متر بر ثانیه، زاویه مسیر ۱۰ درجه و زاویه سمت ۱۴/۰۶ درجه است. برای بدست آوردن حل به کمک GPOPS تابع هزینه زیر تعریف می شود:

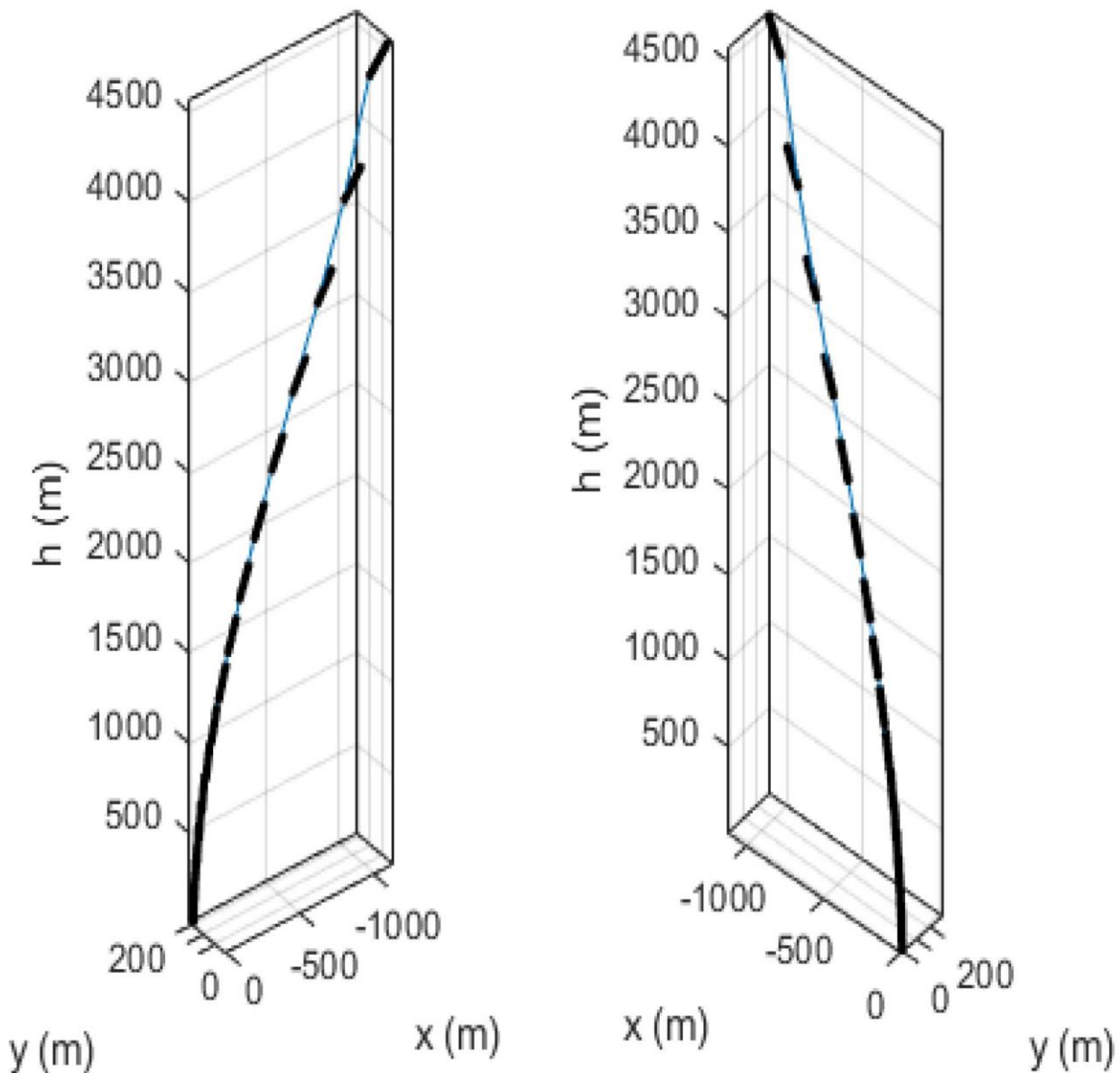
$$J = \int_0^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} 0.1 T'^2 + \frac{1}{2} 200 T'_{rate}{}^2 + \frac{1}{2} 0.1 \left(\frac{180}{\pi} \alpha \right)^2 + \frac{1}{2} 0.1 \left(\frac{180}{\pi} \beta \right)^2 + \frac{1}{2} 1 \left(\frac{180}{\pi} \gamma \right)^2 + \frac{1}{2} 0.1 \left(\frac{180}{\pi} \chi \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha_{rate}^2 + \frac{1}{2} \beta_{rate}^2 \right\} dt \quad (5)$$

در این تابع هزینه، نیروی موتور، زاویه حمله، زاویه سرش جانبی و زاویه مسیر از متغیرهای حالت، وزن دهی شده اند. بعلاوه، تمامی متغیرهای کنترلی نیز در نظر گرفته شده اند تا بوسیله حد اقل سوخت مصرفی و با حد اقل نرخ چرخش فرود آید. نتایج بهینه سازی در نمودارهای زیر نشان داده شده است. برای استخراج این مسیر نامی، فرم کامل معادلات مسئله به شکل چگالی، جاذبه و جرم متغیر در نظر گرفته شده است و مدل سازی نیز به صورت سه بعدی می باشد. شرایط نهایی نیز به شکل زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} x(t_f) &= 0 \\ y(t_f) &= 0 \\ z(t_f) &= -1 \\ v(t_f) &= 0.25 \\ \gamma(t_f) + \alpha(t_f) &= \theta(t_f) = 0 \\ \chi(t_f) &= \chi(0) \end{aligned} \quad (6)$$

^۱ نرم افزار GPOPS یکی از قدرتمندترین ابزارهای محاسباتی برای بهینه سازی پویا است. این نرم افزار قابلیت حل مسائل بهینه سازی کنترل پویا را با محدودیت های غیرخطی داراست و برای طراحی و بهینه سازی سیستم های دینامیکی در صنایع مختلف استفاده می شود. هدف کلی از استفاده از GPOPS، بهینه سازی دینامیکی سیستم های فیزیکی است. این سیستم ها می توانند شامل سیستم های مکانیکی، الکتریکی، الکترونیکی، هیدرولیکی، پنوماتیک، مهندسی شیمی، بیوپزشکی، هوافضا و ... باشند. در هر یک از این حوزه ها، مسائل بهینه سازی دینامیکی وجود دارد که باید با استفاده از نرم افزار GPOPS حل شوند. برای استفاده از GPOPS، ابتدا باید معادلات دینامیکی سیستم تعریف شود و قیود مرتبط با مسأله کنترلی را مشخص شود. به عنوان مثال، می توان محدودیت هایی را مرتبط با حداکثر و حداقل سرعت و شتاب، حداکثر و حداقل بار، حداکثر و حداقل زاویه، حداکثر و حداقل توان و ... تعیین کرد. بعد از تعریف معادلات و محدودیت های کنترل، کاربر می تواند با استفاده از روش های بهینه سازی مختلف، مسئله بهینه سازی کنترل پویا را حل کند. GPOPS از روش های بهینه سازی مانند روش نیوتن-رافسون، روش های تقریبی خطی، روش های تقریبی غیرخطی و ... استفاده می کند. نرم افزار GPOPS در بسیاری از صنایع، از جمله هوافضا، خودروسازی، رباتیک، مهندسی شیمی و ... استفاده می شود. استفاده از این نرم افزار به مهندسان و دانشمندان کمک می کند تا سیستم های دینامیکی را به صورت بهینه طراحی و بهبود دهند و در نتیجه باعث افزایش کارایی و کاهش هزینه های سیستم های کنترل شوند.

بر اساس این تعریف مقدار نهایی برد و برد خارج از صفحه برابر با صفر است در حالی که ارتفاع نهایی ۱ متر در نظر گرفته می‌شود. سرعت نهایی نیز معادل با $0/25$ متر بر ثانیه در نظر گرفته می‌شود. در تنظیمات شرایط نهایی این قید نیز در نظر گرفته شده است که مجموع زاویه حمله و زاویه مسیر در پایان صفر باشد. این قید که در رابطه (۶) داده شده به این معنی است که زاویه فراز بوستر یعنی $\theta(t_f)$ در لحظه پایانی برابر با صفر شود که خود به معنای فرود به شکل عمودی (از نظر وضعیت بدنه بوستر) خواهد بود. در آخر هم، زاویه سمت نهایی باید در پایان برابر با همان زاویه سمت اولیه باشد. در نهایت پس از حل GPOPS علاوه بر حصول مقادیر اولیه و نهایی متغیرهای حالت که به عهده GPOPS گذاشته شده بود، زمان کل ماموریت، تاریخچه زمانی تمام متغیرهای حالت، شبه حالت و متغیرهای کنترل توسط GPOPS تعیین می‌شود. در شکل (۳) مسیر حرکت سه بعدی و تاریخچه زمانی آن داده شده است.



شکل ۳- مسیر سه بعدی نامی از دو نما

علاوه بر آن به دلیل طبیعت حل‌های عددی که تکرارشونده هستند، امکان واگرایی حل هم وجود دارد. اما یک روش مناسب برای حل این مشکل، جایگزینی مسیر نامی به کمک روش بسط مرتبه بالا است که بار محاسباتی آن آفلاین بوده؛ اما با یک بار محاسبه ضرایب، می‌توان از آن به شکل آنلاین استفاده کرد و متناسب با اندازه انحراف اولیه، فرمان کنترل بهینه و مسیر بهینه را جایگزین کرد. در بخش بعد در مورد نحوه پیاده‌سازی این روش صحبت خواهد شد.

۳-۱- بسط مرتبه بالای برداری برای مسائل چندمتغیره

در این بخش ابزار ریاضی مؤثر برای مدل‌سازی مسئله چندمتغیره به شکل بسط مرتبه بالای برداری ارائه شده است و الگوریتم‌های مورد نیاز برای پیاده‌سازی این روش بیان شده‌اند. لذا در روش ارائه شده با تعریف اپراتورهایی، ظاهر پیاده‌سازی مسئله چندبعدی همانند مسئله یک‌بعدی خواهد بود چراکه محاسبات آن به شکل روابط ماتریسی-برداری پیاده‌سازی می‌شوند. با این روش حتی سری تیلور نیز برای یک تابع با چند متغیر مستقل به شکل یک رابطه ساده قابل‌نمایش است. فرض کنیم که مسئله مورد نظر برای بسط سری تیلور یک مسئله دینامیکی (مثلاً کنترل بهینه) با دو متغیر (مثلاً یک متغیر حالت و یک متغیر شبه حالت) است:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \lambda) \\ \dot{\lambda} &= g(x, \lambda) \end{aligned} \quad (7)$$

اکنون با بسط سری تیلور:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x_n, \lambda_n) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda} 2\delta x \delta \lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \delta \lambda^2 \\ &+ \dots \\ \dot{\lambda} &= g(x_n, \lambda_n) + \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda} 2\delta x \delta \lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} \delta \lambda^2 \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (8)$$

این روابط را همچنان می‌توان به شکل فشرده‌تری نیز نوشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_n, \lambda_n) \\ g(x_n, \lambda_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x^2 \\ 2\delta x \delta \lambda \\ \delta \lambda^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

+ ...

و در آخر اگر فرض کنیم $\delta z = [\delta x \quad \delta \lambda]^T$ ، می‌توان رابطه (۹) را با بسط برداری کاملاً خلاصه نویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_n, \lambda_n) \\ g(x_n, \lambda_n) \end{bmatrix} + \Delta_1 \langle \delta z \rangle^1 + \Delta_2 \langle \delta z \rangle^2 \quad (10)$$

که در این رابطه:

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix}$$

اگر بخشی نامی را نیز به سمت چپ معادله برده و ساده‌سازی کنیم، نتیجه می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \Delta_1 \langle \delta z \rangle^1 + \Delta_2 \langle \delta z \rangle^2 + \dots \quad (12)$$

و از آن جا که:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \delta z = \frac{d}{dt} \langle \delta z \rangle^1 \quad (13)$$

در نهایت:

$$\begin{aligned} \langle \delta \dot{z} \rangle^1 &= \Delta_1 \langle \delta z \rangle^1 + \Delta_2 \langle \delta z \rangle^2 + \dots \\ \langle \delta \dot{z} \rangle^1 &= \sum_{i=1}^m \Delta_i \langle \delta z \rangle^i \end{aligned} \quad (14)$$

۳-۲- حل عمومی مسئله کنترل بهینه مرتبه بالا

با فرض این که مسئله کنترل بهینه به شکل زیر باشد:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= f(s, \lambda) \\ \dot{\lambda} &= g(s, \lambda) \end{aligned} \quad (15)$$

در این مدل فرض شده است که فرامین کنترل بهینه به شکل صریح بر حسب متغیرهای حالت و شبه حالت قابل محاسبه و جایگذاری در مسئله هستند تا بتوان معادلات دینامیکی را به شکل فوق نوشت. در رابطه (۱۶)،

s و λ به ترتیب بردار متغیر حالت و شبه حالت هر کدام با n المان هستند. همچنین توابع f و g تا مرتبه دلخواه m مشتق پذیرند. اکنون با فرض اینکه $z = [s \ \lambda]^T$ است، مجموعه معادلات بالا را می توان به شکل رابطه زیر خلاصه کرد:

$$\dot{z} = h(z) \quad (16)$$

در گام بعد، با فرض مشخص بودن مقادیر حل نامی برای s و λ ، سمت راست رابطه فوق تا مرتبه دلخواه m با سری تیلور حول حل نامی بسط داده شده و سپس مقادیر مربوط به حل نامی از طرفین معادله حذف می شود. در نتیجه:

$$\delta z = \sum_{i=1}^m \Delta_i \langle \delta z \rangle^i \quad (17)$$

در رابطه فوق، بسط سری تیلور با کمک بسط برداری شرح داده شده نوشته شده است؛ بنابراین Δ_i در این رابطه، ماتریسی با المان های متغیر با زمان است (چون بسط سری تیلور حول حل نامی استخراج می شود) که در بردارنده ضرایب سری تیلور متناسب با ابعاد بردار $\langle \delta z \rangle^i$ است. علاوه بر آن، $\delta z = [\delta s \ \delta \lambda]^T$ است که طبق تعریف نشان دهنده انحرافات متغیرهای حالت و شبه حالت از مقادیر نامی است. در این جا، فرض بر آن است که در مسئله کنترل بهینه تعریف شده، شرایط اولیه و نهایی متغیرهای حالت مقید شده اند. هدف استخراج $\delta \lambda$ و δs برای مقادیر عمومی $\delta s(0) = \delta s_0$ است با شرط این که $\delta s(t_f) = 0$ باشد.

برای یک مقدار مشخص δs_0 ، می توان رابطه (17) را، که یک مسئله مقدار مرزی با مقادیر جدا از هم است، با استفاده از روش های عددی حل کرد. اما در صورت تغییر δs_0 ، مسئله برای این مقدار جدید باید مجدداً حل شود. برای برطرف کردن این مشکل فرض می شود، که $\delta \lambda$ و δs به شکل توابعی نامعین (که باید تعیین شوند) از δs_0 (که انحرافات اولیه هستند) قابل تعریف هستند:

$$\begin{aligned} \delta s &= \delta s(\delta s_0) \\ \delta \lambda &= \delta \lambda(\delta s_0) \end{aligned} \quad (18)$$

در نتیجه برای δz نوشته می شود:

$$\delta z = \delta z(\delta s_0) \quad (19)$$

اکنون مشابه با فرض در نظر گرفته شده برای بسط رابطه (16)، در اینجا نیز رابطه (19) بر حسب سری تیلور با بسط برداری بازنویسی می شود:

$$\delta Z = \sum_{i=1}^m \Psi_i \langle \delta S_0 \rangle^i \quad (20)$$

که در این رابطه Ψ_i ، ماتریس ضرایب سری تیلور بوده که نامعین و متغیر با زمان هستند. این ضرایب با اصطلاح حساسیت شناخته می‌شوند. به بیان دیگر، با بدست آوردن این ضرایب، به ازای مقادیر مختلف δS_0 می‌توان δZ را محاسبه کرده و این ضرایب، حساسیت انحراف متغیرهای حالت و شبه‌حالت را در نتیجه انحراف اولیه متغیر حالت نشان می‌دهند. برای به‌دست آوردن حساسیت‌ها، رابطه (20) در رابطه (16) جایگذاری می‌شود. پس از انجام محاسبات و معادل قرار دادن عبارات با توان‌های برابر، می‌توان دید که δS_0 از محاسبات حذف شده و مجموعه معادلات زیر برای محاسبه‌ی حساسیت‌های مرتبه i ام قابل ارائه هستند:

$$\Psi_i = \Delta_1 \Psi_i + \Omega_i \quad (21)$$

که در آن، Ω_i عبارت ناهمگن دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ماتریسی ارائه شده برای حساسیت‌هاست. برای $i = 1$ ، بخش ناهمگن برابر با صفر است و برای مقادیر $i > 1$ ، این مقدار بر حسب مقادیر حساسیت‌ها محاسبه شده مراتب پایین‌تر محاسبه می‌شود. جزئیات بیشتر در رابطه با نحوه محاسبات در مرجع [23]، [24] ارائه شده است. بنابراین، برای محاسبه‌ی ماتریس‌های حساسیت، با شروع از $i = 1$ می‌توان Ψ_1 را محاسبه کرده و در مرحله بعد پس از محاسبه Ω_2 بر حسب Ψ_1 ، مقدار Ψ_2 را محاسبه نمود. در نتیجه این مراحل را می‌توان تا محاسبه Ψ_m ادامه داد. در انتها، با داشتن حساسیت‌ها، با توجه به رابطه (20)، می‌توان مقادیر $\delta \lambda$ و δS را به ازای هر δS_0 محاسبه کرد.

فرض کنید که با حل معادلات دیفرانسیل مربوطه، ماتریس‌های حساسیت استخراج شده‌اند. اکنون این ماتریس‌ها (از وسط) به دو بخش بالایی و پایینی تفکیک می‌شود:

$$\delta Z = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} \Psi_i^U \\ \Psi_i^L \end{bmatrix} \langle \delta S_0 \rangle^i \quad (22)$$

که بخش بالایی Ψ_i^U و بخش پایینی Ψ_i^L است. از آن جا که:

$$\delta Z = \begin{bmatrix} \delta S \\ \delta \lambda \end{bmatrix} \quad (23)$$

در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} \delta S \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} \Psi_i^U \\ \Psi_i^L \end{bmatrix} \langle \delta S_0 \rangle^i \quad (24)$$

با تفکیک می‌توان نوشت:

$$\delta s = \sum_{i=1}^m \Psi_i^U \langle \delta s_0 \rangle^i \quad (25)$$

$$\delta \lambda = \sum_{i=1}^m \Psi_i^L \langle \delta s_0 \rangle^i$$

که رابطه اول مربوط به متغیرهای حالت و رابطه دوم مربوط به متغیرهای شبه‌حالت است. حال فقط رابطه مربوط به متغیر حالت در نظر گرفته می‌شود (چرا که شرح حساسیت‌ها برای متغیرهای شبه‌حالت نیز به همین ترتیب است). با باز کردن این رابطه:

$$\delta s = \Psi_1^U \langle \delta s_0 \rangle^1 + \Psi_2^U \langle \delta s_0 \rangle^2 + \dots \quad (26)$$

اگر فرض کنیم مسئله دو متغیر حالت دارد در نتیجه $\delta s = [\delta x \quad \delta y]^T$ بنابراین:

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \Psi_1^U \langle \delta s_0 \rangle^1 + \Psi_2^U \langle \delta s_0 \rangle^2 + \dots \quad (27)$$

و در نتیجه با توجه به آن که $\delta s_0 = [\delta x_0 \quad \delta y_0]^T$

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \Psi_1^U \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \end{bmatrix} + \Psi_2^U \begin{bmatrix} \delta x_0^2 \\ 2\delta x_0 \delta y_0 \\ \delta y_0^2 \end{bmatrix} + \dots \quad (28)$$

با نوشتن ماتریس‌های حساسیت به شکل مؤلفه‌های آن:

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\delta x_0}^x & S_{\delta y_0}^x \\ S_{\delta x_0}^y & S_{\delta y_0}^y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{\delta x_0^2}^x & S_{\delta x_0 \delta y_0}^x & S_{\delta y_0^2}^x \\ S_{\delta x_0^2}^y & S_{\delta x_0 \delta y_0}^y & S_{\delta y_0^2}^y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_0^2 \\ 2\delta x_0 \delta y_0 \\ \delta y_0^2 \end{bmatrix} + \dots \quad (29)$$

حال با انتخاب هر سطر می‌توان رابطه کلیدی جهت محاسبه انحرافات (بر حسب انحرافات اولیه و حساسیت‌ها) را برای هر متغیر حالت حساب کرد. مثلاً برای δx نتیجه می‌دهد:

$$\delta x = S_{\delta x_0}^x \delta x_0 + S_{\delta y_0}^x \delta y_0 + \left\{ S_{\delta x_0^2}^x \delta x_0^2 + S_{\delta x_0 \delta y_0}^x 2\delta x_0 \delta y_0 + S_{\delta y_0^2}^x \delta y_0^2 + \dots \right\} \quad (30)$$

این کار را می توان برای تمام متغیرهای حالت و شبه حالت انجام داد و مقادیر انحرافات را با توجه به انحراف اولیه و حساسیت ها در تمامی لحظات حساب کرد. حال که مقادیر حساسیت ها استخراج شده اند، نتیجه می شود:

$$\begin{cases} s_n^{new}(t) = s_n^{old}(t) + \delta s(t) \\ \lambda_n^{new}(t) = \lambda_n^{old}(t) + \delta \lambda(t) \end{cases} \quad (31)$$

که به عبارت ساده بیان می کند با اضافه کردن مقادیر محاسبه شده متغیرهای انحرافی به حل نامی اولیه، حل نامی جدید استخراج می شود. بنابراین از آنجا که λ_n^{new} استخراج شده است در نتیجه فرمان کنترل بهینه نامی جدید نیز با استفاده از $u_n^{new} = -\frac{B}{r}\lambda_n^{new}$ بدست می آید. برای جزئیات بیشتر در مورد نحوه پیاده سازی روش بسط مرتبه بالای برداری چند متغیره خوانندگان می توانند به [۲۲-۲۴] مراجعه کنند.

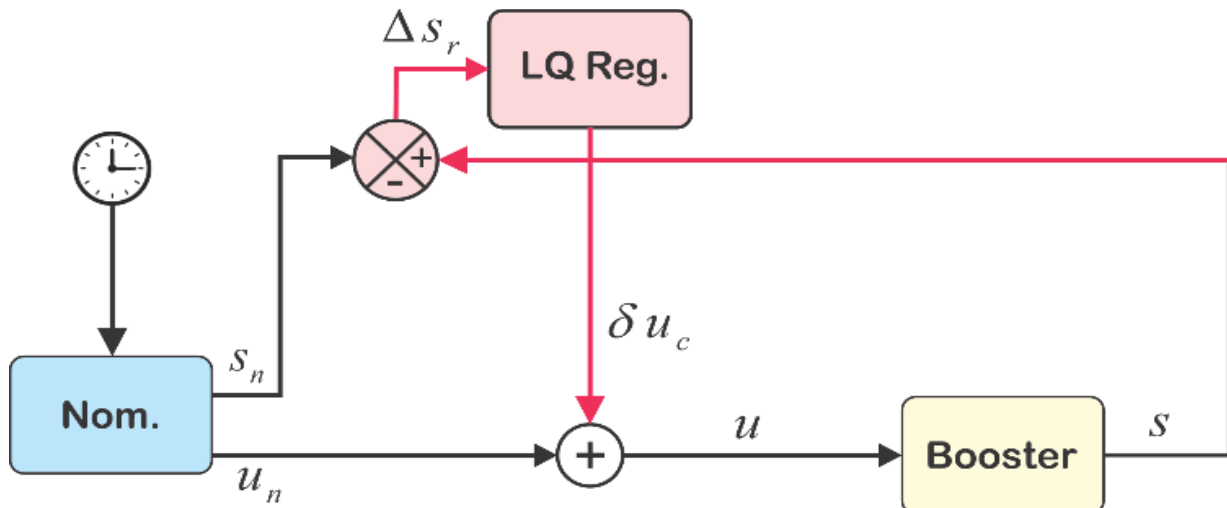
۴- شبیه سازی مسیر نامی با رگولاتور جهت تعقیب مسیر

در بخش قبل حل نامی مسئله فرود با کمک نرم افزار GPOPS استخراج شد و نمودار مسیر آن ارائه شد. در این جا، این حل نامی در شبیه سازی جایگذاری شده و برای پیاده سازی و اجرای فرامین این حل، یک رگولاتور خطی LQ در شبیه سازی پیاده سازی می شود. توجه شود که در شبیه سازی و حل GPOPS جرم بوستر متناسب با سوزش موتور متغیر بوده و تغییرات آن به طور کامل لحاظ می شود. طراحی رگولاتور LQ به روش استاندارد و مرسوم انجام خواهد شد، در نتیجه برای این کار باید معادلات حرکت خطی سازی شده و ماتریس های وزنی مناسبی انتخاب شوند. معادلات در دستگاه کارتزین مدل شده و فرامین کنترل، تراست در راستای x ، y و z و نرخ تغییرات زاویه حمله و زاویه سرش جانبی خواهند بود. پس در مجموع ۸ متغیر حالت و ۵ متغیر کنترلی برای مسئله تعقیب تعریف می شود در حالی که مدل خطی به شکل زیر ارائه شده است:

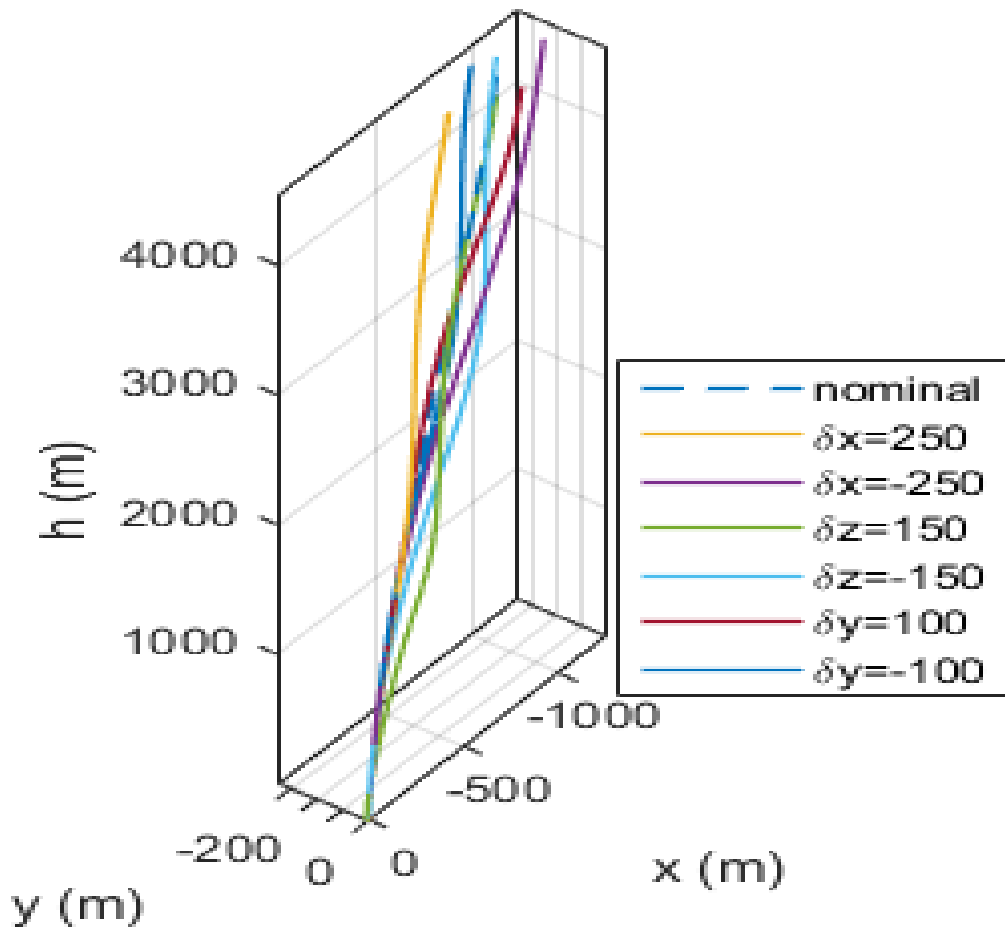
$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta \dot{v}_x \\ \delta \dot{v}_y \\ \delta \dot{v}_z \\ \delta \alpha \\ \delta \beta \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta v_z \\ \delta \alpha \\ \delta \beta \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \delta T'_x \\ \delta T'_y \\ \delta T'_z \\ \delta \alpha_{rate} \\ \delta \beta_{rate} \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{s} = \mathbf{A} \delta \mathbf{s} + \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (32)$$

بلوک دیاگرام پیاده سازی هدایت و تعقیب مسیر در شکل (۵) ارائه شده است. برای بررسی بیشتر ۱۲ شبیه سازی مجزا انجام شده است. ۶ شبیه سازی با انحراف اولیه فقط در موقعیت و ۶ شبیه سازی با انحراف اولیه در سرعت. نمودار سه بعدی مسیر حرکت این ۱۲ شبیه سازی در شکل (۶) نمایش داده شده است. انحراف موقعیت در راستای x برابر با ۲۵۰ و -۲۵۰ در نظر گرفته شده و برای ارتفاع و فاصله عرضی به ترتیب انحرافات ۱۵۰، -۱۵۰، ۱۰۰ و -۱۰۰ منظور شده اند. برای انحرافات در سرعت، مقادیر ۲۵ و

۲۵- متر بر ثانیه در همه کانال‌ها لحاظ شده‌اند و بوستر با کمک رگولاتور LQ سعی در جبران این انحرافات و همگرایی به نقطه فرود داشته است. جدول (۱) این انحرافات اولیه را نشان می‌دهد. در شکل‌های زیر صرفاً تعقیب مسیر نامی صورت گرفته است و مسیر بهینه جدیدی تولید نشده است. در ادامه با استفاده از روش بسط مرتبه بالای برداری بر اساس سری تیلور مسیر بهینه بدون تعقیب استخراج شده است.



شکل ۵- بلوک دیاگرام پیاده سازی هدایت و تعقیب مسیر



شکل ۶- مسیر سه بعدی برای انحرافات اولیه موقعیت

جدول ۱- انحرافات اولیه برای شبیه‌سازی سناریوهای تک اجرا

δx_0	δy_0	δz_0	δv_{x_0}	δv_{y_0}	δv_{z_0}	No.
۲۵۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱
-۲۵۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲
۰	۱۰۰	۰	۰	۰	۰	۳
۰	-۱۰۰	۰	۰	۰	۰	۴
۰	۰	۱۵۰	۰	۰	۰	۵
۰	۰	-۱۵۰	۰	۰	۰	۶
۰	۰	۰	۲۵	۰	۰	۷
۰	۰	۰	-۲۵	۰	۰	۸
۰	۰	۰	۰	۲۵	۰	۹
۰	۰	۰	۰	-۲۵	۰	۱۰
۰	۰	۰	۰	۰	۲۵	۱۱
۰	۰	۰	۰	۰	-۲۵	۱۲

۵- استخراج قانون هدایت با روش بسط مرتبه بالا با کمک سری تیلور

اکنون که حل نامی استخراج شد و کیفیت آن مورد بررسی قرار گرفت، در این بخش حل مرتبه سوم مسئله فرود سه بعدی استخراج شده و سپس چند سناریو شبیه‌سازی می‌شود. برای گام اول باید مسئله غیرخطی با سری تیلور تخمین زده شده و معادلات در شکل استاندارد آن ارائه شوند. با توجه به تابع هزینه معادله (۵) اگر همیلتونین به شکل:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} 0.1 T'^2 + \frac{1}{2} 200 T'_{rate}{}^2 + \frac{1}{2} 0.1 \left(\frac{180}{\pi} \alpha \right)^2 + \frac{1}{2} 0.1 \left(\frac{180}{\pi} \beta \right)^2 \\
 & + \frac{1}{2} 1 \left(\frac{180}{\pi} \gamma \right)^2 + \frac{1}{2} 0.1 \left(\frac{180}{\pi} \chi \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha_{rate}^2 + \frac{1}{2} \beta_{rate}^2 \\
 & + \lambda_x \{ v \sin \gamma \cos \chi \} + \lambda_y \{ v \sin \gamma \sin \chi \} + \lambda_z \{ v \cos \gamma \} \\
 & + \lambda_v \left\{ -\frac{D}{m} + g \cos \gamma - T' \cos \alpha \cos \beta \right\} \\
 & + \lambda_\chi \left\{ \frac{Y}{m v \sin \gamma} - \frac{T' \cos \alpha \sin \beta}{v \sin \gamma} \right\} \\
 & + \lambda_\gamma \left\{ \frac{L}{m v} - \frac{T' \sin \alpha}{v} - \frac{g}{v} \sin \gamma \right\} + \lambda_T \{ T'_{rate} \} + \lambda_\alpha \{ \alpha_{rate} \} \\
 & + \lambda_\beta \{ \beta_{rate} \}
 \end{aligned} \tag{۳۳}$$

اکنون شکل استاندارد مسئله برای حل مرتبه بالا به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = h_x = v \sin \gamma \cos \chi \\ \dot{y} = h_y = v \sin \gamma \sin \chi \\ \dot{z} = h_z = v \cos \gamma \\ \dot{v} = h_v = -\frac{D}{m} + g \cos \gamma - T' \cos \alpha \cos \beta \\ \dot{\chi} = h_\chi = \frac{Y}{mv \sin \gamma} - \frac{T' \cos \alpha \sin \beta}{v \sin \gamma} \\ \dot{\gamma} = h_\gamma = \frac{L}{mv} - \frac{T' \sin \alpha}{v} - \frac{g}{v} \cos \gamma \\ \dot{T}' = h_{T'} = T'_{rate} \\ \dot{\alpha} = h_\alpha = \alpha_{rate} \\ \dot{\beta} = h_\beta = \beta_{rate} \end{array} \right. \quad (34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_x = h_{\lambda_x} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{\lambda}_y = h_{\lambda_y} = -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{\lambda}_z = h_{\lambda_z} = -\frac{\partial H}{\partial z} \\ \dot{\lambda}_v = h_{\lambda_v} = -\frac{\partial H}{\partial v} \\ \dot{\lambda}_\chi = h_{\lambda_\chi} = -\frac{\partial H}{\partial \chi} \\ \dot{\lambda}_\gamma = h_{\lambda_\gamma} = -\frac{\partial H}{\partial \gamma} \\ \dot{\lambda}_{T'} = h_{\lambda_{T'}} = -\frac{\partial H}{\partial T'} \\ \dot{\lambda}_\alpha = h_{\lambda_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} \\ \dot{\lambda}_\beta = h_{\lambda_\beta} = -\frac{\partial H}{\partial \beta} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial T'_{rate}} = 0 \rightarrow T'_{rate} \\ \frac{\partial H}{\partial \alpha_{rate}} = 0 \rightarrow \alpha_{rate} \\ \frac{\partial H}{\partial \beta_{rate}} = 0 \rightarrow \beta_{rate} \end{array} \right.$$

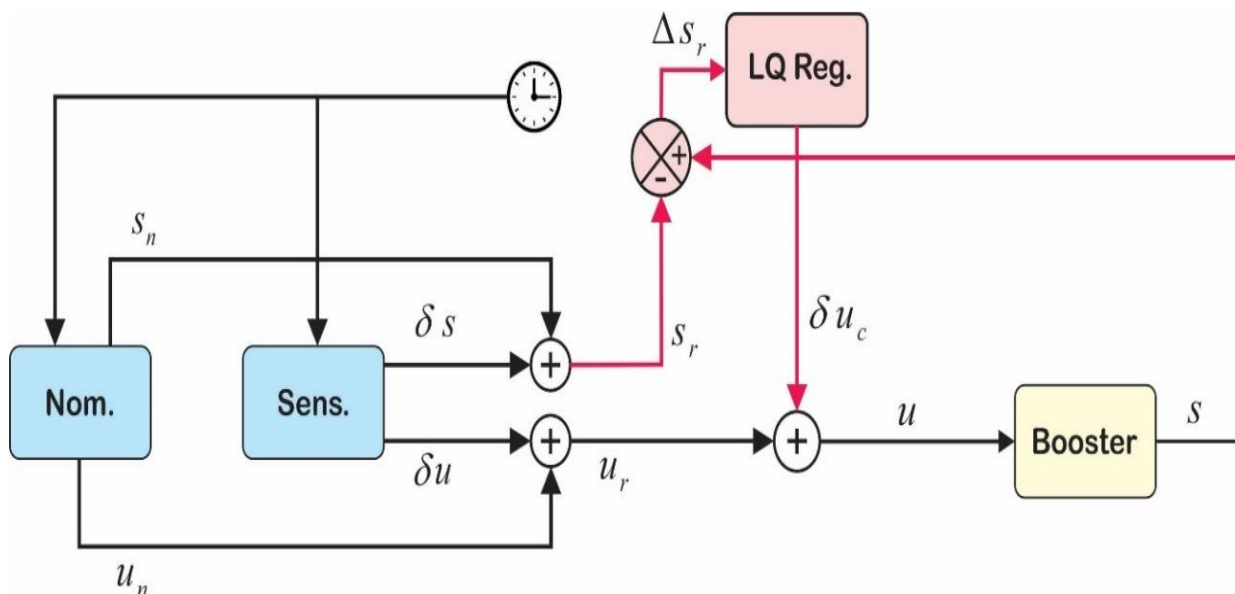
بخش اول این معادله، معادلات دیفرانسیل مربوط به متغیرهای حالت و تعریف h_x تا h_β داده شده است که متغیرهای کنترلی باید طبق اصل بهینگی در هر دو دسته معادلات دیفرانسیل مربوط به متغیرهای حالت و متغیرهای شبه حالت جایگزین شوند.

معادلات دیفرانسیل مربوط به متغیرهای شبه حالت در ادامه آورده شده‌اند و تعاریف مربوط به h_{λ_x} تا h_{λ_β} نیز ارائه شده است. حال می‌توان نوشت:

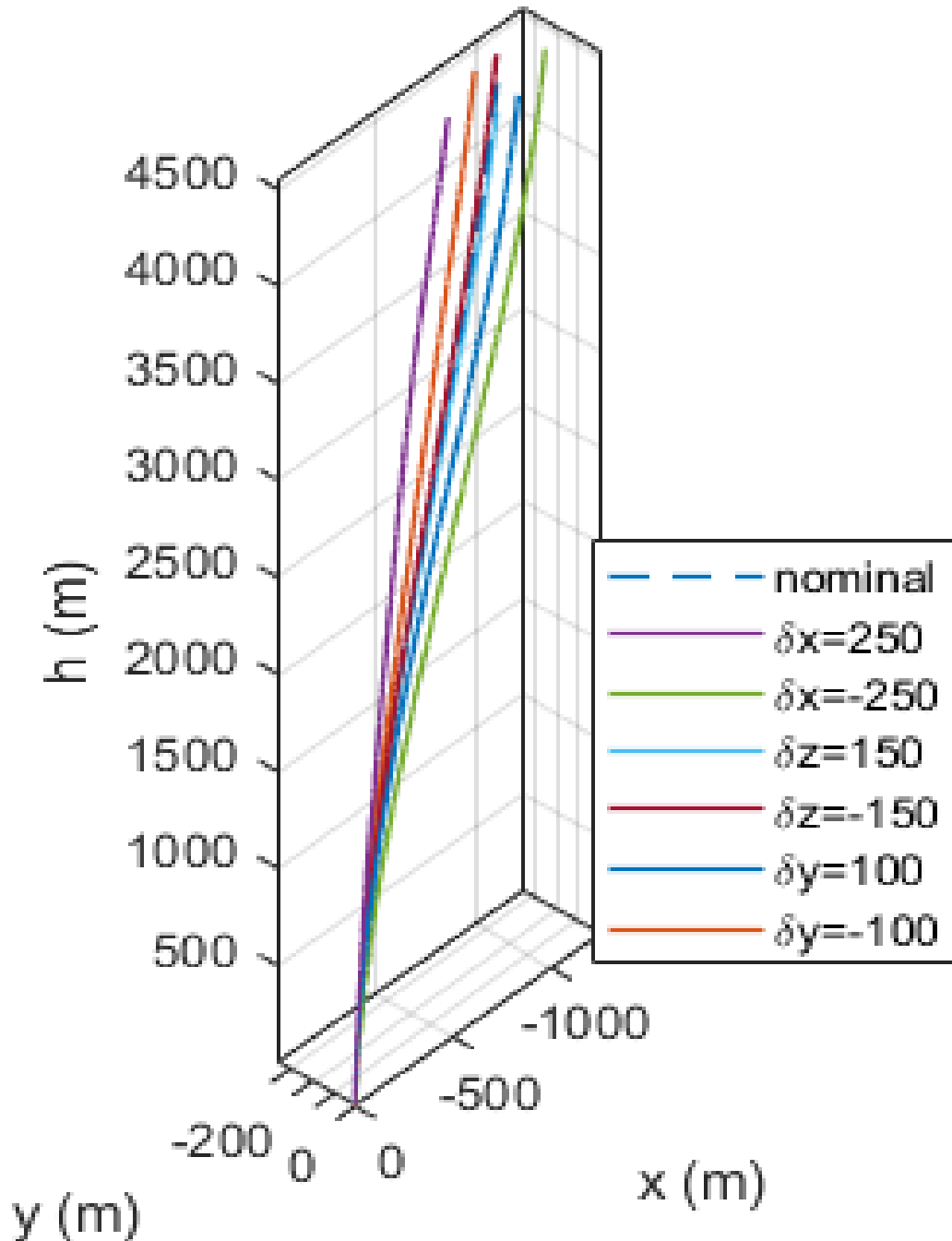
$$h = \begin{bmatrix} h_s \\ h_\lambda \end{bmatrix} \quad h_s = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \\ h_v \\ h_\chi \\ h_\gamma \\ h_{T'} \\ h_\alpha \\ h_\beta \end{bmatrix} \quad h_\lambda = \begin{bmatrix} h_{\lambda_x} \\ h_{\lambda_y} \\ h_{\lambda_z} \\ h_{\lambda_v} \\ h_{\lambda_\chi} \\ h_{\lambda_\gamma} \\ h_{\lambda_{T'}} \\ h_{\lambda_\alpha} \\ h_{\lambda_\beta} \end{bmatrix} \quad (35)$$

که در کل ۱۸ معادله غیرخطی را شامل می‌شود که باید سری تیلور آنها نسبت به ۱۸ متغیر حالت و شبه حالت تا مرتبه سوم بسط داده شود؛ بنابراین Δ_i شامل ۱۸ سطر است که سطر اول مربوطه به مشتقات h_x ، سطر دوم مربوط به مشتقات h_y و... الی آخر h_{λ_β} می‌باشد.

اکنون در اینجا نتایج شبیه‌سازی ارائه می‌شود. مطابق جدول سناریوهای تک‌اجرا که پیش‌تر ارائه شد، ۱۲ سناریوی مختلف با انحراف اولیه متفاوت با در نظر گرفتن حساسیت‌های محاسبه شده با بسط سری تیلور شبیه‌سازی شده‌اند. دیده می‌شود که نتایج از نظر کیفی متفاوت با شبیه‌سازی‌های مشابهی است که صرفاً به مسیر نامی همگرا می‌شدند و مسیر نامی را مطابق شکل (۶) تعقیب می‌کردند. در این جا مسیر مرجع تولید شده و بوستر با کیفیت بالاتری مسیر بهینه جدیدی را تولید کرده و در نهایت در نقطه پایانی فرود آمده است.



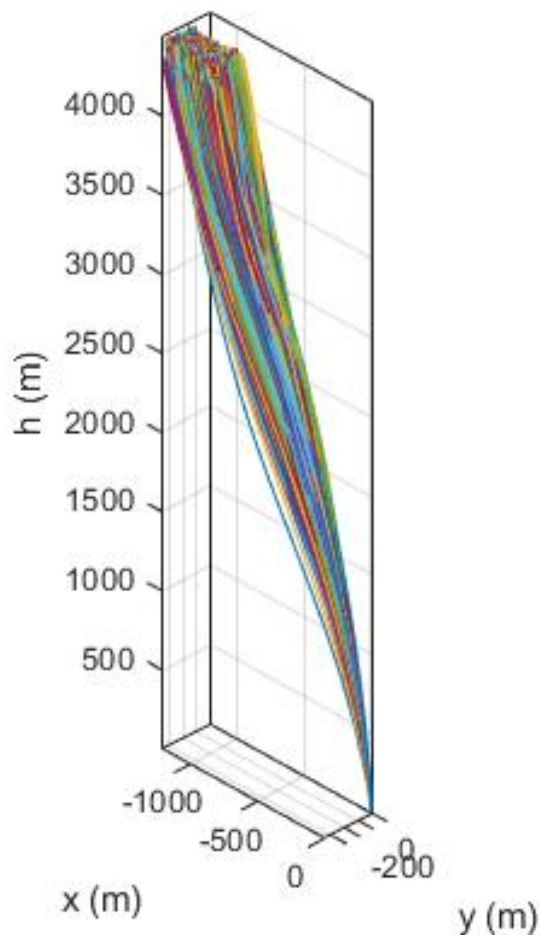
شکل ۷- بلوک دیاگرام پیاده‌سازی قانون هدایت فرود ۳ درجه آزادی با روش بسط مرتبه بالا



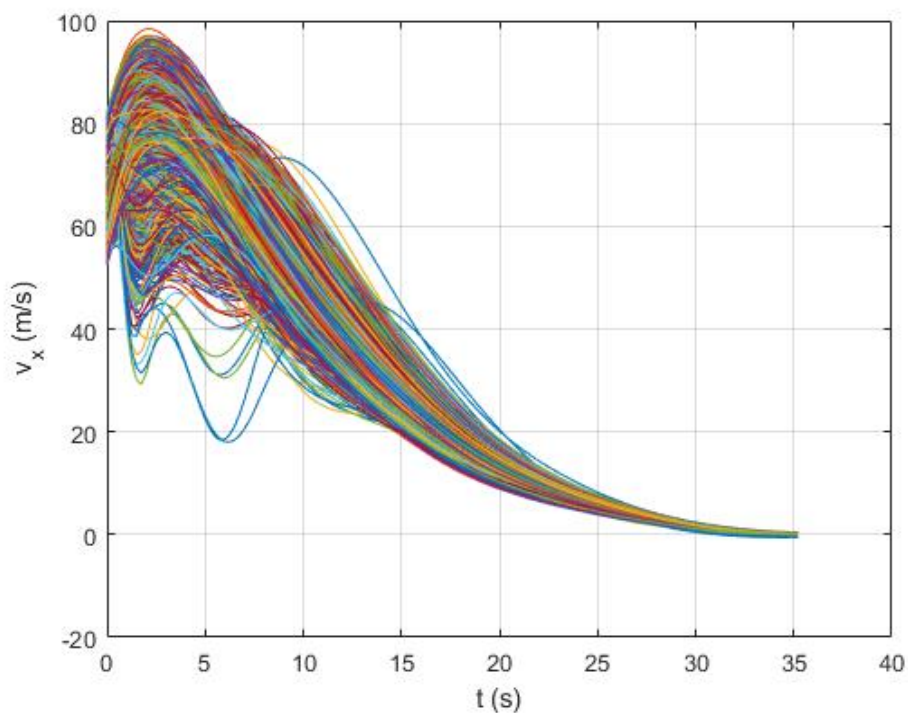
شکل ۸- مسیر سه بعدی بسط مرتبه بالا با سری تیلور برای انحرافات اولیه موقعیت

۵-۱- شبیه‌سازی مونت کارلو

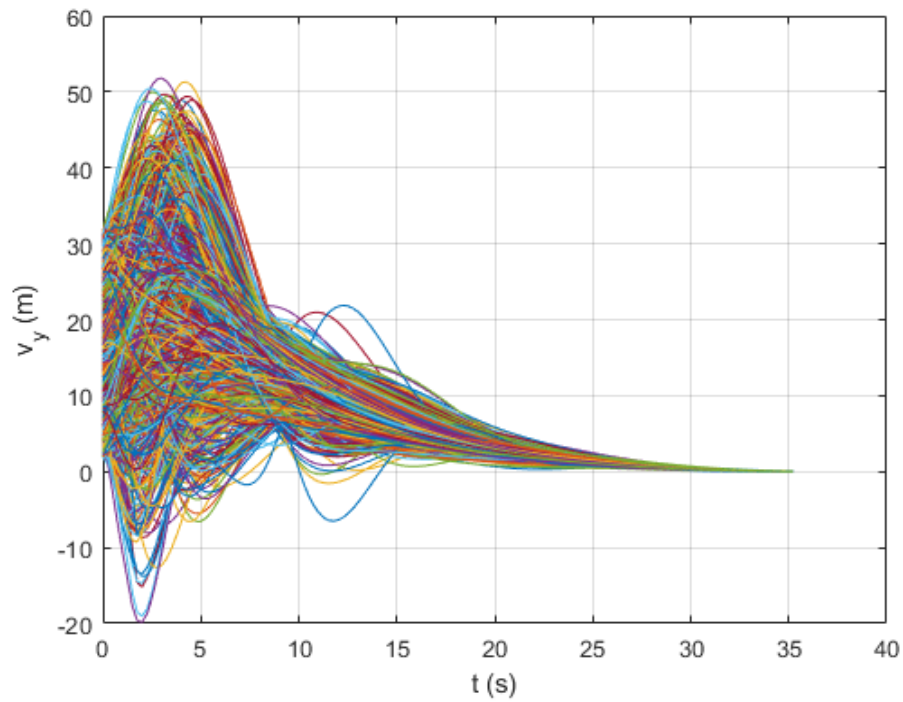
برای بررسی این قانون هدایت لازم است که شبیه‌سازی مونت کارلو انجام شود چرا که برای ارزیابی کلی نمی‌توان به چند شبیه‌سازی بسنده کرد؛ بنابراین در این جا برای قانون هدایت، شبیه‌سازی مونت کارلو انجام می‌شود. برای شبیه‌سازی مونت کارلو فرض شده که انحراف در x از -200 تا 200 ، برای y و z از -100 تا 100 متر و برای مولفه‌های سرعت v_x ، v_y و v_z از -15 تا 15 متر بر ثانیه است. این شبیه‌سازی مونت کارلو شامل 2000 اجرا است که مقادیر انحراف اولیه به شکل توزیع یکنواخت انتخاب شده است. در نمودارهای زیر نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو برای قانون هدایت مرتبه بالا بر اساس مدل سری تیلور ارائه شده‌اند.



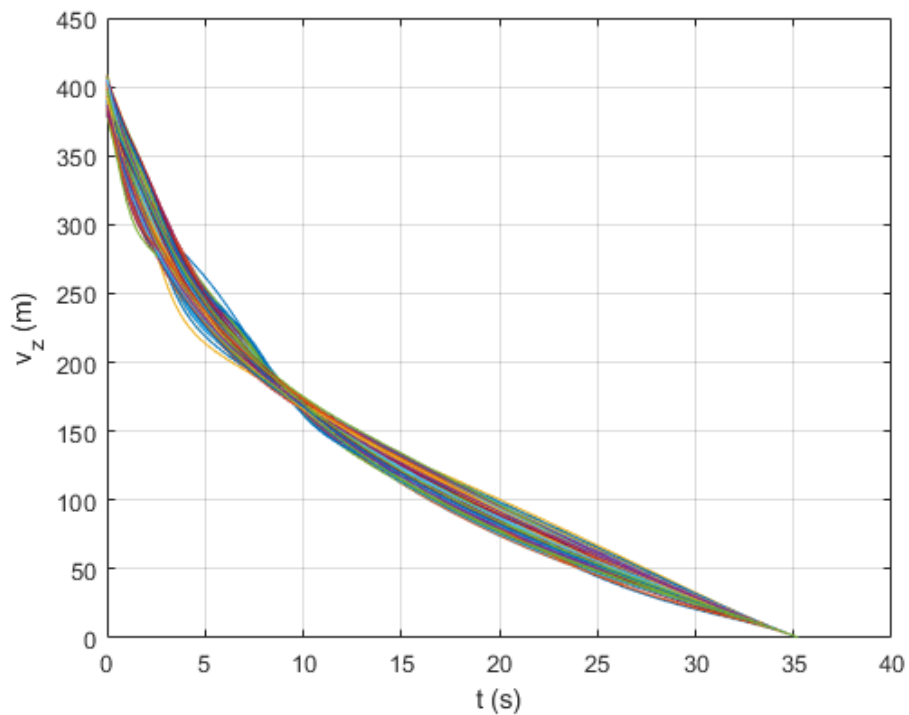
شکل ۹- منحنی‌های مسیر برای شبیه‌سازی مونت کارلو با قانون هدایت مرتبه بالای سری تیلور



شکل ۱۰- منحنی‌های مولفه v_x سرعت برای شبیه‌سازی مونت کارلو با قانون هدایت مرتبه بالای سری تیلور



شکل ۱۱- منحنی‌های مولفه y سرعت برای شبیه‌سازی مونت کارلو با قانون هدایت مرتبه بالای سری تیلور



شکل ۱۲- منحنی‌های مولفه z سرعت برای شبیه‌سازی مونت کارلو با قانون هدایت مرتبه بالای سری تیلور

جدول ۲- خطای موقعیت و سرعت نهایی قانون هدایت

v_z	v_y	v_x	z	y	x	خطا
۰/۰۸	۰/۰۱	۰/۰۶	-۰/۲	-۰/۰۱۶	۰/۰۹۹	میانگین
۰/۰۲	۰/۰۰۷	۰/۰۷	۰/۰۳	۰/۰۲	۰/۲۹	انحراف معیار

در مورد قانون هدایت بهینه موردنظر در این مأموریت دو ویژگی حائز اهمیت است: ویژگی اول ارضای هر چه دقیق تر موقعیت و سرعت در نقطه فرود و ویژگی دوم اندازه تابع هزینه است. تا این جا با داده‌های آماری نشان داده شد که خطای موقعیت و سرعت برای قانون هدایت بر پایه بسط تیلور کیفیت بالایی دارد. حال در ادامه تابع هزینه مورد بررسی قرار می‌گیرد. جدول زیر نتایج آماری مربوط به تابع هزینه کل، تابع هزینه مربوط به بخش تعقیب‌گر، جرم نهایی و جرم مصرف شده (جرم سوخت) را نشان می‌دهد. قانون هدایت بر پایه بسط تیلور کیفیت بالایی را از خود نشان داده است.

جدول ۳- خطای تابع هزینه دو قانون هدایت

جرم سوخت	جرم نهایی	هزینه رگولاتور	هزینه کل	
۶۳۰۹/۱	۴۰۶۹۱	۳۴۷/۹۵	۲۳۱۰/۷	میانگین
۱۴۱/۳۵	۱۴۱/۳۵	۲۱۵/۸۵	۵۱۹	انحراف معیار

۶- نتیجه‌گیری و سخن پایانی

هدف اصلی تحقیق، بررسی نحوه توسعه و افزایش قابلیت روش بسط مرتبه بالا برای طراحی قانون هدایت بهینه است که کاربرد این روش و پیاده‌سازی‌های متنوع آن توسط روش‌های متنوعی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. پس از مطالعه نحوه پیاده‌سازی بسط مرتبه بالا و بررسی مفاهیم آن، اثربخشی روش بسط مرتبه بالا و نحوه پیاده‌سازی آن مطالعه شده است.

در این تحقیق فاز نهایی فرود یک بوستر مد نظر قرار گرفت و هدف اصلی تامین حداقل خطای ممکن در نقطه فرود بود. در این مقاله مسئله سه‌بعدی فرود بوستر مدنظر قرار گرفته شده و پس از مدل‌سازی و استخراج حل نامی بهینه، متغیرهای حساسیت با کمک بسط مرتبه بالا تا مرتبه سوم استخراج شده‌اند و به منظور بررسی خطاهای تئوریک، ۱۲ شبیه‌سازی با انحرافات اولیه متفاوت انجام شد. پس از آن برای بررسی کیفیت روش بسط مرتبه بالا در حضور نامعینی‌ها و همچنین ارزیابی تاثیر عبارات مرتبه بالاتر، شبیه‌سازی‌های جامع‌تری مد نظر قرار گرفت. شبیه‌سازی‌ها با در نظر گرفتن جاذبه، چگالی و جرم متغیر پیاده‌سازی شدند. در پایان برای مقایسه کیفیت قانون هدایت مبتنی بر بسط مرتبه بالای برداری، از شبیه‌سازی مونت کارلو بهره گرفته شد و نشان داده شد که قانون هدایت بر اساس بسط مرتبه بالای برداری بر اساس سری تیلور نه تنها از دقت مناسبی برخوردار است بلکه می‌تواند جایگزین خوبی برای مسئله تعقیب مسیر نامی باشد.

مراجع

[1] A. Banerjee and R. Padhi, "An Optimal Explicit Guidance Algorithm for Terminal Descent Phase of Lunar Soft Landing," In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Grapevine, Texas, USA, 9-13 January 2017, p. 1266, doi: <https://doi.org/10.2514/6.2017-1266>.

[2] S. Swaminathan, R. UP, and D. Ghose, "Real Time Powered Descent Guidance Algorithm for Mars Pinpoint Landing with Inequality Constraints," In *AIAA Scitech 2020 Forum*, Orlando, FL, 6-10 January 2020, p. 1351, doi: <https://doi.org/10.2514/6.2020-1351>.

- [3] K. S. G. A. a. Z. Z. a. Q. Gao, "Minimum-Fuel Optimal Trajectory for Reusable First-stage Rocket Landing using Particle Swarm Optimization," *International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*, Vol. 11, No. 5, pp. 981 - 990, 2017, doi: <https://doi.org/10.5281/zenodo.1130269>.
- [4] Y. Li, W. Chen, H. Zhou, and L. Yang, "Conjugate Gradient Method with Pseudospectral Collocation Scheme for Optimal Rocket Landing Guidance," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 104, p. 105999, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105999>.
- [5] P. D. Lizia, R. Armellin, and M. Lavagna, "Application of High Order Expansions of Two-point Boundary Value Problems to Astrodynamics," *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 102, pp. 355-375, 2008, doi: <https://doi.org/10.1007/s10569-008-9170-5>.
- [6] M. Berz, *Advances in Imaging and Electron Physics Modern Map Methods in Particle Beam Physics*. Academic Press: San Diego, 1999.
- [7] P. Di Lizia, R. Armellin, A. Ercoli-Finzi, and M. Berz, "High-Order Robust Guidance of Interplanetary Trajectories Based on Differential Algebra," *Journal of Aerospace Engineering, Sciences and Applications*, Vol. 1, No. 1, pp. 43-57, 2008, doi: <https://doi.org/10.7446/jaesa.0101.05>.
- [8] P. Di Lizia, R. Armellin, F. Bernelli-Zazzera, and M. Berz, "High Order Optimal Control of Space Trajectories with Uncertain Boundary Conditions," *Acta Astronautica*, Vol. 93, pp. 217-229, 2014, doi: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.07.007>.
- [9] P. Di Lizia, R. Armellin, A. Morselli, and F. Bernelli-Zazzera, "High Order Optimal Feedback Control of Space Trajectories with Bounded Control," *Acta Astronautica*, Vol. 94, No. 1, pp. 383-394, 2014, doi: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.02.011>.
- [10] A. Wittig and R. Armellin, "High Order Transfer Maps for Perturbed Keplerian Motion," *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 122, pp. 333-358, 2015, doi: <http://doi.org/10.1007/s10569-015-9621-8>.
- [11] M. Vetrivano and M. Vasile, "Analysis of Spacecraft Disposal Solutions from LPO to the Moon with High Order Polynomial Expansions," *Advances in Space Research*, Vol. 60, No. 1, pp. 38-56, 2017, doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2017.04.005>.
- [12] Z.-J. Sun, P. Di Lizia, F. Bernelli-Zazzera, Y.-Z. Luo, and K.-P. Lin, "High-order State Transition Polynomial with Time Expansion Based on Differential Algebra," *Acta Astronautica*, Vol. 163, pp. 45-55, 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.03.068>.
- [13] A. Morselli, R. Armellin, P. Di Lizia, and F. B. Zazzera, "A High Order Method for Orbital Conjunctions Analysis: Sensitivity to Initial Uncertainties," *Advances in Space Research*, vol. 53, no. 3, pp. 490-508, 2014, doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2013.11.038>.
- [14] A. Morselli, R. Armellin, P. Di Lizia, and F. B. Zazzera, "A High Order Method for Orbital Conjunctions Analysis: Monte Carlo Collision Probability Computation," *Advances in Space Research*, Vol. 55, No. 1, pp. 311-333, 2015, doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2014.09.003>.

- [15] J. L. Gonzalo, C. Colombo, and P. Di Lizia, "Introducing MISS, a New Tool for Collision Avoidance Analysis and Design," *Journal of Space Safety Engineering*, Vol. 7, No. 3, pp. 282-289, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsse.2020.07.010>.
- [16] M. Valli, R. Armellin, P. Di Lizia, and M. R. Lavagna, "Nonlinear Filtering Methods for Spacecraft Navigation Based on Differential Algebra," *Acta Astronautica*, Vol. 94, No. 1, pp. 363-374, 2014, doi: <http://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.03.009>.
- [17] D. Simon, *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*, 1st ed. (No. 6), Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- [18] R. S. Park and D. J. Scheeres, "Nonlinear Mapping of Gaussian Statistics: Theory and Applications to Spacecraft Trajectory Design," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 6, pp. 1367-1375, 2006, doi: <https://doi.org/10.2514/1.20177>.
- [19] R. S. Park and D. J. Scheeres, "Nonlinear Semi-analytic Methods for Trajectory Estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 30, No. 6, pp. 1668-1676, 2007, doi: <https://doi.org/10.2514/1.29106>.
- [20] F. Cavenago, P. Di Lizia, M. Massari, and A. Wittig, "On-board Spacecraft Relative Pose Estimation with High-order Extended Kalman Filter," *Acta Astronautica*, Vol. 158, pp. 55-67, 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.11.020>.
- [21] M. Moghadasian and J. Roshanian, "Optimal Landing of Unmanned Aerial Vehicle using Vectorised High Order Expansions Method," (in Persian), *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 19, No. 11, pp. 2761-2769, 2019. [Online]. Available: <http://mme.modares.ac.ir/article-15-27084-en.html>.
- [22] M. Moghadasian and J. Roshanian, "Continuous Maneuver of Unmanned Aerial Vehicle using High Order Expansions Method for Optimal Control Problem," (in Persian), *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 382-390, 2018. [Online]. Available: <http://mme.modares.ac.ir/article-15-4456-fa.html>.
- [23] M. Moghadasian and J. Roshanian, "Approximately Optimal Manoeuvre Strategy for Aero-assisted Space Mission," *Advances in Space Research*, Vol. 64, No. 2, pp. 436-450, 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2019.04.003>.
- [24] M. Moghadasian, "Development of an Analytical-numerical Method to Solve Pseudo-spectral Optimal Guidance Problem in Space Missions," Ph.D. Thesis, Department of Aerospace Engineering K.N. Toosi University, Tehran, Iran, 2018.
- [25] M. Sharafi, N. Rahbar, and A. Kashaninia, "Comparing Performance of Vectorized High Order Expansions and SDRE Method for Vertical Landing Mission of Booster," (in persian), Vol. 18, No. 3, pp. 69-85, 2022, doi: <https://dorl.net/dor/20.1001.1.26455323.1401.18.3.6.8>.
- [26] M. Sharafi, N. Rahbar, A. Moharampour, and A. Kashaninia, "Performance Analysis of the Vectorized High Order Expansions Method in the Accurate Landing Problem of Reusable Boosters," *Advances in Space Research*, Vol. 71, No. 5, pp. 2155-2174, 2023/03/01/ 2023, doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2022.10.057>.

Guidance Law Design for the Final Phase 3D Landing Mission of Booster using High Order Expansions Method

Morteza Sharafi

Ph.D., Faculty of Electrical & Computer Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Iran
mortezasharafi@gmail.com

*Corresponding author: **Nasser Rahbar**

Associate Professor, Faculty of Electrical & Computer Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Iran
rahbar_nas@mut.ac.ir

Ali Moharampour

Assistant Professor, Faculty of Electrical & Computer Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Iran
moharampour@mut.ac.ir

Abdorreza Kashaninia

Assistant Professor, Faculty of Electrical & Computer Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Iran
akashaninia@mut.ac.ir

Abstract

In this paper, optimal guidance law design considering fixed final state and time for the final phase booster landing problem of a spacecraft or launch vehicle is investigated and studied. This guidance law, not only satisfied a specific optimality criterion, but it also has the least sensitivity to the initial state's deviations; which is due to the inclusion of the nonlinear terms in the mathematical modeling using the high order expansions method. The main goal of this research, is to investigate the development and to augment the capability of the high order expansions method for guidance law design. Different implementations of this approach including the differential algebra high order, the generating function based high order and vectorized high order expansions methods have been investigated. After reviewing the implementation concepts of the high order expansions method, the effectiveness of this method has been studied. Then a 3-dimensional booster landing problem has been chosen as the case study and after extracting the mathematical model and nominal optimal solution, the sensitivity variables have been extracted up to the 3rd order. Afterwards, to investigate the performance of the designed guidance law, the Monte Carlo simulations have been performed and it has been shown that the designed guidance law on the basis of the Taylor series and high order expansions method has a good accuracy and is a valuable alternative to the nominal trajectory tracking guidance approach.

Keywords: Vectorized high order expansions, Nonlinear optimal control, Booster landing, Optimal guidance