

حل تحلیلی الاستو-پلاستیک استوانه جدار ضخیم به کمک تکنیک اغتشاشات و روش بازگشت شعاعی

در این مقاله، رفتار الاستو-پلاستیک استوانه جدار ضخیم تحت فشار یکنواخت مطالعه شده است. معادلات الاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی میرسکی-هرمان به دست آمده است. حالت ماده پوسته به صورت الاستیک-پلاستیک کامل بوده و از قانون جریان پراتل-روس برای بیان رفتار ماده در حالت پلاستیک و از معیار تسلیم فن میزس برای مشخص نمودن شروع رفتار پلاستیک استوانه در لایه میانی و از روش نگاشت بازگشت شعاعی برای به دست آوردن تنش ها در حالت پلاستیک استفاده شده است. برای حل معادلات، روش مسأله مقادیر ویژه و تکنیک اغتشاشی MAM به کار گرفته شده و نتایج حاصل با روش اجزای محدود مقایسه شده است.

مجتبی قدیمی^۱

دانشجوی دکتری

مهدی قنّاد^۲

دانشیار

واژه‌های راهنما: استوانه جدار ضخیم، آنالیز الاستو-پلاستیک، تئوری تغییر شکل برشی میرسکی-هرمان، روش بازگشت شعاعی، تکنیک اغتشاشات، معیار تسلیم فن میزس

۱- مقدمه

پوسته‌ها سازه‌های خمیده‌ای هستند که ضخامت آن‌ها در برابر سایر ابعادشان کوچک است. پوسته‌ها فراوان‌ترین و متنوع‌ترین سازه‌هایی هستند که در طبیعت و صنعت مشاهده می‌شوند. از جمله پوسته‌های صنعتی می‌توان به بدنه‌ی هواپیماها، مخازن تحت فشار و لوله‌های حامل سیال اشاره کرد. پوسته‌ها از لحاظ رفتاری در برابر نیروها و لنگرها از مقاومت و رفتار مطلوب ویژه‌ای برخوردارند [۱-۳].

تئوری‌های مطرح شده برای پوسته‌های جدار ضخیم بر پایه‌ی تئوری الاستیسیته‌ی صفحه‌ای (دوبعدی) و تئوری تغییر شکل برشی می‌باشند. نخستین بار لامه در سال ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی صفحه‌ای حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از ماده‌ی همگن و همسان‌گرد را ارائه کرد [۴]. گلرکین [۵] با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته، روابط پوسته‌های جدار ضخیم کروی را به دست آورد.

^۱ دانشجوی دکتری، گروه مکانیک جامدات و طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
mghadimi@mut.ac.ir

^۲ نویسنده مسئول دانشیار، گروه مکانیک جامدات و طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
mghannadk@shahroodut.ac.ir، کدپستی: ۳۶۱۹۹۵۱۶۱، صندوق پستی ۳۱۶

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۹/۰۲، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۱/۰۹، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۱۵

نقدی [۶] با لحاظ نمودن اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، تئوری تغییر شکل برشی را برای پوسته‌های جدار ضخیم بنیان نهاد. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای نخستین بار در سال ۱۹۵۸ توسط میرسکی و هرمان [۷] برای تجزیه و تحلیل استوانه‌های همسان‌گرد استفاده شد. گرینس‌پن [۸] حل مسأله‌ی مقادیر ویژه^۱ استوانه‌های ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه نمود.

در علوم طبیعی و مهندسی اغلب از معادلات دیفرانسیل و دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود. راه حل آن‌ها به حل مسأله‌ی مقادیر ویژه منجر می‌شود. به همین دلیل مسأله‌ی مقادیر ویژه جایگاه مهمی در جبر خطی دارد [۹]. در مسأله‌ی که امکان حل به دلیل غیرخطی بودن ضرایب معادله، به کمک مسأله‌ی مقادیر ویژه، وجود نداشته باشد، از روش‌های دیگری استفاده می‌شود. این روش‌ها شامل استفاده از تکنیک اغتشاشات^۲ [۱۰] یا روش چندلایه‌ای^۳ [۱۱] می‌باشند.

مطالعات زیادی برای حل الاستیک پوسته‌های جدار ضخیم انجام شده است. قنّاد و زمانی‌نژاد [۱۲] از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای بررسی رفتار الاستیک استوانه‌های ناهمگن ضخیم تحت بارگذاری یکنواخت استفاده کردند. آن‌ها از اصل کار مجازی برای استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌ی متقارن محوری استفاده کردند. ایپک‌چی و همکاران [۱۳] معادلات حاکم بر استوانه‌های همگن با ضخامت متغیر را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به دست آوردند و حل معادلات را با استفاده از تکنیک اغتشاشات انجام دادند. همچنین، آن‌ها به کمک تکنیک اغتشاشات، تحلیل تنش یک پوسته‌ی مخروطی ضخیم متقارن محوری تحت فشارهای غیریکنواخت را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی انجام دادند [۱۴]. قنّاد و همکاران [۱۵] از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای انجام آنالیز الاستیک پوسته‌های مخروطی جدار ضخیم توخالی با شرایط مرزی گیردار استفاده کردند. آن‌ها فرض کردند که پوسته، تحت فشار یکنواخت قرار دارد و خواص پوسته در راستای ضخامت به تدریج تغییر می‌کند. بررسی تحلیلی پوسته‌های با ضخامت متغیر تحت فشار داخلی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نیز توسط قنّاد و همکاران [۱۶] ارائه گردید. قارونی و قنّاد [۱۷] تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم با ضخامت متغیر ساخته شده از مواد با خواص متغیر در راستای طولی با بارگذاری غیریکنواخت را انجام دادند. آن‌ها معادلات تعادل حاکم را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول استخراج کردند. آن‌ها همچنین این مسأله را برای مواد دارای خواص متغیر در راستای شعاعی را نیز حل نمودند [۱۸].

حل پلاستیک پوسته با استفاده از تنش‌های به دست آمده به کمک روش‌های حل الاستیک انجام می‌شود. ابتدا با استفاده از معیار تسلیم مناسب، وضعیت ماده بررسی می‌شود و در صورت تسلیم پوسته با استفاده از روش نگاهت بازگشت شعاعی^۴، تنش‌ها اصلاح می‌شوند. ایده‌ی چنین طرحی به ویلکینز [۱۹] برمی‌گردد که روش نگاهت بازگشت شعاعی را برای ماده‌ی پلاستیک کامل با استفاده از معیار فن میزس پیشنهاد کرد. برتری این روش در مقایسه با سایر روش‌های بازگشت تنش به روی سطح تسلیم ماده توسط لورت و پریوست [۲۰] و یودر [۲۱] بررسی و نشان داده شده است. دونه و پترنیک [۲۲] با استفاده از روش نگاهت بازگشت شعاعی و

¹ Eigenvalue problem

² Perturbation technique

³ Multi-layer method

⁴ Radial return mapping method

به کمک تئوری پلاستیسیته‌ی جریان^۱ به فرمول‌بندی مسائل الاستو-پلاستیک پرداختند. آن‌ها از فرضیه‌ی پلاستیسیته‌ی نرمال^۲ و قانون جریان مرتبط^۳ برای معیار فُن میزس استفاده کردند. ویدلاک [۲۳] از روش بازگشت شعاعی برای تحلیل یک استوانه‌ی جدار ضخیم استفاده کرد. در حل مسأله استحکام و عدم حساسیت اندازه گام این روش ثابت شد. زمانی نژاد و همکارانش [۲۴] تحلیل ترموالاستو-پلاستیک مخازن FGM چرخان تحت فشار را با حالت ماده‌ی الاستیک خطی-پلاستیک کامل مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها برای فرمول‌بندی مسأله از تئوری رایج کلاسیک استفاده کردند. ابراهیمی و همکاران [۲۵] تحلیل ترموالاستو-پلاستیک مخازن استوانه‌ای FGM چرخان را انجام دادند. مطالعه‌ی آن‌ها بر اساس شرط تسلیم ترسکا و قانون جریان مرتبط با آن برای مواد سخت‌شونده‌ی خطی انجام شده است. آن‌ها نیز از تئوری کلاسیک برای فرمول‌بندی مسأله استفاده کردند. تحلیل ترموالاستو-پلاستیک پوسته‌ی استوانه‌ای FGM با استفاده از روش تقریب پی‌درپی^۴ توسط سعیدی و همکارانش [۲۶] انجام شد. آن‌ها از شرایط کرنش صفحه‌ای برای تحلیل استوانه‌ی دو سر گیردار استفاده کردند. تحلیل الاستو-پلاستیک مخازن استوانه‌ای تحت بارگذاری حرارتی-مکانیکی با استفاده از روش DTM^۵ توسط حیدری [۲۷] انجام شد. در این مطالعه از فرضیات کرنش صفحه‌ای و حالت ماده‌ی الاستیک-پلاستیک کامل استفاده شده است.

در این مقاله حل الاستو-پلاستیک پوسته‌ی جدار ضخیم استوانه‌ای تحت فشار داخلی و با شرایط مرزی گیردار در دو انتها، فرض رفتار الاستیک-پلاستیک کامل انجام شده است. برای به دست آوردن تنش‌ها در محدوده‌ی الاستیک از میدان جابه‌جایی تئوری تغییر شکل برشی میرسکی-هرمان استفاده شده است. حل تحلیلی قسمت الاستیک با استفاده از روش‌های مسأله‌ی مقادیر ویژه و تکنیک اغتشاشی^۶ MAM انجام شده است. با استفاده از تئوری پلاستیسیته‌ی جریان و به کمک معیار تسلیم فُن میزس، فشار بحرانی تسلیم لایه‌ی میانی استوانه به دست آمده است. همچنین به کمک روش نگاشت بازگشت شعاعی، تنش‌های استوانه در حالت تسلیم محاسبه شده است. نوآوری این مقاله استفاده هم‌زمان از تئوری تغییر شکل برشی میرسکی-هرمان و روش نگاشت بازگشت شعاعی برای حل الاستو-پلاستیک استوانه‌ی دو سر گیردار به کمک تکنیک اغتشاشات می‌باشد. در تمامی کارهای تحلیلی گذشته‌ی انجام‌شده، از تئوری کلاسیک برای به دست آوردن معادلات استفاده شده است. پاسخ‌های به دست آمده از روش‌های مذکور با نتایج حل عددی با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده‌اند و مشاهده می‌گردد که نتایج دارای دقت مطلوبی می‌باشند.

۲- معادلات حاکم

تئوری تغییر شکل برشی برای نخستین بار توسط نقدی [۶] در سال ۱۹۵۶ برای پوسته‌های ضخیم ارائه شد و میرسکی و هرمان در سال ۱۹۵۸ [۷] از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم استفاده کردند.

¹ Flow plasticity theory

² Normality hypothesis of plasticity

³ Associated flow rule

⁴ Successive approximation method

⁵ Differential Transformation Method

⁶ Matched Asymptotic Method

در این تئوری برخلاف تئوری الاستیسیته‌ی صفحه‌ای از تنش و کرنش برشی چشم‌پوشی نمی‌شود. در این تئوری مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پوسته‌های جدار ضخیم پس از تغییر شکل، الزاماً مستوی و عمود بر سطح میانی باقی نمی‌مانند.

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است، موقعیت هر نقطه m در استوانه‌ی جدار ضخیم با ضخامت ثابت h ، به کمک فاصله‌ی آن از محور استوانه (r) که برابر مجموع فاصله‌ی صفحه‌ی میانی از محور طولی (R) و فاصله‌ی نقطه از صفحه‌ی میانی (z) است و فاصله‌ی آن از پایین استوانه (x) مشخص می‌شود. طول استوانه برابر L در نظر گرفته شده است.

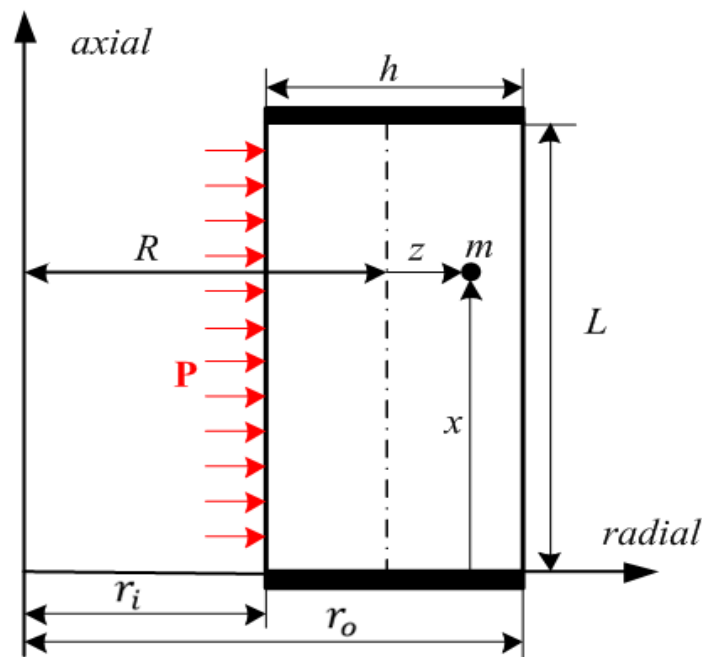
$$m: (r, x) = (R + z, x), \quad h = r_o - r_i. \quad (1)$$

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی میرسکی-هرمان، جابه‌جایی‌ها برای استوانه‌ی متقارن محوری عبارتند از [۱۸]:

$$\begin{cases} U_x(x, z) = u(x) + \phi(x) z \\ U_\theta(x, z) = 0 \\ U_z(x, z) = w(x) + \psi(x) z \end{cases} \quad (2)$$

که در رابطه 0 ، $u(x)$ و $w(x)$ اجزای جابه‌جایی صفحه‌ی میانی می‌باشند. همچنین $\phi(x)$ و $\psi(x)$ توابعی هستند که برای تعیین میدان جابه‌جایی استفاده می‌شوند.



شکل ۱- پروفیل استوانه‌ی جدار ضخیم با جدار ثابت

معادله‌های کرنش-جابجایی در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از [۱۲]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{du}{dx} + \frac{d\phi}{dx} z \\ \varepsilon_\theta = \frac{U_z}{r} = \frac{w + \psi z}{R + z} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = \psi \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = \left(\phi + \frac{dw}{dx} \right) + \frac{d\psi}{dx} z \end{cases} \quad (3)$$

با استفاده از روابط تنش-کرنش می‌توان میدان تنش را از روی کرنش‌ها محاسبه نمود. اجزای تانسور تنش به صورت زیر بیان می‌شود [۱۲].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

در رابطه‌ی σ_i و ε_i به ترتیب بیانگر اجزای تانسور تنش و اجزای تانسور کرنش در جهت‌های محوری (x) ، محیطی (θ) و شعاعی (z) می‌باشند. τ_{xz} نیز تنش برشی می‌باشد. در رابطه‌ی بالا E و ν به ترتیب مدول الاستیسیته و نسبت پواسون هستند. هم‌چنین پارامتر λ در این رابطه‌ی به صورت زیر تعریف شده است.

$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5)$$

منتجه‌های تنش که در شکل (۲) نشان داده شده است، شامل نیروهای نرمال (N_i) ، لنگرهای خمشی (M_i) ، نیروی برشی (Q_x) و لنگر پیچشی (M_{xz}) می‌باشند که در رابطه‌های زیر بیان شده‌اند [۱۲].

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_z \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x(1+z/R) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z(1+z/R) \end{bmatrix} dz \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_z \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x(1+z/R) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z(1+z/R) \end{bmatrix} z dz \quad (7)$$

$$Q_x = K \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}(1 + z/R) dz \quad (8)$$

$$M_{xz} = K \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}(1 + z/R)z dz \quad (9)$$

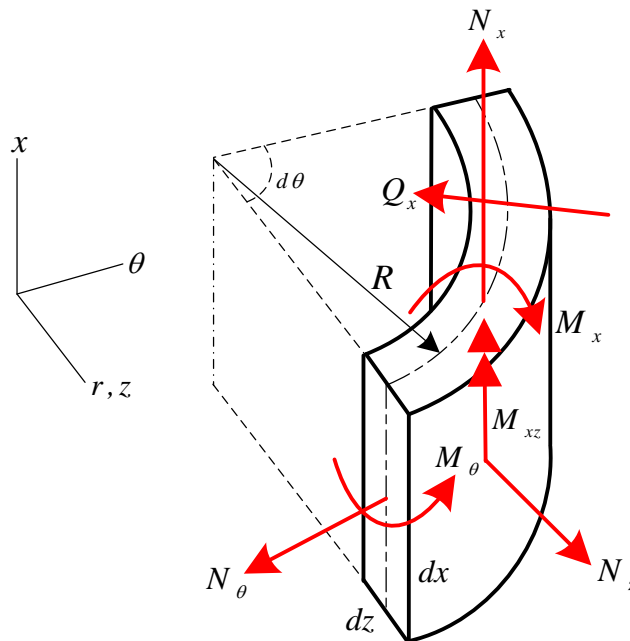
که در روابط بالا K ضریب تصحیح برشی است که برای استوانه $K = \frac{5}{6}$ در نظر گرفته می شود [۲۸]. بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروی خارجی برابر است با:

$$\delta U = \delta W \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)، U انرژی کرنشی کل و W کار کل نیروهای خارجی می باشد. با جایگذاری انرژی کرنشی و کار نیروی خارجی، رابطه ی زیر حاصل می شود.

$$\int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz})(R + z) dz dx = \int_0^L P \delta U_x |_{r_i} r_i dx \quad (11)$$

با قرار دادن رابطه ۰ در رابطه (۱۱) و براساس حساب تغییرات و اصل کار مجازی و استفاده از تعریف منتهج‌های تنش، معادلات تعادل و شرایط مرزی برای پوسته‌ی استوانه‌ای به دست می آیند.



شکل ۲- نمایش منتهج‌های تنش بر روی یک المان استوانه‌ای جدار ثابت [۱۲]

$$\begin{aligned}
 R N_x &= C_0 \\
 R \frac{dM_x}{dx} - R Q_x &= 0 \\
 R \frac{dQ_x}{dx} - N_\theta &= -P \left(R - \frac{h}{2} \right) \\
 R \frac{dM_{xz}}{dx} - R N_z - M_\theta &= P \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

$$[N_x \delta u_x^0 + M_x \delta u_x^1 + Q_x \delta u_z^0 + M_{xz} \delta u_z^1]_{0,L} = 0 \tag{۱۳}$$

برای حل دستگاه معادلات تعادل (۱۲) با استفاده از رابطه‌های (۳) و (۴)، آن‌ها را به صورت جمله‌های جابه‌جایی نوشته و سپس با ساده‌سازی آن‌ها، دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 [A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} &= \{F\} \\
 \{y\} &= \{du/dx \quad \phi \quad w \quad \psi\}^T
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

که درایه‌های غیر صفر ماتریس‌های ضرایب و بردار نیرو به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 A_{22} &= (1 - \nu) R \frac{h^3}{12} \\
 A_{33} &= \mu R h \\
 A_{34} &= A_{43} = \frac{\mu h^3}{12} \\
 A_{33} &= \frac{\mu R h^3}{12} \\
 B_{12} &= B_{21} = (1 - \nu) \frac{h^3}{12} \\
 B_{23} &= -B_{32} = -\mu R h \\
 B_{24} &= -B_{42} = -(\mu - 2\nu) \frac{h^3}{12} \\
 C_{11} &= (1 - \nu) R h \\
 C_{22} &= -\mu R h \\
 C_{33} &= -(1 - \nu) \alpha \\
 C_{44} &= -(1 - \nu) R^2 \alpha \\
 C_{13} &= -C_{31} = \nu h \\
 C_{14} &= -C_{41} = \nu R h \\
 C_{34} &= -C_{43} = -h + (1 - \nu) R \alpha \\
 \{F\} &= \frac{1}{\lambda} \left\{ C_0 \quad 0 \quad -P \left(R - \frac{h}{2} \right) \quad P \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که μ و α در رابطه‌ی (۱۵) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\mu = \frac{5}{12}(1 - 2\nu), \quad \alpha = \ln\left(\frac{R + h/2}{R - h/2}\right) \quad (۱۶)$$

با حل معادلات به دست آمده، حل الاستیک استوانه‌ی جدار ضخیم به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به دست می‌آید. برای یافتن معادلات پلاستیک و حل پلاستیک مسأله از معیار تسلیم فن میزس استفاده می‌شود. تنش مؤثر برای استوانه‌ی متقارن محوری براساس تئوری تسلیم فن میزس به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_e \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_x)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{zx}^2]^{1/2} \quad (۱۷)$$

تابع تسلیم برای ماده‌ی الاستیک-پلاستیک کامل به صورت زیر می‌باشد [۲۹].

$$f = \sigma_e - \sigma_y(r) \quad (۱۸)$$

که σ_y تنش حد تسلیم ماده است. در رابطه‌ی فوق اگر تابع تسلیم کوچک‌تر از صفر باشد، ماده تغییر شکل الاستیک را تجربه می‌کند و اگر تابع تسلیم برابر صفر گردد، ماده تغییر شکل پلاستیک را تجربه خواهد کرد. پس از پلاستیک شدن پوسته، تنش‌ها در خارج از سطح تسلیم قرار می‌گیرند. نمو تنش آزمایشی^۱، $\sigma_{t+\Delta t}^{tr}$ خارج از سطح تسلیم است. در زمان $t + \Delta t$ ، ضریب اصلاح‌کننده‌ی پلاستیک^۲ برای به‌روزرسانی تنش و بازگشت آن به سطح تسلیم استفاده می‌شود. در صفحه‌ی تنش انحرافی، سطح تسلیم معیار فن میزس به دایره تبدیل می‌شود. بر اساس شرط نرمال بودن تنش‌ها در سطح تسلیم، ضریب اصلاح‌کننده‌ی پلاستیک به سمت مرکز دایره خواهد بود. از این‌رو، این روش با نام روش بازگشت شعاعی شناخته می‌شود. از این پس در روابط پیش‌رو، تمام مقادیر نشان داده‌شده در پایان مرحله‌ی زمانی هستند. بنابراین σ تنش به‌روزشده در زمان $t + \Delta t$ و σ_t نشان‌دهنده‌ی تنش در ابتدای مرحله‌ی زمانی است. بیان قانون هوک برحسب تانسورهای تنش و کرنش به صورت زیر می‌باشد.

$$\tilde{\sigma} = 2G\tilde{\varepsilon}^e + \lambda \operatorname{tr}(\tilde{\varepsilon}^e)\tilde{I} \quad (۱۹)$$

که در رابطه (۱۹)، λ و G ثابت‌های لامه هستند. در پایان مرحله‌ی زمانی، تانسور کرنش الاستیک را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\tilde{\varepsilon}^e = \tilde{\varepsilon}_t^e + \Delta\tilde{\varepsilon}^e = \tilde{\varepsilon}_t^e + (\Delta\tilde{\varepsilon} - \Delta\tilde{\varepsilon}^p) \quad (۲۰)$$

^۱ Trial stress

^۲ Plastic corrector

براساس شرایط تراکم‌ناپذیری پلاستیسیته $(\text{tr}(\Delta\tilde{\varepsilon}^p) = 0)$ و جایگزینی معادله (۲۰) در معادله (۱۹)، تنش در پایان مرحله‌ی زمانی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\tilde{\sigma} = 2G(\tilde{\varepsilon}_t^e + \Delta\tilde{\varepsilon}) + \lambda \text{tr}(\tilde{\varepsilon}_t^e + \Delta\tilde{\varepsilon})\tilde{I} - 2G\Delta\tilde{\varepsilon}^p \quad (21)$$

دو جمله‌ی نخست معادله (۲۱)، تانسور تنش آزمایشی $(\tilde{\sigma}^{tr})$ یا پیش‌بینی‌کننده‌ی الاستیک را نشان می‌دهد. جمله‌ی سوم معادله (۲۱) بیانگر اصلاح‌کننده‌ی پلاستیک می‌باشد. براساس قانون جریان مرتبط، معیار تسلیم فن میزس و فرض هم‌جهت بودن نمو کرنش پلاستیک با خط نرمال مماس بر سطح تسلیم، نمو کرنش پلاستیک به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۲].

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^p = \frac{3}{2}\Delta p \frac{\tilde{\sigma}'}{\sigma_e} \quad (22)$$

که در آن Δp نشان‌دهنده‌ی نمو کرنش پلاستیک مؤثر و $\tilde{\sigma}'$ بیانگر تانسور تنش انحرافی است. با جایگذاری معادله (۲۲) در معادله (۲۱) و نوشتن تانسور تنش به حالت تنش متوسط و تنش انحرافی و بازنویسی معادله (۲۱)، معادله زیر به دست می‌آید.

$$\left(1 + 3G \frac{\Delta p}{\sigma_e}\right) \tilde{\sigma}' = \tilde{\sigma}^{tr} - \frac{1}{3}(\tilde{\sigma} : \tilde{I})\tilde{I} \quad (23)$$

با انجام محاسبات، می‌توان نشان داد که سمت راست رابطه (۲۳) معادل تانسور تنش انحرافی، تنش آزمایشی است [۲۲]. بنابراین رابطه (۲۳) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\left(1 + 3G \frac{\Delta p}{\sigma_e}\right) \tilde{\sigma}' = \tilde{\sigma}^{tr'} \quad (24)$$

در انتها، با انجام ضرب تانسوری منقبض شده^۱ در طرفین معادله (۲۴) با خودش، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۲۲].

$$\sigma_e + 3G \Delta p = \sigma_e^{tr} \quad (25)$$

با جایگذاری رابطه (۲۵) در تابع تسلیم برای مواد الاستیک-پلاستیک کامل، نمو کرنش پلاستیک مؤثر و تانسور تنش به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\Delta p = \frac{\sigma_e^{tr} - \sigma_y(r)}{3G}, \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{tr} - 3G \Delta p \frac{\tilde{\sigma}'}{\sigma_e} \quad (26)$$

¹ Contracted tensor product

۳- حل تحلیلی

در این بخش حل تحلیلی معادلات حاکم بر مسأله با استفاده از دو روش تحلیلی انجام و درستی سنجی نتایج با حل اجزای محدود با استفاده از نرم افزار آباکوس انجام شده است. ابتدا حل تحلیلی با استفاده از روش مرسوم حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از مسأله‌ی مقادیر ویژه انجام شد؛ سپس با استفاده از تکنیک اغتشاشی MAM مسأله حل می‌شود.

۳-۱- حل تحلیلی به کمک مسأله‌ی مقادیر ویژه

مجموعه معادله‌های غیرخطی (۱۴) با ضرایب ثابت می‌باشد. با تعریف اپراتور دیفرانسیلی $P(D)$ دستگاه معادلات (۱۴) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$P(D) = [A]D^2 + [B]D + C \quad (27)$$

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

بنابراین:

$$P(D)\{y\} = \{F\} \quad (28)$$

معادله دیفرانسیلی بالا شامل مجموع دو حل عمومی $\{y\}_g$ و حل خصوصی $\{y\}_p$ می‌باشد. برای حل عمومی $\{y\}_g = \{V\}e^{mx}$ در معادله $P(D)\{y\} = 0$ جایگذاری می‌شود.

$$e^{mx}[m^2[A] + m[B] + [C]]\{V\} = \{0\} \quad (29)$$

معادله (۲۹) مسأله‌ی مقدار ویژه می‌باشد و برای حل آن، دترمینان ماتریس ضرایب باید صفر در نظر گرفته شود.

$$\det[m^2[A] + m[B] + [C]] = 0 \quad (30)$$

دترمینان فوق منجر به چند جمله‌ای درجه هشت می‌شود. هشت مقدار ویژه که شامل سه جفت ریشه‌ی مزدوج و یک جفت ریشه‌ی صفر می‌باشد. با محاسبه بردارهای ویژه $\{V\}_i$ مرتبط با مقدارهای ویژه‌ی متناظر، حل عمومی معادله به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^6 C_i \{V\}_i e^{m_i x} \quad (31)$$

ثابت‌های C_i با به کار بردن شرایط مرزی محاسبه می‌شوند. جواب خصوصی معادله (۲۸) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\{y\}_p = [C]^{-1} \{F\} \quad (32)$$

بنابراین، حل معادله (۲۸) به صورت زیر می‌باشد.

$$\{y\} = \{y\}_g + \{y\}_p = \sum_{i=1}^6 C_i \{V\}_i e^{m_i x} + [C]^{-1} \{F\} \quad (33)$$

در نهایت u از انتگرال گیری du/dx حاصل می‌شود.

$$u = \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right) dx + C_7 \quad (34)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، هشت ثابت مجهول (C_0 تا C_7) وجود دارد. هشت شرط مرزی نیز وجود دارد که برای استوانه‌ی دو سر گیردار از برابر صفر قرار دادن اجزای بردار جابه‌جایی (u ، ϕ ، w و ψ) در $x = 0$ و $x = L$ به دست می‌آیند.

۳-۲- حل تحلیلی با تکنیک MAM

تکنیک اغتشاشات، روش مناسبی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیلی را ارائه می‌دهد. در MAM همگرایی پاسخ سریع می‌باشد و برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با استفاده از تکنیک اغتشاشات، باید آن‌ها را بی بعد ساخت و سپس معادلات اغتشاشاتی را به دست آورد. نسبت ضخامت به طول استوانه (h/L) به عنوان پارامتر اغتشاشی کوچک (ε) در نظر گرفته می‌شود. هرچه پوسته‌ی استوانه‌ای بلندتر باشد، پارامتر اغتشاش کوچک‌تر می‌شود که منجر به سریع‌تر شدن همگرایی پاسخ می‌شود. فرم بی‌بعد x به صورت $x^* = x/L$ در نظر گرفته می‌شود. سایر پارامترها براساس ضخامت (h) بی‌بعد می‌شوند.

$$z^* = z/h, \quad R^* = R/h, \quad u^* = u/h, \quad w^* = w/h \quad (35)$$

با جایگذاری پارامترهای بی‌بعد در معادله (۲۸)، دستگاه معادلات به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon^2 \frac{d}{dx^*} \left([A^*] \frac{d}{dx^*} \{y^*\} \right) + \varepsilon [B^*] \frac{d}{dx^*} \{y^*\} + [C^*] \{y^*\} = \{F^*\} \quad (36)$$

$$\{y^*\} = \left\{ \frac{h}{L} \frac{du^*}{dx^*} \quad \phi \quad w^* \quad \psi \right\}^T$$

برای حل معادله (۳۶) با تکنیک اغتشاشی MAM باید مسأله را برای سه حالت حل کرد. (۱) منطقه‌ی دور از مرز (حل خارجی)^۱، (۲) منطقه‌ی مرزی در $x = 0$ (حل داخلی)^۲ در $x^* = 0$ و (۳) منطقه‌ی مرزی در $x = L$ (حل داخلی در $x^* = 1$). جواب نهایی از ترکیب حل‌های به دست آمده، حاصل می‌شود [۳۰].

¹ Outer solution

² Inner solution

۳-۲-۱- حل خارجی

برای حل خارجی که نقاط دور از مرز را شامل می‌شود، حل به صورت سری اغتشاشی یکنواخت در نظر گرفته می‌شود.

$$\{y_{out}^*\} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \{y_n(x^*)\} = \{y_0\} + \varepsilon \{y_1\} + \dots \quad (37)$$

با قرار دادن رابطه (۳۷) در معادله (۳۶) و جدا کردن جمله‌های مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک براساس پارامتر اغتشاشی ε ، معادله‌های زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &= [A_3^*] \{y_0\} = \{F^*\} \\ \varepsilon^1 &= [A_1^*] \{y_1\} + [A_2^*] \frac{d}{dx^*} \{y_0\} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

معادله‌های بالا، یک دسته معادله با ضرایب متغیر می‌باشند. با استفاده از روش ماتریس معکوس حل مرتبه‌های صفر و یک معادله به ترتیب به صورت روابط (۳۹) و (۴۰) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \{y_0\} &= \left\{ \frac{h}{L} \frac{du_0^*}{dx^*} \quad 0 \quad w_0^* \quad \psi_0 \right\}^T \\ \{y_{out}^*\} &= \{y_0\} \\ \begin{cases} U_x = u_0 \\ U_z = w_0 + \psi_0 z \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \{y_1\} &= \{0 \quad \phi_1 \quad 0 \quad 0\}^T \\ \{y_{out}^*\} &= \{y_0\} + \varepsilon \{y_1\} \\ \begin{cases} U_x = u_0 + \varepsilon \phi_1 z \\ U_z = w_0 + \psi_0 z \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

۳-۲-۲- حل داخلی در $x=0$

برای حل در مرز $x=0$ متغیر سریع به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\eta = \frac{x-0}{h} = \frac{x^*}{\varepsilon} \quad (41)$$

بسط تیلور ماتریس‌های ضرایب و بردار نیرو به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} [A_i^*(x^*)] &= [A_i^*(0)] + x^* \left[\frac{dA_i^*}{dx^*} \right]_{x^*=0} + \dots \\ \{F^*(x^*)\} &= \{F^*(0)\} + x^* \left\{ \frac{dF^*}{dx^*} \right\}_{x^*=0} + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

حل داخلی به صورت سری اغتشاشی یکنواخت فرض می شود و به صورت زیر نوشته می شود.

$$\{y_{in(0)}^*\} = Y_0 = \{V_0\} + \varepsilon \{V_1\} + \dots \quad (43)$$

روابط زیر با برابر قرار دادن ضرایب یکنواخت از مرتبه های صفر و یک پارامتر ε به دست می آید.

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: L(V_0, \eta|0) &= \{F^*(0)\} \\ \varepsilon^1: L(V_1, \eta|0) + M(V_0, \eta|0) &= \eta \left\{ \frac{df^*}{dx^*} \right\}_{x^*=0} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \{V_0\} &= \{V_0\}_g + \{V_0\}_p \\ \{V_1\} &= \{V_1\}_g + \{V_1\}_p \\ \{y_{in(0)}^*\} &= \{Y_0\} = \{V_0\} + \varepsilon \{V_1\} \end{aligned} \quad (45)$$

دسته معادله های رابطه (44) دارای جواب عمومی و خصوصی به صورت زیر می باشند.

۳-۲-۳- حل داخلی در $x=L$

برای حل در مرز $x=L$ متغیر سریع به صورت زیر تعریف می شود.

$$\zeta = \frac{x-L}{h} = \frac{x^*-1}{\varepsilon} \quad (46)$$

بسط تیلور ماتریس های ضرایب و بردار نیرو به صورت زیر می باشد

$$\begin{aligned} [A_i^*(x^*)] &= [A_i^*(1)] + (x^*-1) \left[\frac{dA_i^*}{dx^*} \right]_{x^*=1} + \dots \\ \{F^*(x^*)\} &= \{F^*(1)\} + (x^*-1) \left\{ \frac{dF^*}{dx^*} \right\}_{x^*=1} + \dots \end{aligned} \quad (47)$$

حل داخلی در مرز $x=L$ به صورت زیر نوشته می شود.

$$\{y_{in(L)}^*\} = Y_L = \{W_0\} + \varepsilon \{W_1\} + \dots \quad (48)$$

روابط زیر با برابر قرار دادن ضرایب یکنواخت از مرتبه‌های صفر و یک پارامتر ε به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: L(W_0, \zeta|1) &= \{F^*(1)\} \\ \varepsilon^1: L(W_1, \zeta|1) + M(W_0, \zeta|1) &= \zeta \left\{ \frac{df^*}{dx^*} \right\}_{x^*=0} \end{aligned} \quad (49)$$

دسته معادله‌های رابطه (49) دارای جواب عمومی و خصوصی به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned} \{W_0\} &= \{W_0\}_g + \{W_0\}_p \\ \{W_1\} &= \{W_1\}_g + \{W_1\}_p \\ \{y_{in(L)}^*\} &= \{Y_L\} = \{W_0\} + \varepsilon\{W_1\} \end{aligned} \quad (50)$$

۳-۲-۴- حل ترکیبی

حل ترکیبی مسأله از رابطه‌ی (51) که مجموع حل خارجی و حل داخلی در مرزها منهای بخش هم‌پوشانی می‌باشد، به دست می‌آید. با استفاده از تکنیک اغتشاشی MAM برای به دست آوردن بخش دارای هم‌پوشانی ابتدا حل‌های داخلی به دست آمده در مرزها به فرم x^* نوشته می‌شود. سپس رابطه‌ی به دست آمده به صورت پارامتر کوچک ε گسترده می‌شود و دو جمله‌ی $\{J_0\}$ و $\{J_1\}$ به عنوان بخش هم‌پوشانی به ترتیب در مرزهای $x^* = 0$ و $x^* = 1$ در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \{y^*\} &= \{y_{out}^*\} + \{y_{in}^*\} - \{J_{over}\} \\ \{y_{in}^*\} &= \{y_{in(0)}^*\} + \{y_{in(L)}^*\} = \{Y_0\} + \{Y_L\} \\ \{J_{over}\} &= \{J_0\} + \{J_L\} \end{aligned} \quad (51)$$

۴- نتایج

در این بخش به حل الاستیک یک استوانه‌ی دوسر گیردار تحت فشار داخلی پرداخته می‌شود. استوانه به ترتیب دارای شعاع داخلی و خارجی 40 و 60 میلی‌متر و طول 800 میلی‌متر می‌باشد. مدول یانگ، تنش حد تسلیم و نسبت بواسون برای استوانه به ترتیب 200 گیگاپاسکال، 250 مگاپاسکال و 0/3 می‌باشد. فشار داخلی پوسته‌ی استوانه‌ای 80 مگاپاسکال در نظر گرفته شده است.

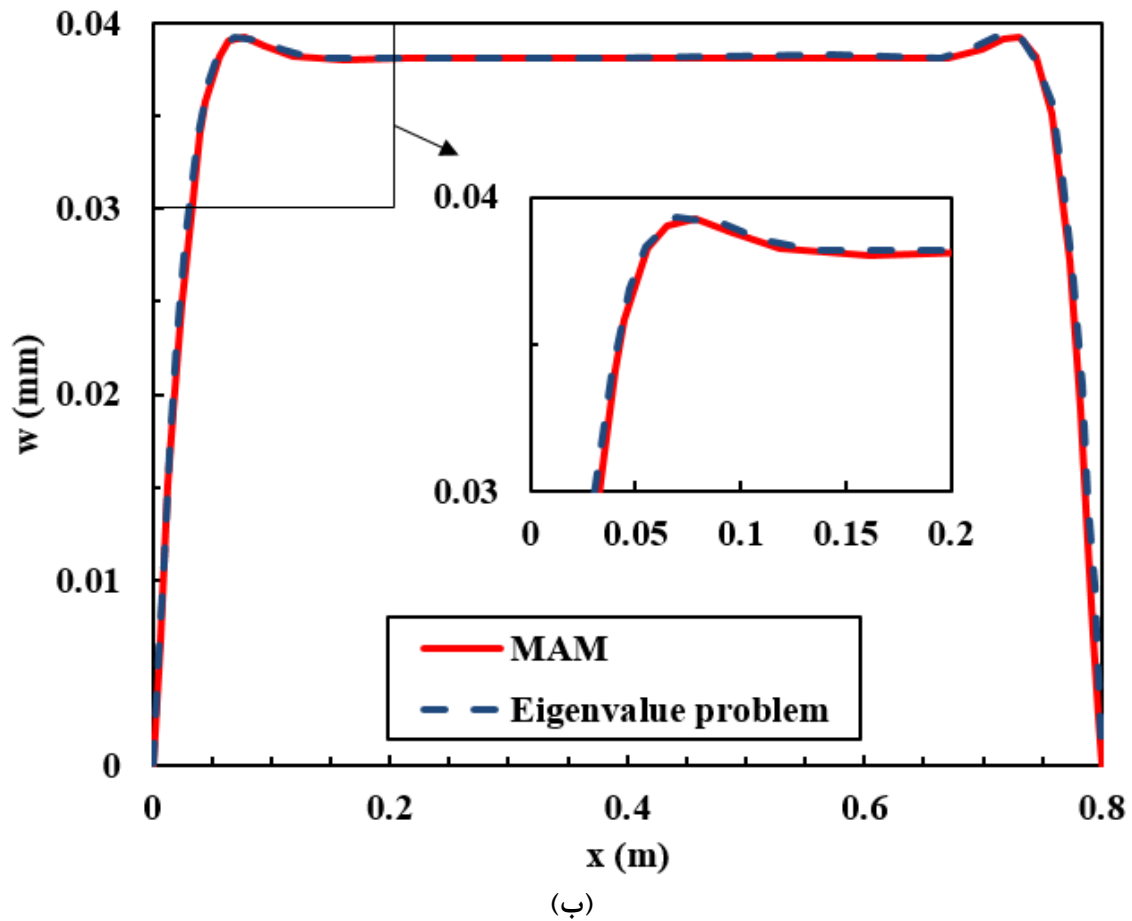
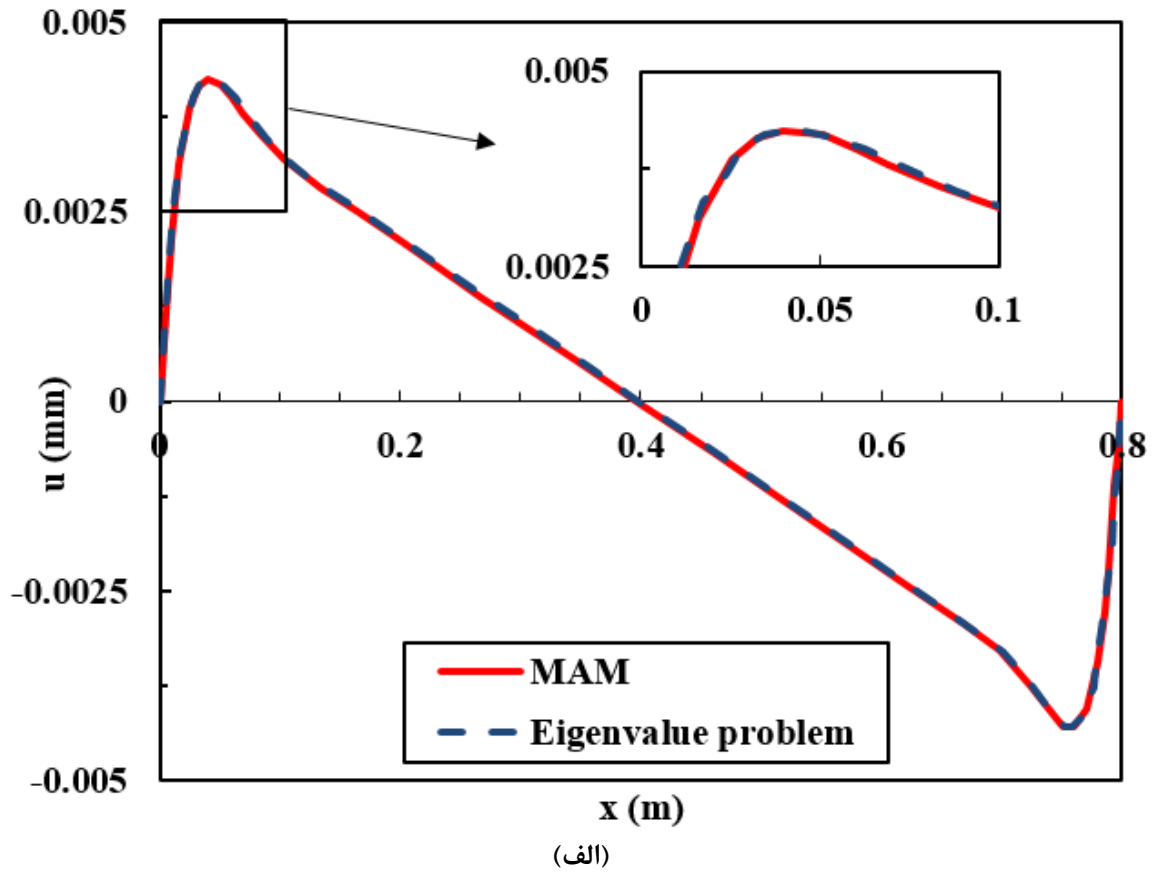
به منظور نشان دادن اثربخشی و دقت نتایج پژوهش حاضر، روش اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار آباکوس انجام شده است. از المان درجه‌ی دو CAX8R برای مش‌بندی استوانه استفاده شده است. اندازه المان‌ها یک میلی‌متر در نظر گرفته و همگرایی مش برای این نوع و اندازه‌ی المان انجام شده است. جدول (1) مقایسه‌ی بین جابه‌جایی‌های طولی و شعاعی، تنش‌های محیطی، شعاعی و برشی را در لایه‌ی میانی و در سه مقطع مختلف استوانه نشان می‌دهد. همان‌طور که در جدول (1) نشان داده شده، در نقاط دور از مرز و نزدیک به وسط استوانه، نتایج جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها با استفاده از روش‌های تحلیلی مسأله‌ی مقادیر ویژه و تکنیک MAM دارای دقت بسیار بالایی می‌باشند. با نزدیک شدن به مرزها خطای به دست آمده از روش‌های تحلیلی افزایش

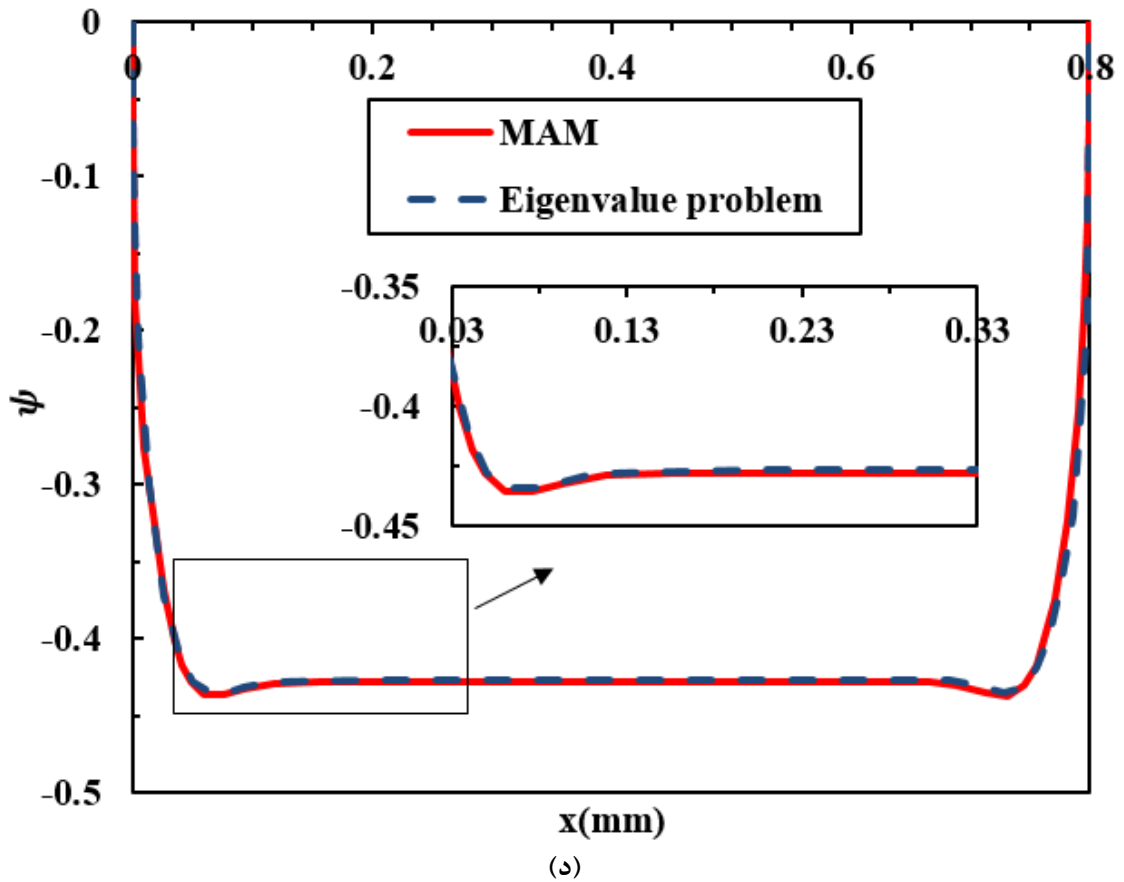
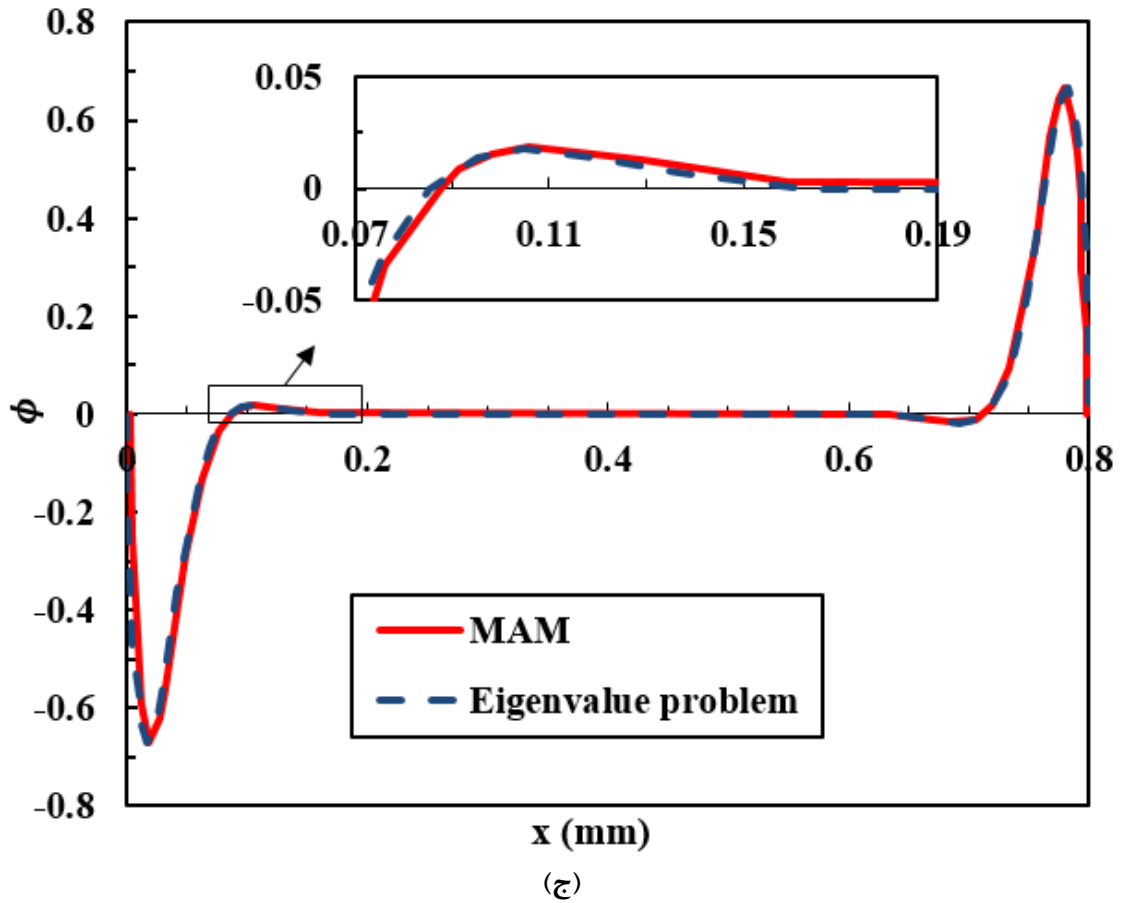
می‌یابد. البته شایان ذکر است که دو روش تحلیلی مذکور دقت مناسبی نسبت به هم دارند و خطای این روش‌ها نسبت به حل اجزای محدود مربوط به انتخاب میدان جابه‌جایی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول می‌باشد. با انتخاب تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالاتر می‌توان خطای میدان جابه‌جایی و به تبع آن تنش‌ها را در نقاط نزدیک مرز کاهش داد.

شکل‌های (۳) تغییرات اجزای میدان جابه‌جایی در راستای طولی استوانه‌ی دوسر گیردار را نشان می‌دهد. به دلیل تقارن محوری استوانه، اجزای جابه‌جایی در راستای شعاعی صفر می‌باشد. با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، هر کدام از جابه‌جایی‌های محوری و طولی استوانه دارای دو جزء جابه‌جایی می‌باشد که شامل جابه‌جایی لایه‌ی میانی و تابعی که برای تعیین میدان جابه‌جایی هستند. شکل (۴) نیز تغییرات جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه و در وسط طول آن را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل‌های (۳) و (۴) مشاهده می‌شود، روش مسأله‌ی مقدار ویژه و تکنیک MAM تطابق زیادی در به‌دست آوردن جابه‌جایی‌های استوانه دارند.

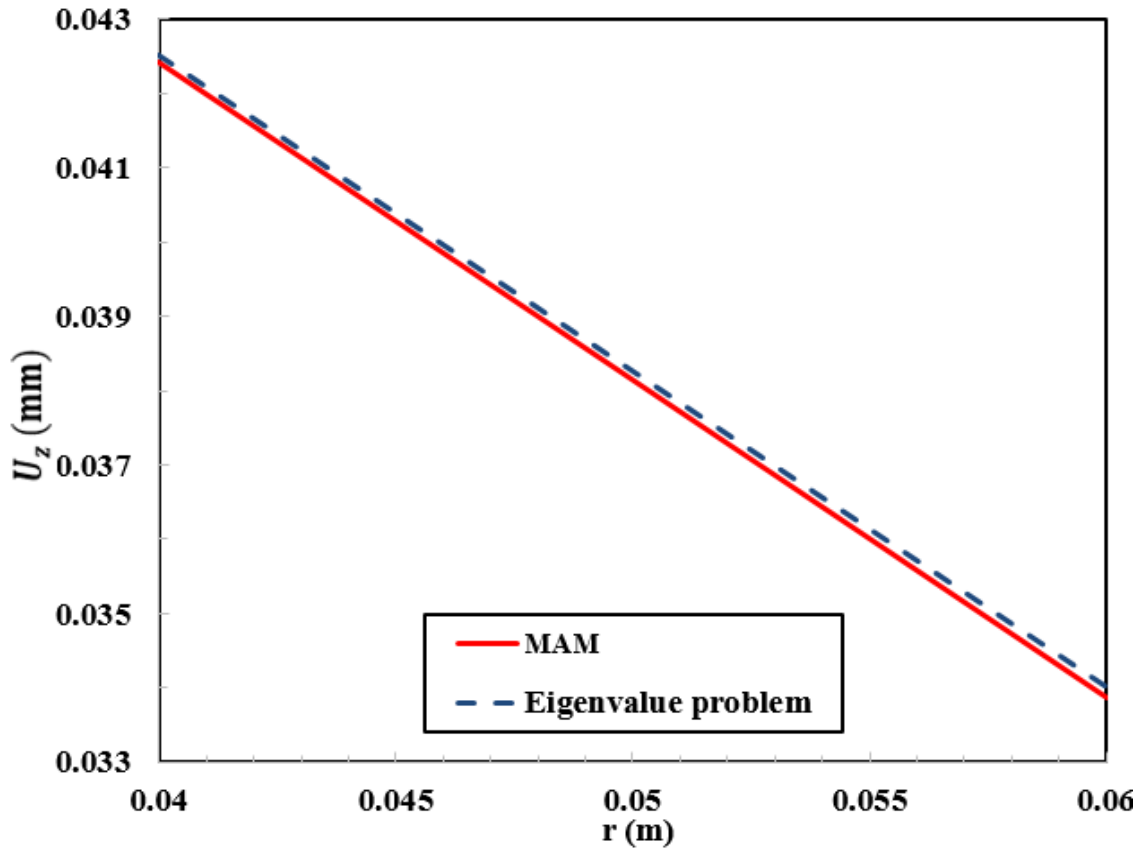
جدول ۱- مقایسه جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها در استوانه

FEM	MAM	Eigenvalue problem	
$x = L/2$			
.	.	.	$U_x (mm)$
۰/۰۳۸۴۳	۰/۰۳۸۱۵	۰/۰۳۸۲۵	$U_z (mm)$
۱۵۶/۱۴۲	۱۵۵/۵۸۶	۱۵۵/۶۱۹	$\sigma_\theta (MPa)$
-۲۸/۱۴۲	-۲۷/۵۹۲	-۲۷/۶۱۹	$\sigma_r (MPa)$
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	.	$\tau_{zx} (MPa)$
$x = L/4$			
۰/۰۰۲۲۱	۰/۰۰۲۱۵	۰/۰۰۲۱۶	$U_x (mm)$
۰/۰۳۸۴۳	۰/۰۳۸۱۵	۰/۰۳۸۲۵	$U_z (mm)$
۱۵۶/۱۲۳	۱۵۵/۵۵۶	۱۵۵/۵۸۷	$\sigma_\theta (MPa)$
-۲۸/۱۴۳	-۲۷/۵۹۸	-۲۷/۶۲۷	$\sigma_r (MPa)$
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	.	$\tau_{zx} (MPa)$
$x = L/40$			
۰/۰۰۳۵۰	۰/۰۰۳۳۹	۰/۰۰۳۳۶	$U_x (mm)$
۰/۰۲۰۹۲	۰/۰۲۰۷۲	۰/۰۲۰۷۸	$U_z (mm)$
۸۴/۸۸۹	۸۴/۸۲۹	۸۴/۹۷۶	$\sigma_\theta (MPa)$
۳۱/۹۶۹	۲۹/۶۸۲	۲۹/۸۸۷	$\sigma_r (MPa)$
۲۲/۷۸۵	۱۹/۸۹۷	۱۹/۲۷۹	$\tau_{zx} (MPa)$

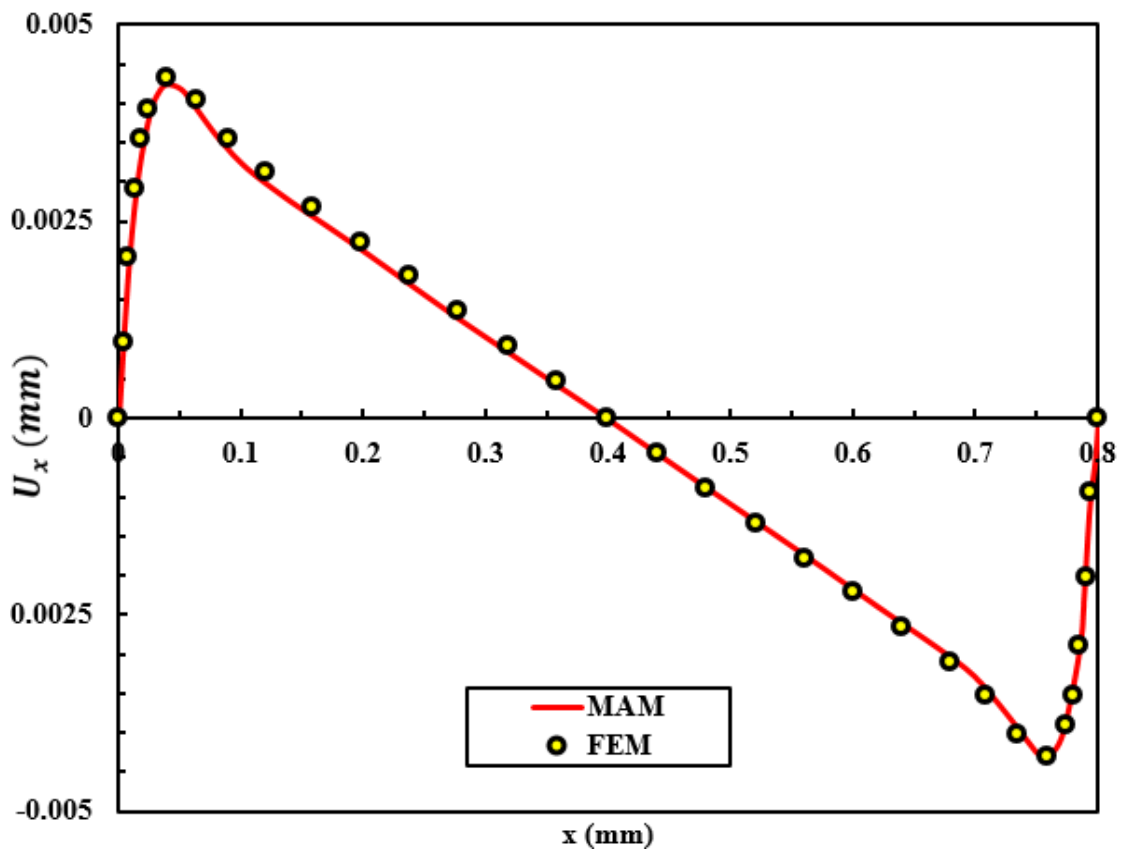




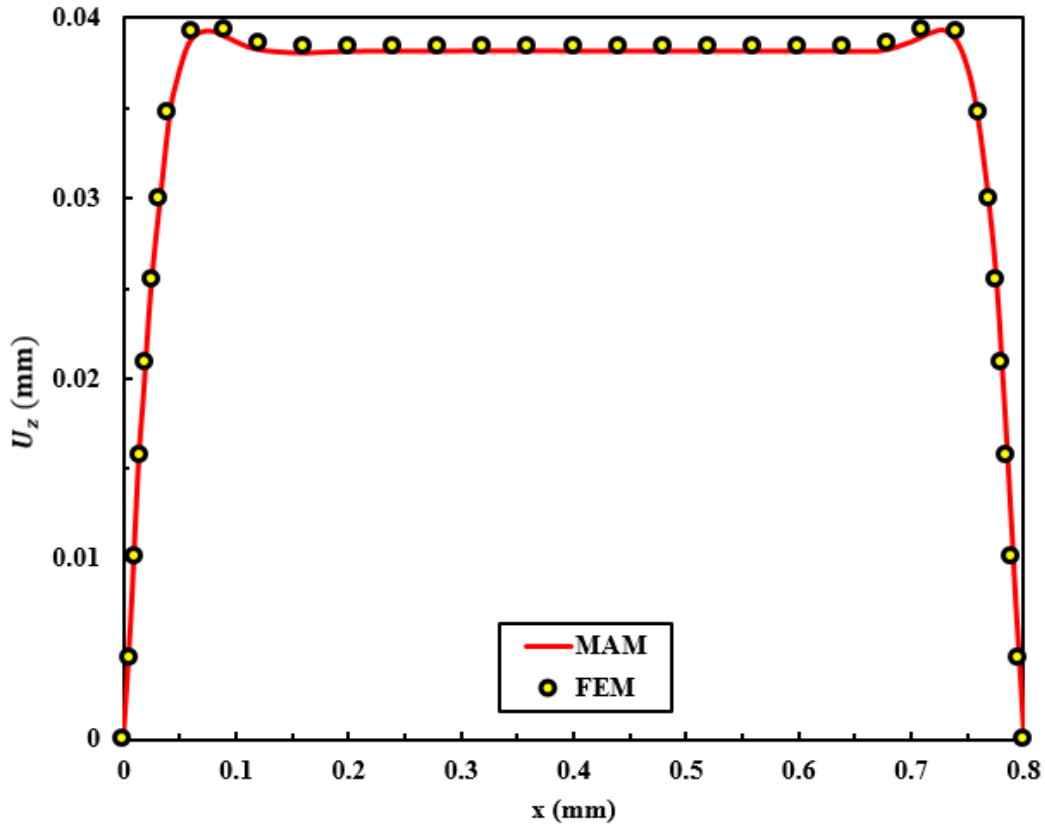
شکل ۳- تغییرات اجزای جابه‌جایی‌ها در راستای طولی استوانه، (الف) $u(x)$ ، (ب) $w(x)$ ، (ج) $\phi(x)$ و (د) $\psi(x)$



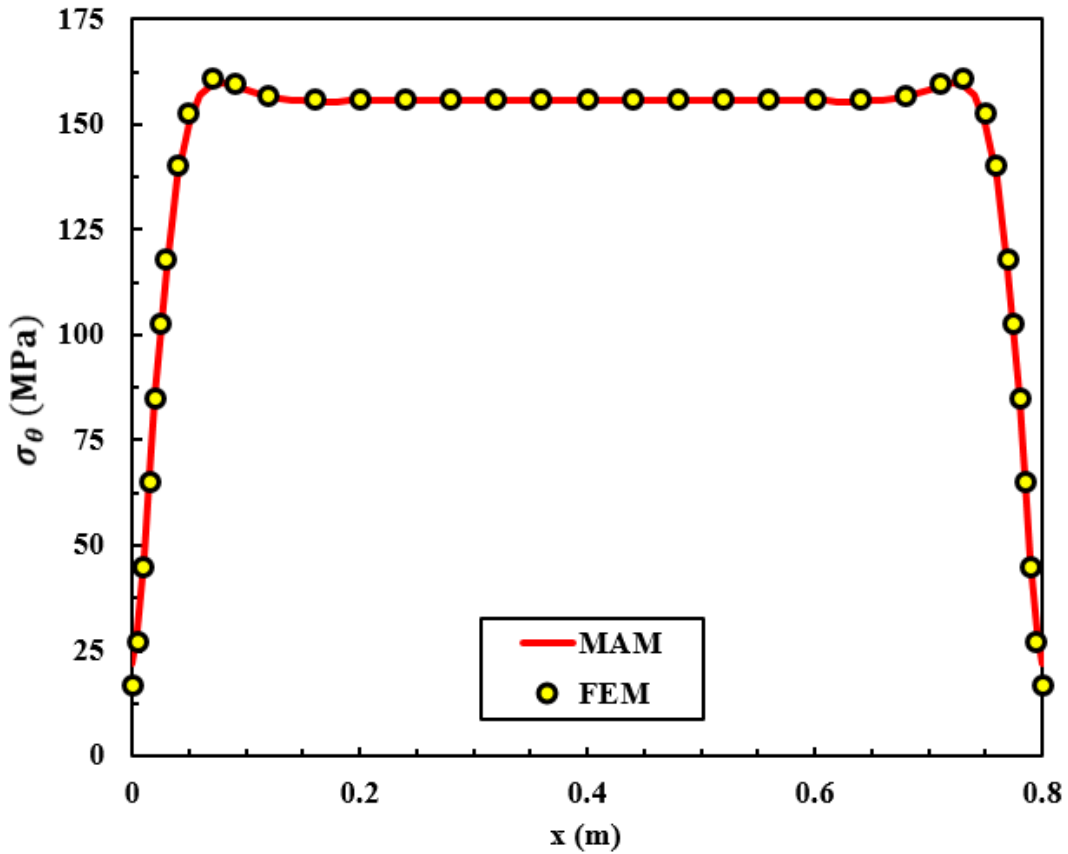
شکل ۴- تغییرات جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه و در وسط طول آن



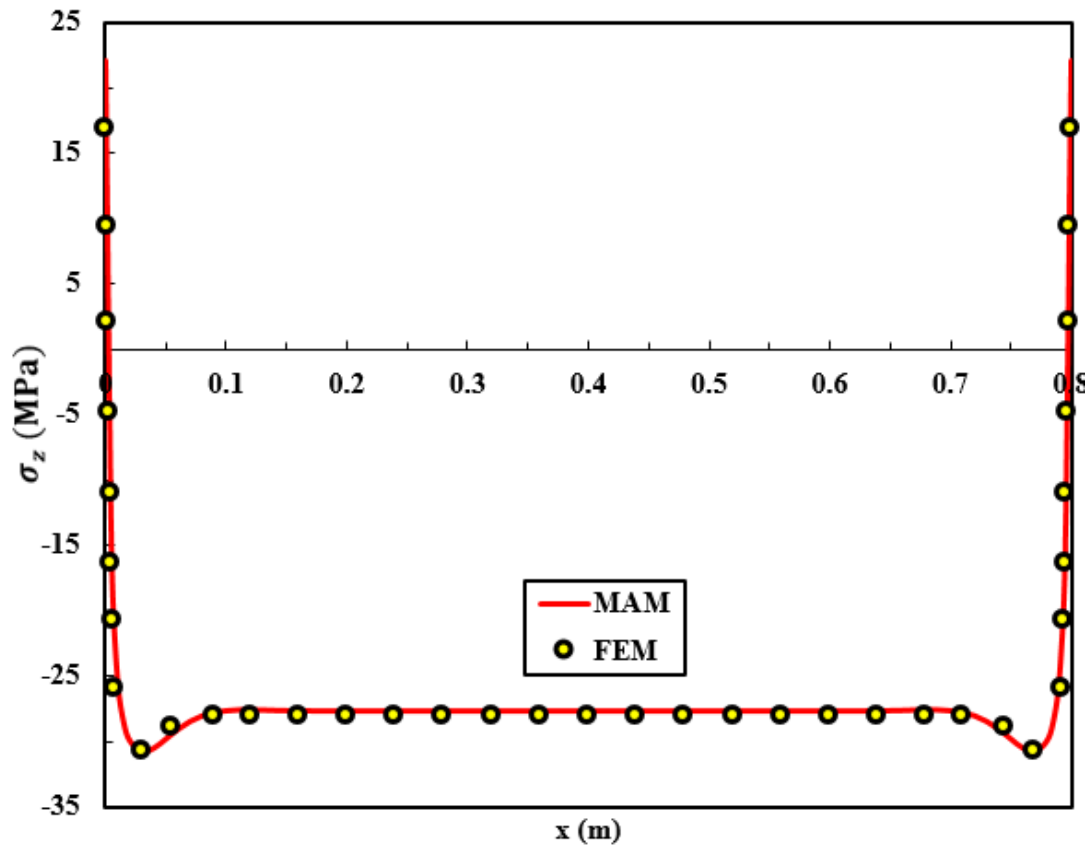
شکل ۵- جابه‌جایی طولی در لایه‌ی میانی استوانه‌ی دوسر گیردار



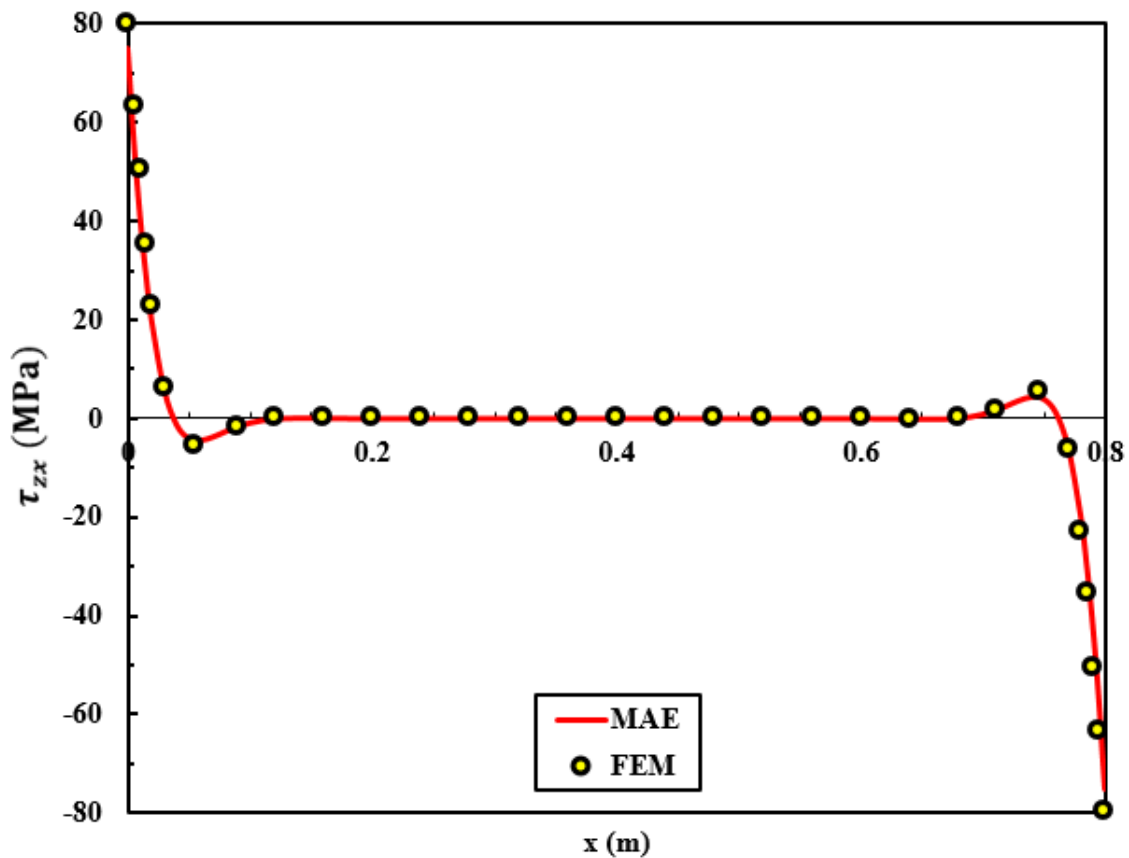
شکل ۶- جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی استوانه‌ی دوسر گیردار



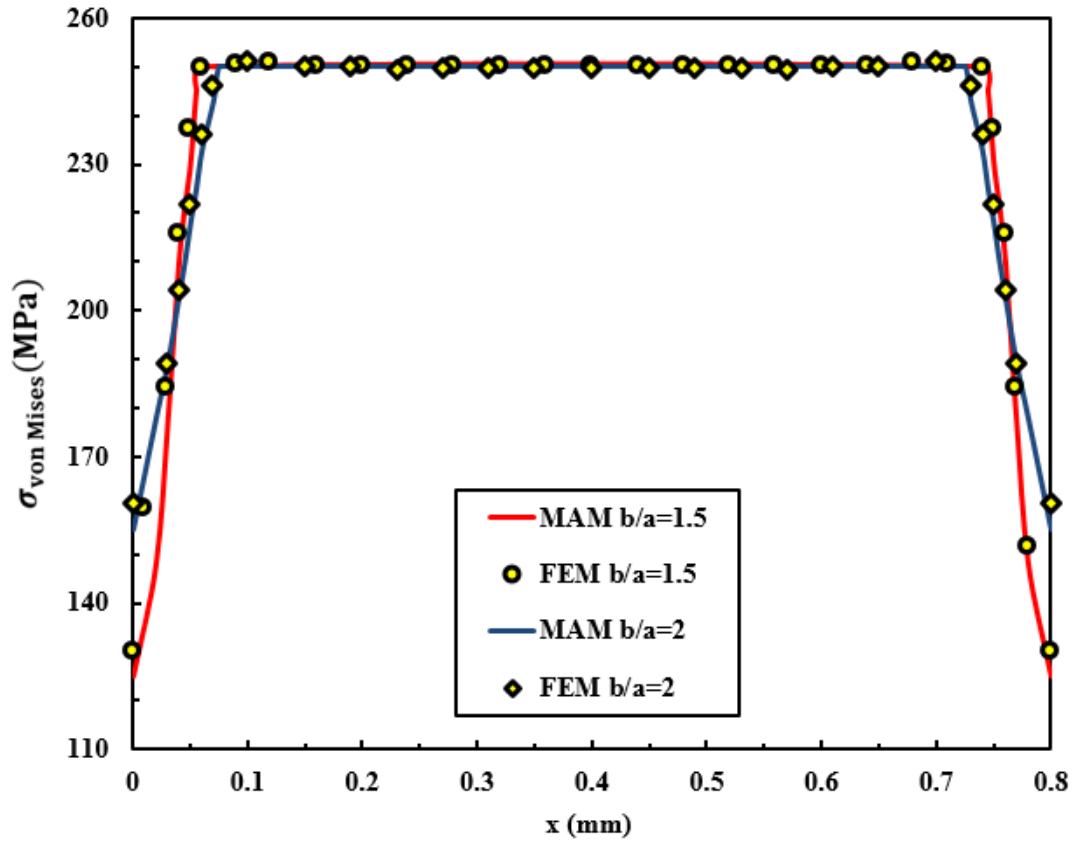
شکل ۷- تنش محیطی در لایه‌ی میانی استوانه‌ی دوسر گیردار



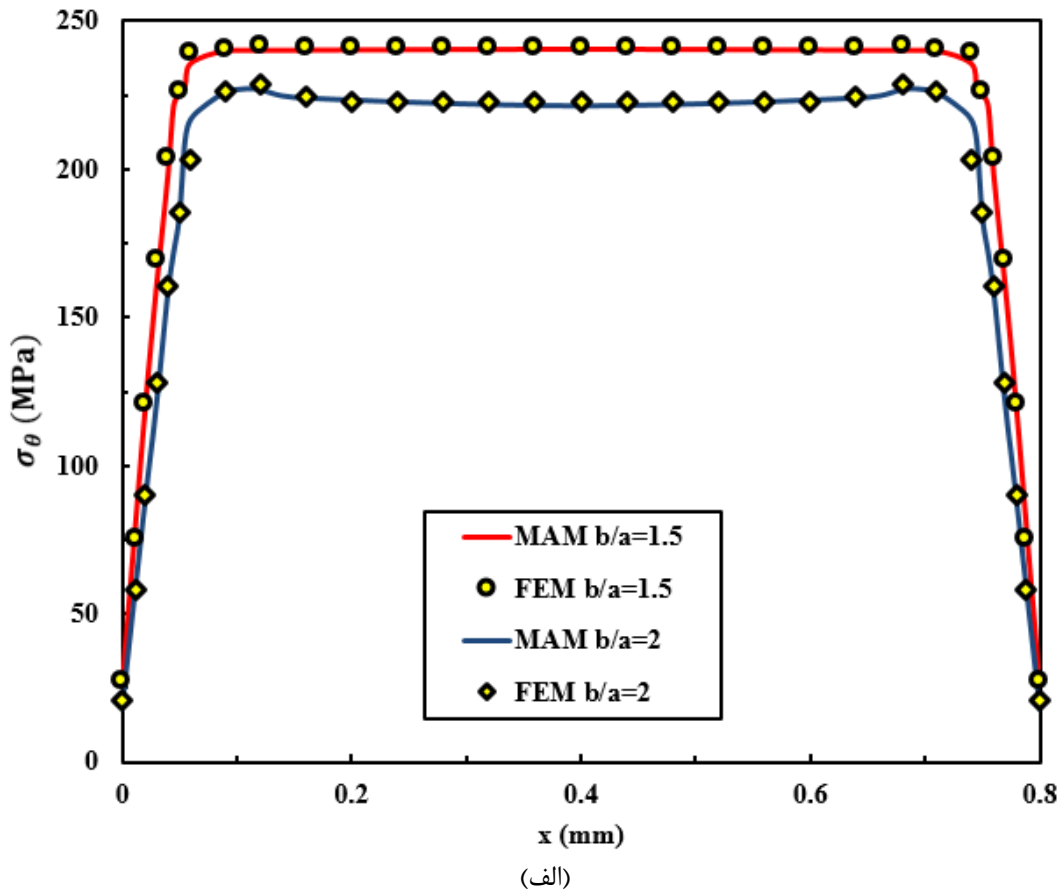
شکل ۸- تنش شعاعی در لایه‌ی میانی استوانه‌ی دوسر گیردار



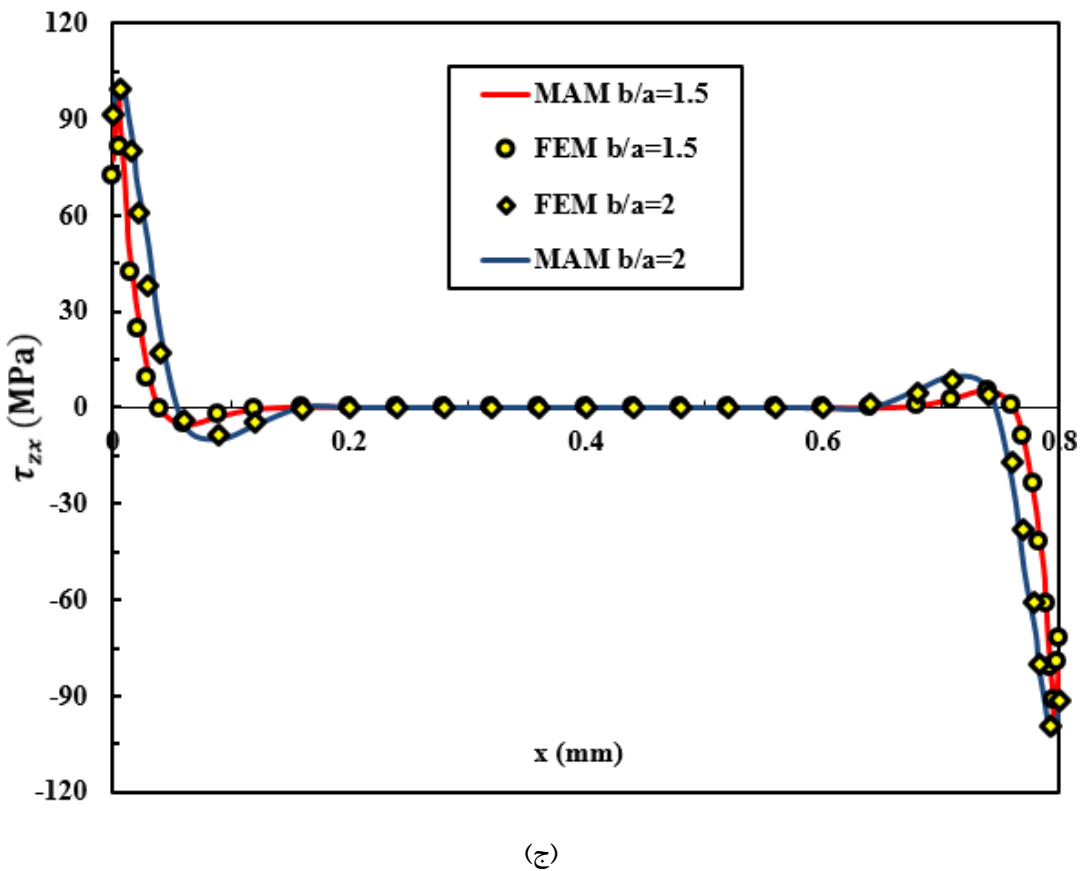
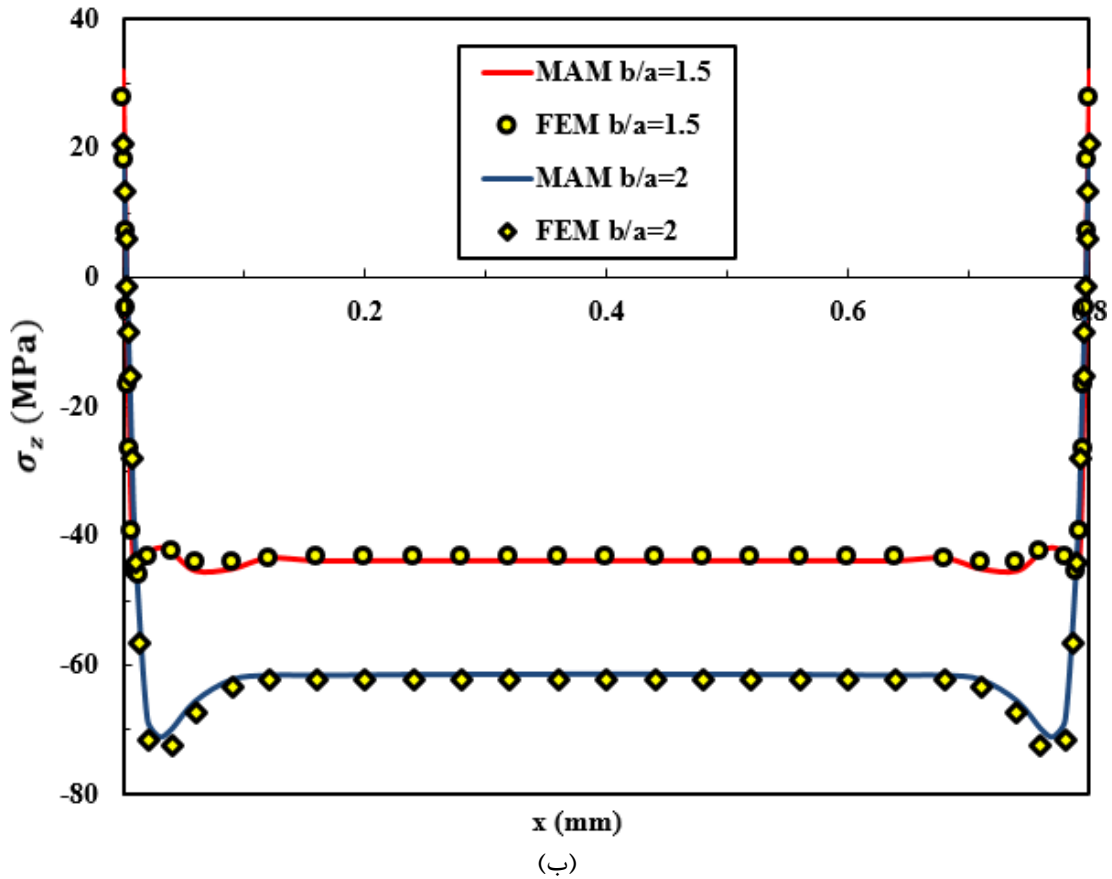
شکل ۹- تنش برشی در لایه‌ی میانی استوانه‌ی دوسر گیردار



شکل ۱۰- تنش فن میزس در لایه‌ی میانی استوانه‌ی دوسر گیردار در لحظه‌ی تسلیم در وسط استوانه ($a = 40 \text{ mm}$)



(الف)



شکل ۱۱- تنش در لایه‌ی میانی استوانه دوسر گیردار در لحظه‌ی تسلیم در وسط استوانه ($a = 40 \text{ mm}$): الف) تنش محیطی، ب) تنش شعاعی، ج) تنش برشی

در شکل‌های (۵) تا (۹) جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها در لایه‌ی میانی استوانه‌ی دوسر گیردار و در راستای طولی استوانه نشان داده شده است. این نمودارها با استفاده از تکنیک MAM به دست آمده است و با روش اجزای محدود به کمک نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. همان‌طور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود، تکنیک اغتشاشی MAM دقت بسیار بالایی در به دست آوردن جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها دارد. همان‌گونه که در نمودارها مشخص است، به دلیل شرط مرزی دوسر گیردار برای استوانه، جابه‌جایی‌های طولی و شعاعی در مرزها برابر صفر می‌شوند. جابه‌جایی شعاعی به دلیل فشار داخلی موجود در استوانه، مثبت است و به دلیل شرط مرزی دوسر گیردار باید از صفر در مرزها تا مقدار ثابت خود در نقاط دور از مرزها تغییر کند. به دلیل تقارن مسأله، در وسط استوانه، جابه‌جایی طولی صفر خواهد بود و در نیمه‌ی بالایی و نیمه‌ی پایینی به دلیل جهت تغییرات این جابه‌جایی که به ترتیب به سمت پایین و بالا می‌باشد، منفی و مثبت خواهد شد. در خصوص تنش‌های شعاعی، محیطی و برشی نیز چنین تحلیلی وجود دارد؛ تنش برشی در نقاط دور از مرز تقریباً صفر خواهد شد.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله حل الاستو-پلاستیک یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم دوسر گیردار تحت فشار داخلی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی میرسکی-هرمان و روش بازگشت شعاعی مطالعه شده است. حل مسأله با استفاده از مسأله‌ی مقادیر ویژه و تکنیک اغتشاشی MEM انجام شده است. رفتار استوانه به صورت الاستیک-پلاستیک کامل در نظر گرفته شده و با استفاده از تئوری جریان پرناتل-روس و به کمک معیار تسلیم فن میزس، مسأله فرمول‌بندی شده است. نتایج حاصل شده از این مطالعه برای استوانه‌ی دوسر گیردار به صورت زیر است.

- مقایسه نتایج حاصل شده برای میدان جابه‌جایی و تنش و مقادیر به دست آمده برای تسلیم استوانه نشان می‌دهد که استفاده هم‌زمان از میدان جابه‌جایی میرسکی-هرمان و روش بازگشت شعاعی برای حل الاستو-پلاستیک پوسته استوانه‌ای مطلوب می‌باشد.
- مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی تئوری میرسکی-هرمان به دست آمده از تکنیک اغتشاشی MAM مشابهت بالایی با میدان جابه‌جایی حاصل از مسأله‌ی مقادیر ویژه دارد و مقایسه نتایج این دو روش با حل اجزای محدود به دست آمده، مطلوب می‌باشد.
- تنش‌های به دست آمده با استفاده از تکنیک اغتشاشی MAM در نقاط دور از مرز دارای دقت بسیار بالایی نسبت به نتایج اجزای محدود دارند و در نقاط نزدیک به مرز، اختلاف این دو مقدار افزایش می‌یابد. استفاده از میدان جابه‌جایی با تئوری تغییر شکل مرتبه‌ی بالاتر می‌تواند در کاهش این اختلاف تأثیر چشم‌گیری داشته باشد.
- با افزایش فشار داخلی، تسلیم در استوانه‌ی دوسر گیردار به صورت لایه‌به‌لایه و در نقاط دور از مرز اتفاق می‌افتد به طوری که حدود نود درصد طول استوانه به صورت هم‌زمان تسلیم می‌شود.
- تکنیک MAM را می‌توان برای حل الاستو-پلاستیک سازه‌هایی که ماتریس ضرایب معادلات تعادل آن غیرخطی است، شامل پوسته‌های استوانه‌ای با ضخامت متغیر و پوسته‌های مخروطی استفاده نمود. هم‌چنین

بررسی رفتار الاستو-پلاستیک پوسته‌ها می‌تواند در بهینه‌سازی و طراحی دقیق آن‌ها برای افزایش حد تحمل فشارهای بالاتر و افزایش عمر خستگی مخازن با استفاده از سخت شوندگی به کمک پیش‌تنش کاری^۱، تاثیر شایانی داشته باشد.

مراجع

- [1] S.-w. Chen *et al.*, "Slab Analysis of Large Cylindrical Shell Rolling," *Journal of Iron and Steel Research International*, Vol. 21, No. 1, pp. 1-8, 2014, doi: [https://doi.org/10.1016/S1006-706X\(14\)60001-7](https://doi.org/10.1016/S1006-706X(14)60001-7).
- [2] A. Ghasemi, A. Kazemian and M. Moradi, "Analytical and Numerical Investigation of FGM Pressure Vessel Reinforced by Laminated Composite Materials," *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 6, No. 1, pp. 43-53, 2014, doi: [20.1001.1.20083505.2014.6.1.4.8](https://doi.org/10.1001.1.20083505.2014.6.1.4.8).
- [3] Y. Bai, "*Marine Structural Design*," Elsevier, UK, 2003.
- [4] F. Civan, "Stress-dependent Porosity and Permeability of Porous Rocks Represented by a Mechanistic Elastic Cylindrical Pore-shell Model," *Transport in Porous Media*, Vol. 129, No. 3, pp. 885-899, 2019, doi: <https://doi.org/10.1007/s11242-019-01311-0>.
- [5] B. Galerkin, "Equilibrium of the Elastic Spherical Shell," *Prikl. Mat. Mekh*, Vol. 6, pp. 487-511, 1942.
- [6] P. M. Naghdi and R. M. Cooper, "Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Shells, Including the Effects of Transverse Shear and Rotatory Inertia," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 28, No. 1, pp. 56-63, 1956.
- [7] I. Mirsky and G. Herrmann, "Axially Symmetric Motions of Thick Cylindrical Shells," *Journal of Applied Mechanics*, 1958, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4011695>.
- [8] J. E. Greenspon, "Vibrations of a Thick-walled Cylindrical Shell, Comparison of the Exact Theory with Approximate Theories," *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 32, No. 5, pp. 571-578, 1960.
- [9] V. N. Katsikis, "*Applied Linear Algebra in Action*," InTech, Croatia, 2016.
- [10] K. Liang and Z. Li, "A Novel Nonlinear FE Perturbation Method and Its Application to Stacking Sequence Optimization for Snap-through Response of Cylindrical Shell Panel," *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 112, pp. 154-166, 2022, doi: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2022.03.002>.^{۱۷}
- [11] O. Sayman, "Analysis of Multi-layered Composite Cylinders under Hygrothermal Loading," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 36, No. 7, pp. 923-933, 2005, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2004.12.007>.

^۱ Autofrettage

- [12] M. Ghannad and M. Zamani-Nejad, "Elastic Analysis of Heterogeneous Thick Cylinders Subjected to Internal or External Pressure using Shear Deformation Theory," *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 9, No. 6, pp. 117-136, 2012, doi: <https://doi.org/10.12700/APH.9.6.2012.6.8>.
- [13] H. R. Eipakchi, G. H. Rahimi and S. E. Khadem, "Closed form Solution for Displacements of Thick Cylinders with Varying Thickness Subjected to Non-uniform Internal Pressure," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 16, No. 6, pp. 731-748, 2003, doi: <https://doi.org/10.12989/sem.2003.16.6.731>.
- [14] H. R. Eipakchi, S. E. Khadem and G. H. Rahimi, "Axisymmetric Stress Analysis of a Thick Conical Shell with Varying Thickness under Nonuniform Internal Pressure," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 134, No. 8, pp. 601-610, 2008, doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2008\)134:8\(601\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2008)134:8(601)).
- [15] M. Ghannad *et al.*, "Elastic Analysis of Pressurized Thick Truncated Conical Shells Made of Functionally Graded Materials," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 43, No. 1, pp. 105-126, 2012, doi: <https://doi.org/10.12989/sem.2012.43.1.105>.
- [16] M. Ghannad, G. H. Rahimi and M. Zamani-Nejad, "Elastic Analysis of Pressurized Thick Cylindrical Shells with Variable Thickness Made of Functionally Graded Materials," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 45, No. 1, pp. 388-396, 2013, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.09.043>.
- [17] H. Gharooni and M. Ghannad, "Nonlinear Analytical Solution of Nearly Incompressible Hyperelastic Cylinder with Variable Thickness under Non-uniform Pressure by Perturbation Technique," *Journal of Computational Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 2, pp. 395-412, 2019, doi: <https://doi.org/10.22059/jcamech.2019.276286.364>.
- [18] H. Gharooni and M. Ghannad, "Nonlinear Analysis of Radially Functionally Graded Hyperelastic Cylindrical Shells with Axially-varying Thickness and Non-uniform Pressure Loads Based on Perturbation Theory," *Journal of Computational Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 2, pp. 324-340, 2019, doi: <https://doi.org/10.22059/jcamech.2019.282149.401>.
- [19] M. L. Wilkins, "Calculation of Elastic-Plastic Flow," University of Michigan Library, 1963.
- [20] B. Loret and J. H. Prevost, "Accurate Numerical Solutions for Drucker-Prager Elastic-plastic Models," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 54, No. 3, pp. 259-277, 1986, doi: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(86\)90106-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(86)90106-4).
- [21] P. J. Yoder and R. G. Whirley, "On the Numerical Implementation of Elastoplastic Models," *Journal of Applied Mechanics*, 1984, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3167613>.
- [22] F. Dunne and N. Petrinic, *Introduction to Computational Plasticity*. OUP Oxford, 2005.
- [23] G. Widłak, "Radial Return Method Applied in Thick-walled Cylinder Analysis," *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 48, No. 2, pp. 381-395, 2010.
- [24] M. Zamani-Nejad, N. Alamzadeh and A. Hadi, "Thermoelastoplastic Analysis of FGM Rotating Thick Cylindrical Pressure Vessels in Linear Elastic-fully Plastic Condition,"

Composites Part B: Engineering, Vol. 154, pp. 410-422, 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.022>.

[25] T. Ebrahimi *et al.*, "Thermoelastoplastic Response of FGM Linearly Hardening Rotating Thick Cylindrical Pressure Vessels," *Steel and Composite Structures*, Vol. 38, No. 2, pp. 189-211, 2021, doi: <https://doi.org/10.12989/scs.2021.38.2.189>.

[26] S. Saeedi *et al.*, "Thermo-elasto-plastic Analysis of Thick-walled Cylinder Made of Functionally Graded Materials using Successive Approximation Method," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 194, 104481, 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2021.104481>.

[27] A. Heydari, "Elasto-plastic Analysis of Cylindrical Vessel with Arbitrary Material Gradation Subjected to Thermo-mechanical Loading via DTM," *Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 44, No. 10, pp. 8875-8891, 2019, doi: [10.1007/s13369-019-03910-x](https://doi.org/10.1007/s13369-019-03910-x).

[28] G. Scalet and F. Auricchio, "Computational Methods for Elastoplasticity: An Overview of Conventional and Less-conventional Approaches," *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 25, pp. 545-589, 2018, doi: <https://doi.org/10.1007/s11831-016-9208-x>.

[29] A. Mendelson, "Plasticity: Theory and Application," *Macmillan*, New York, 1968.

[30] A. H. Nayfeh, "Introduction to Perturbation Techniques," *John Wiley*, New York 1981.

Elasto-plastic Analysis of Thick-walled Cylinder using Perturbation Technique and Radial Return Method

Mojtaba Ghadimi

Ph.D. Student, Shahrood University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Solid Mechanics
mghadimi@mut.ac.ir

*Corresponding author: **Mehdi Ghannad**

Associate Professor, Shahrood University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Solid Mechanics
mghannadk@shahroodut.ac.ir

Abstract

In this paper, the elasto-plastic behavior of thick-walled cylindrical shell under uniform pressure is studied. Mirsky-Herman shear deformation theory, in which shear deformations are considered, has been used to obtain elastic equations using energy and virtual work methods. The studied cylindrical shell is axially symmetric and has clamp-clamp boundary condition at two ends. The material state of the shell is fully elastic-plastic, and the Prandtl-Reuss flow rule has been used to express the material behavior in plastic state, and the von Mises yield criterion has been used to determine the beginning of plasticization of the cylinder in the middle layer. The radial return mapping method has been investigated to obtain the stresses in the plastic state and to correct and restore the stress to the yield surface. To solve the obtained equations, the eigenvalue problem method and MAM perturbation technique are used. Also, the obtained results, including the yield stress and cylinder stresses in the middle layer, have been compared with the finite element method using Abaqus software. The obtained results show that the MAM perturbation technique and using Mirsky-Herman shear deformation theory has a good accuracy in the elasto-plastic solution of thick-walled cylinders.

Keywords: Thick wall cylinder, Elasto-plastic analysis, Mirsky-Hermann shear deformation theory, Radial return method, Perturbation technique Von Mises yield criterion