

## استفاده از روش عددی المان های مرزی در محاسبه تنش و جابجایی نقاط مرزهای خارجی یک ماده ناهمگن با مدول الاستیسیته متغیر

از کاربردهای روش عددی المان های مرزی، محاسبه تنش ها و جابجایی ها روی مرزهای خارجی و داخل یک جسم ناهمگن می باشد. در صنعت هنگامی که دو یا چند ماده مذاب در یک قالب روی هم ریخته می شوند، امکان به وجود آمدن یک ماده جدید ناهمگن وجود دارد. در این مقاله فرمول بندی مورد نیاز برای محاسبه تنش ها و جابجایی ها روی مرزهای خارجی و داخلی یک جسم ناهمگن با مدول الاستیسیته متغیر ارائه شده است. پاسخ های به دست آمده از حل عددی با نرم افزار ANSYS مقایسه شد و مشاهده شد که خطای نتایج به دست آمده با استفاده از روش المان های مرزی، با نتایج حاصل از نرم افزار کمتر از ۲٪ می باشد که نشان دهنده دقت خوب جواب های به دست آمده از روش عددی المان های مرزی می باشد.

محمدحسین مظفری<sup>۱</sup>  
استادیار

مهدي زارع مهرجردی<sup>۲</sup>  
دانشیار

علیرضا مرتضائی<sup>۳</sup>  
مریی

واژه های راهنما: روش المان های مرزی، جسم ناهمگن، جابجایی نقاط روی مرزها، محاسبه تنش، مدول الاستیسیته متغیر

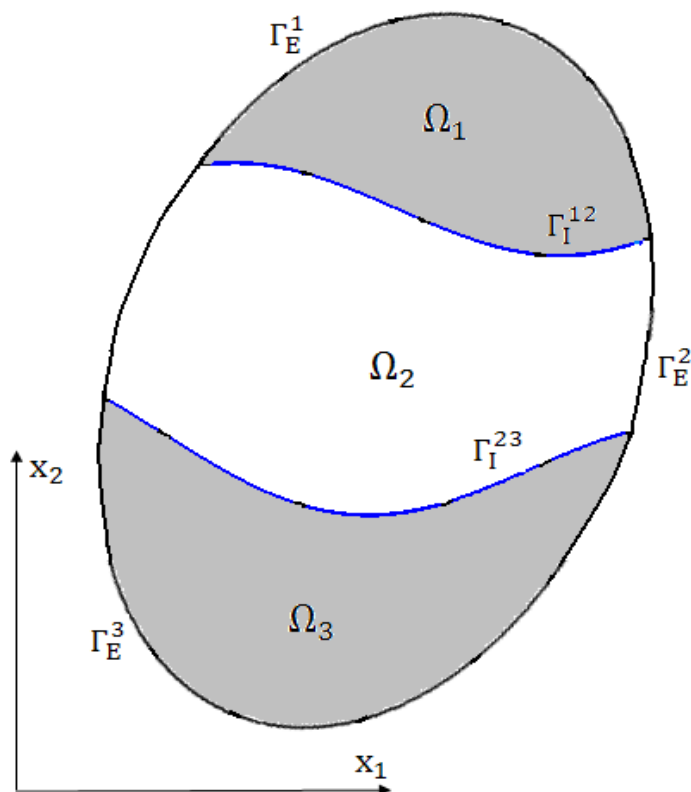
### ۱- مقدمه

در صنعت هنگامی که دو یا چند ماده مذاب با هم در یک قالب روی هم ریخته می شوند، با توجه به نوع ماده ها امکان ترکیب و نفوذ ماده ها در هم وجود دارد که این امر باعث به وجود آمدن یک ماده جدید ایزوتروپیک یا غیر ایزوتروپیک می شود. برای مثال مطابق شکل (۱) هنگامی که ماده (۱) در حالت مذاب به ماده (۳) اضافه می شود با توجه به نوع ماده ها، ماده بوجود آمده (ماده (۲)) می تواند ایزوتروپیک یا غیر ایزوتروپیک بوده و کل جسم در مجموع ناهمگن خواهد بود.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فنی و حرفه ای، تهران، ایران، [mhmozaffari@tvu.ac.ir](mailto:mhmozaffari@tvu.ac.ir)

<sup>۲</sup> دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اردکان، اردکان، ایران، [Mahdi.zare@ardakan.ac.ir](mailto:Mahdi.zare@ardakan.ac.ir)

<sup>۳</sup> مریی، گروه مهندسی کشاورزی، دانشگاه فنی و حرفه ای، تهران، ایران، [a-mortezaei@tvu.ac.ir](mailto:a-mortezaei@tvu.ac.ir)



شکل ۱- جسم ناهمگن

در مسئله مستقیم معادله حاکم، هندسه، خواص مواد و شرایط مرزی داده شده‌اند که بر اساس آن جابجایی‌ها را در نقاطی از سطح جسم که بردارهای تراکشن به عنوان شرط مرزی معلوم‌اند و تراکشن‌ها را در نقاطی از سطح که جابجایی‌ها به عنوان شرط مرزی معلوم‌اند به همراه جابجایی‌ها و تراکشن‌ها بر روی مرزهای مشترک بین ماده‌ها با استفاده از روش المان‌های مرزی محاسبه می‌شوند. در این مقاله فرمول‌بندی مورد نیاز برای حل مسئله مستقیم محاسبه تنش‌ها و جابجایی‌ها روی مرزهای خارجی یک جسم ناهمگن با مدول الاستیسیته متغیر ارائه شده است و در ادامه با استفاده از کد نوشته شده در نرم‌افزار MATLAB یک نمونه مسئله هم برای بررسی صحت روابط استخراج شده و کد نوشته شده، مورد بررسی قرار گرفته‌است. در ادامه هم فرمول‌بندی مورد نیاز برای محاسبه تنش‌ها و جابجایی‌ها روی گره‌های مرزهای خارجی و گره‌های روی مرزهای داخلی یک جسم ناهمگن (شکل (۲))، متشکل از سه ماده که ماده میانی (ماده (۲)) ناهمگن بوده و مدول یانگ آن راستای محور  $y$  از  $E_3$  شروع شده و به صورت نمایی تغییر کرده و به  $E_1$  می‌رسد. در ادامه سعی بر آن است که تاریخچه حل مسائل الاستیسیته انجام شده مربوط به مواد ناهمگن یا غیر ایزوتروپیک از دیر باز تاکنون و همچنین استفاده از روش المان‌های مرزی مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد. کلمنتس و اسکار یک روش انتگرال مرزی برای حل دسته‌ای از مسائل الاستیسیته در محیط غیر ایزوتروپ بیان کرده‌اند. در این تحقیق با استفاده از یک تابع گرین، معادلات انتگرال مرزی برای حل دسته‌ای از مسائل الاستیسیته استخراج شده- است [۱]. آئو یک فرمول‌بندی جدید برای حل مسائل الاستیسیته در محیط غیر ایزوتروپ ارائه کرده‌است. در این فرمول‌بندی معادلات تعادل به پتانسیل تبدیل شده به گونه‌ای که حل اساسی (تابع گرین) برای آن وجود دارد [۲].

پن و آمادی یک فرمول‌بندی جدید المان‌های مرزی برای حل مسائل الاستیسیته سه بعدی در مواد با خواص غیر ایزوتروپیک تحت نیروهای حجمی ارائه کرده‌اند. تابع گرین برای این‌گونه محیط‌های غیر ایزوتروپیک به فرم کاملاً تحلیلی به دست آمده است [۳]. آزیس و همکاران مسئله مقدار مرزی برای تغییر شکل استاتیکی مواد ناهمگن الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله مدول الاستیسیته به طور پیوسته در دو جهت مختصات دکارتی تغییر می‌کند و معادلات انتگرال مرزی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل حاکم بر تغییر شکل استاتیکی مواد ناهمگن غیر ایزوتروپیک استخراج شده است [۴]. گائو و همکاران مسائل الاستیک در مواد با خواص مکانیکی متغیر مانند مواد FGM با روش المان‌های مرزی مورد بررسی قرار داده‌اند. در این تحقیق مسائل دو بعدی و سه بعدی الاستیسیته در محیط ناهمگن که مدول برشی به صورت تابعی دلخواه در نظر گرفته شده است، انجام شده است [۵]. وانگ و همکاران برای محاسبه مؤلفه‌های ماتریس‌های لازم برای مسائل الاستیسیته در محیط غیر ایزوتروپیک و در حالت سه بعدی با استفاده از روش المان‌های مرزی ارائه شده است. در این تحقیق ماتریس سختی به صورت متقارن و مثبت معین در نظر گرفته شده است وانگ و همکاران برای استخراج فرمول‌بندی المان‌های مرزی برای مواد ناهمگن روشی برای محاسبه تابع گرین ارائه شده است که در نهایت به انتگرال‌هایی تکین منجر شده است که تا به حال حل نشده‌اند [۷]. زانگ و همکاران فرمول‌بندی معادلات انتگرال مرزی برای حل مسائل الاستیسیته صفحه‌ای در محیط اورتوتروپیک ارائه کرده‌اند. در این تحقیق صحت فرمول‌بندی استخراج شده با ارائه چند مثال بررسی شده است که نتایج به دست آمده نشان دهنده دقت خوبی در جواب به دست آمده می‌باشد [۸]. در [۹-۱۲] فرمول‌بندی المان-های مرزی مربوط به مواد ناهمگن را ارائه کرده‌اند. در این مقالات فرض شده است که مدول یانگ ماده ناهمگن به صورت تابعی از مختصات  $y$  بوده و به صورت نمایی تغییر می‌کند و همچنین برای استخراج معادلات از حل تکین اساسی مربوط به ماده همگن و ایزوتروپ استفاده شده است.

## ۲- فرمول‌بندی روش المان‌های مرزی برای مواد ناهمگن

معادلات تعادل برای مسائل الاستیک خطی دو بعدی در غیاب نیروهای حجمی به صورت زیر می‌باشد:

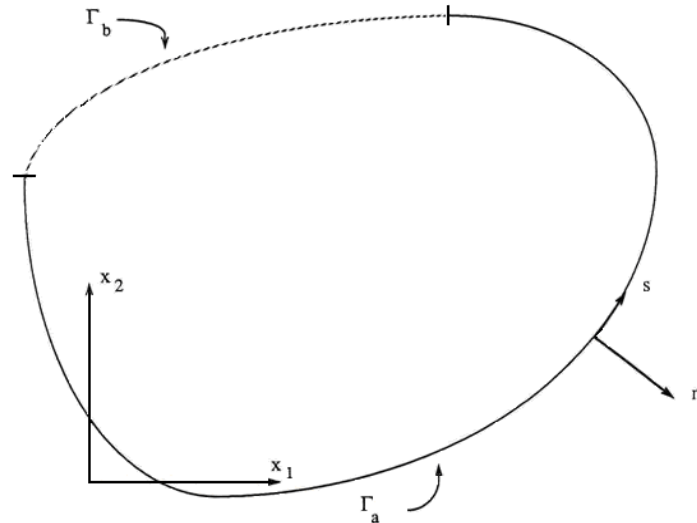
$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1)$$

شرایط مرزی برای معادله (۱) مطابق شکل (۲) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i & \text{on } \Gamma_a \\ t_i &= \bar{t}_i & \text{on } \Gamma_b \end{aligned} \quad (2)$$

با استفاده از قانون هوک می‌توان هر مؤلفه تنش را براساس مؤلفه‌های تغییر شکل نسبی به صورت زیر بیان کرد.

$$\sigma_{ij} = C_{ijhk} \varepsilon_{hk} = C_{ijhk} u_{h,k} \quad (3)$$



شکل ۲- دامنه جسم ناهمگن دو بعدی

که در این رابطه  $C_{ijhk}$  تانسور سختی،  $\epsilon_{hk}$  مولفه های تغییر شکل نسبی و  $u_n$  بردار جابجایی می باشند. برای مواد ناهمگن ایزوتروپ، ماتریس سختی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$C_{ijhk} = C_{ijhk}(x) \quad (4)$$

یعنی فرض می شود که خواص ماده وابسته به موقعیت  $x$  بوده و در جهت این محور تغییر می کند. با تلفیق رابطه های (۱)، (۳) و (۴) می توان نوشت:

$$[C_{ijhk}(x)u_{n,k}(x)]_{,j} = 0 \quad (5)$$

ماتریس سختی  $C_{ijhk}(x)$  که تنها وابسته به موقعیت  $x$  می باشد، به صورت حاصلضرب یک تابع پیوسته  $\mu(x)$  و تانسور ثابت الاستیک  $\bar{c}_{ijhk}$  در نظر گرفته می شود [۱۰].

$$c_{ijhk}(x) = \mu(x)\bar{c}_{ijhk} = \lambda(x)\delta_{ij}\delta_{hk} + \mu(x)(\delta_{ih}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jh}) \quad (6)$$

که در رابطه بالا  $\mu(x)$  مدول برشی بر حسب  $x$ ،  $\lambda(x)$  ضریب الاستیک لامه و  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر می باشد.

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{E(x)}{2(1+\nu)} \\ \bar{c}_{ijhk} &= \frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{hk} + (\delta_{ih}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jh}) \\ \lambda(x) &= \frac{3-k}{k-1}\mu(x) \end{aligned} \quad (7)$$

در این رابطه  $\nu$  ضریب پواسون،  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر و پارامتر  $k$ ، برای حالت تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای به صورت زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned} k &= 3 - 4\nu && \text{for plane strain} \\ k &= \frac{3 - \nu}{1 + \nu} && \text{for plane stress} \end{aligned} \quad (8)$$

با انتخاب تابع وزن  $U_{li}(x, y)$  و ضرب آن در رابطه (۵) انتگرال باقی مانده وزنی به صورت زیر به دست می آید.

$$\int_{\Omega} [C_{ijhk}(x)u_{h,k}(x)]_{,j} U_{li}(x, y) d\Omega = 0 \quad (9)$$

جاییکه تابع وزن  $U_{li}(x, y)$  از حل تکین اساسی یا معادله (۱) برای حالت مواد همگن، ایزوتروپ و الاستیک در نظر گرفته می شود که معادلات دیفرانسیل پاره ای (۳) را ارضا می کند.

$$c_{ijhk} U_{li,jk}(x, y) + \delta_{lh} \delta(x - y) = 0 \quad (10)$$

در رابطه بالا  $\delta(x - y)$  تابع دلتای دیراک در نقطه  $y$  می باشد. حل معادله بالا به صورت زیر می باشد [۱۲].

$$U_{ij} = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [3 - 4\nu] \delta_{ij} \ln(r) - r_{,i} r_{,j} \quad (11)$$

که در این رابطه  $r = |x - y|$  است. با اعمال قضیه دیورژانس گوس روی رابطه (۹) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} U_{li} t_i(x) d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} \mu T_{li} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \mu \bar{c}_{ijhk} U_{li,jk} u_h d\Omega + \int_{\Omega} \bar{c}_{ijhk} U_{li,j} \mu_{,k} u_h d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

که در این رابطه:

$$\begin{aligned} T_{li} &= \Sigma_{lim} n_m \\ \Sigma_{lim} &= \bar{c}_{ijhm} U_{ih,j} \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۱۲) و با در نظر گرفتن خواص تابع دلتای دیراک می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \mu(y)u_i(y) &= \int_{\Gamma} U_{ij}(x,y)t_j(x)d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} \mu(x)T_{ij}(x,y)u_j(x)d\Gamma + \int_{\Omega} \Sigma_{ijl}(x,y)\mu_{,l}(x)u_j(x)d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \Sigma_{ijl} &= -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} [(1-2\nu)(\delta_{il}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,l} - \delta_{jl}r_{,i}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,l}] \\ T_{ij} = \Sigma_{ijl}n_l &= -\frac{[(1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) + ((1-2\nu)\delta_{ij}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,l}]n_l}{4\pi r(1-\nu)} \\ \Sigma_{ijl}\mu_{,l} &= -\frac{[(1-2\nu)(\mu_{,i}r_{,j} - \mu_{,j}r_{,i}) + ((1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j})r_{,l}\mu_{,l}]}{4\pi r(1-\nu)} \end{aligned} \quad (15)$$

معادله (۱۴) یک معادله میدانی می باشد. برای استخراج معادله انتگرالی مرزی میدانی باید معادله (۱۴) را روی مرزها اعمال کرد. این کار با اعمال  $\gamma \rightarrow \Gamma$  روی رابطه (۱۴) انجام می شود [۱۳].  
برای استخراج معادلات لازم برای تعیین تنش ها می بایست  $\frac{\partial u_i}{\partial y_h}$  محاسبه شود. با مشتق گرفتن از رابطه (۱۴) نسبت به  $y_h$  می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i(y)}{\partial y_h} &= \frac{1}{\mu(y)} \left[ \int_{\Gamma} \frac{\partial U_{ij}(x,y)}{\partial y_h} t_j(x)d\Gamma \right. \\ &- \left. \int_{\Gamma} \mu(x) \frac{\partial T_{ij}(x,y)}{\partial y_h} u_j(x)d\Gamma + \int_{\Omega} \Sigma_{ijl}(x,y)\mu_{,l}(x)u_j(x)d\Omega \right] \end{aligned} \quad (16)$$

دو عبارت اول سمت راست معادله بالا بدون هیچ مشکل قابل محاسبه می باشند، ولی ترم آخر انتگرال تکین می باشد. برای غلبه بر این مشکل یک مسیر دایره ای شکل  $\Omega_\epsilon$  با شعاع  $\epsilon$  و مرکز  $\gamma$  از  $\Omega$  جدا می شود. ترم آخر معادله (۱۶) به دو بخش تقسیم می شود [۱۱].

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y_h} \int_{\Omega} \Sigma_{ijl}(x,y)\mu_{,l}(x)u_j(x)d\Omega \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} \frac{\partial \Sigma_{ijl}(x,y)}{\partial y_h} \mu_{,l}(x)u_j(x)d\Omega \\ &+ \mu_{,l}(y)u_j(y) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial \Sigma_{ijl}(x,y)}{\partial y_h} d\Omega \end{aligned} \quad (17)$$

عبارت دوم سمت راست رابطه بالا را با استفاده از قضیه گوس می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial \Sigma_{ijl}(x,y)}{\partial y_h} d\Omega = - \int_{\Gamma_\epsilon} \Sigma_{ijl}(x,y)u_h(x)d\Gamma \quad (18)$$

با در نظر گرفتن این نکته که روی مرز  $\Gamma_\varepsilon$  ،  $n_l = r_l$  و  $r = \varepsilon$  هستند، ترم آخر رابطه (۱۷) را می توان به صورت تحلیلی انتگرال گیری کرد.

$$u_j(y)\mu_{,l}(y) \int_{\Gamma_\varepsilon} \Sigma_{ijl}(x,y)n_h(x)d\Gamma = J_{ijhk}^\varepsilon \mu_{,l}(y)u_j(y) \quad (19)$$

ترم  $J_{ijhk}^\varepsilon$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$J_{ijhk}^\varepsilon = \frac{[(6 - 8\nu)\delta_{ij} - \delta_{ih}\delta_{jk}]}{16\pi(1 - \nu)} \quad (20)$$

با ترکیب رابطه های (۱۷) تا (۱۹) در نهایت رابطه زیر بدست می آید [۱۲]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(x,y) = & \int_{\Gamma} U_{ijn}^\varepsilon(x,y)t_n(x)d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} T_{ijn}^\varepsilon(x,y)u_n(x)d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \mu_{,l}\Sigma_{ijhk}^\varepsilon(x,y)u_n(x)d\Omega + \mu_{,l}(y)J_{ijhk}^\varepsilon u_l(y) \end{aligned} \quad (21)$$

که در این رابطه:

$$\begin{aligned} U_{ijk}^\varepsilon = & -\frac{1}{8\pi r(1 - \nu)} [(1 - 2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} - (\delta_{ij}r_{,k})] \\ T_{ijk}^\varepsilon = & -\frac{1}{4\pi r(1 - \nu)} [(1 - 2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \\ \Sigma_{ijhk}^\varepsilon = & -\frac{1}{8\pi r(1 - \nu)} [(1 - 2\nu)(\delta_{ij}\delta_{hk} + \delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk} \\ & + 2\nu(\delta_{ij}r_{,h}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j}r_{,h} + \delta_{jh}r_{,i}r_{,k} + \delta_{kh}r_{,i}r_{,h}) \\ & + 2(\delta_{jk}r_{,i}r_{,h} + \delta_{ih}r_{,j}r_{,k}) - r_{,i}r_{,j}r_{,h}r_{,k}] \end{aligned} \quad (22)$$

چنانچه رابطه (۱۴) را روی مرزها در نظر بگیریم، در نهایت می توان به رابطه زیر رسید.

$$[U_\Gamma][u_\Gamma] - [T_\Gamma \quad \Sigma_\Gamma][t_\Gamma] = 0 \quad (23)$$

که توابع در رابطه بالا به صورت زیر می باشد.

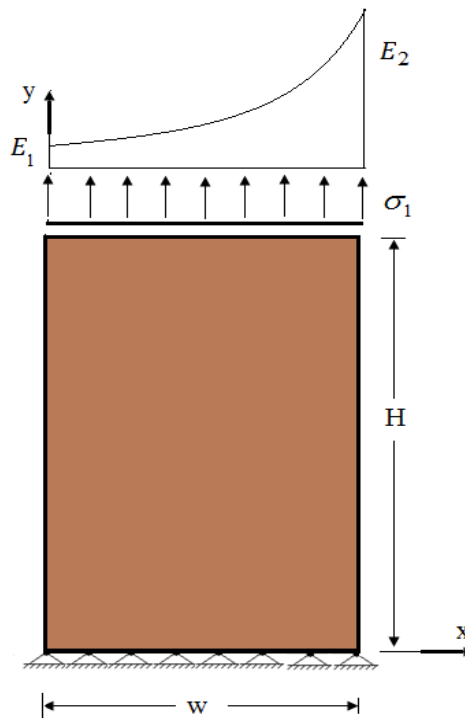
$$\begin{aligned}
 U_{\Gamma} &= \frac{1}{\mu(y)} \int_{-1}^1 U(x(\xi), y) N_{\Gamma}(\xi) J_{\Gamma_n}(\xi) d\xi \\
 T_{\Gamma} &= \frac{1}{\mu(y)} \int_{-1}^1 \mu(x(\xi)) T(x(\xi), y) N_{\Gamma_n}(\xi) J_{\Gamma_n}(\xi) d\xi \\
 \Sigma_{\Gamma} &= \frac{1}{\mu(y)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mu_{,x}(x(\xi, \eta)) \Sigma(x(\xi, \eta), y) N_{\Gamma_n}(\xi, \eta) J_{\Omega_n}(\xi, \eta) d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{24}$$

در رابطه بالا  $(\xi, \eta)$  سیستم مختصات محلی و  $J_{\Omega}$  ,  $N_{\Gamma}$  توابع شکل استفاده شده برای توصیف تراکشن ها و جابجایی های روی مرزها و نقاط داخلی می باشند.

### ۳- مسئله مستقیم محاسبه تنش ها و جابجایی ها روی مرزهای خارجی جسم ناهمگن

برای بررسی دقت فرمول های استخراجی و بررسی صحت کد نوشته شده در نرم افزار MATLAB، یک ماده ناهمگن مستطیل شکل به طول  $W = 10cm$  و ارتفاع  $H = 10cm$ ، مطابق شکل (۳) در نظر گرفته می شود. مقدار بار اعمالی  $\sigma_1 = 1MPa$  در نظر گرفته می شود. در این مثال مدول الاستیسیته که در جهت محور  $x$  متغیر می باشد، از مقدار  $E_1 = 1GPa$  شروع شده و به صورت نمایی تا  $E_2 = 1GPa$  افزایش یافته و به صورت رابطه زیر در نظر گرفته می شود:

$$E(x) = E_1 e^{\beta x}, \quad \beta = \frac{1}{w} \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \tag{25}$$



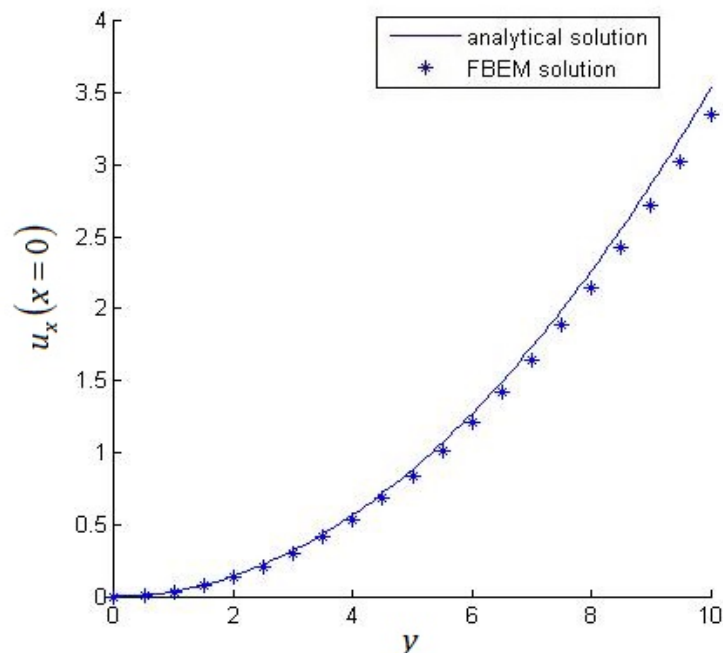
شکل ۳- هندسه جسم ناهمگن با مدول الاستیسیته متغیر تحت تنش

با استفاده از فرمول بندی به دست آمده، جابجایی ها و تنش های روی مرزهای خارجی جسم محاسبه می-شوند. حل تحلیلی و دقیق مسئله فوق در مرجع [۱۳] برای حالتی که بار اعمالی به صورت  $\sigma = \sigma_1 + \frac{2\sigma_2}{w} \left( \frac{w}{2} - x \right)$  باشد انجام شده است. در این رابطه  $\sigma_1$  تنش کششی و  $\sigma_2$  تنش خمشی می باشد. تابع تنش و جابجایی در این حالت به صورت زیر بدست آمده است:

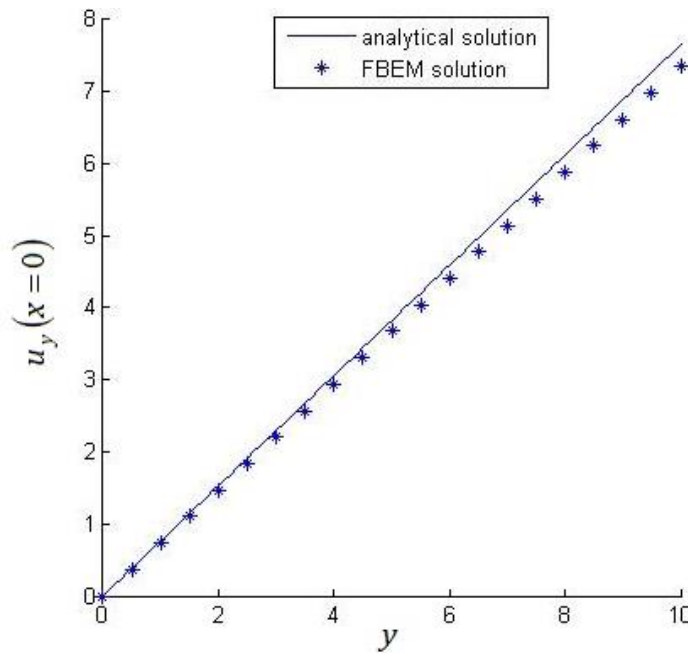
$$\begin{aligned} \sigma_y(x) &= E_1 e^{\beta x} (Ax + B) \\ \sigma_x(x) &= -\nu \sigma_y(x) \\ u_x(x, y) &= \nu \left( \frac{A}{2} x^2 + Bx \right) - \frac{A}{2} y^2 \\ u_y(x, y) &= (Ax + B)y \end{aligned} \quad (26)$$

که پارامترهای A و B به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta^2 \sigma_1 w}{2E_1} \left( \frac{e^{\beta w} (\beta w - 2) + \beta w + 2}{e^{\beta w} \beta^2 w^2 - e^{2\beta w} + 2e^{\beta w} - 1} \right) \\ &+ \frac{\beta^2 \sigma_2 w^2}{6E_1} \left( \frac{\beta (1 - e^{\beta w})}{e^{\beta w} \beta^2 w^2 - e^{2\beta w} + 2e^{\beta w} - 1} \right) \\ B &= \frac{\beta^2 \sigma_1 w}{2E_1} \left( \frac{e^{\beta w} [e^{\beta w} (-\beta^2 w^2 + 3\beta w - 4) + \beta^2 w^2 - 2e^{\beta w} + 8] - \beta w - 4}{(e^{\beta w} - 1)(e^{\beta w} \beta^2 w^2 - e^{2\beta w} + 2e^{\beta w} - 1)} \right) \\ &+ \frac{\beta^2 \sigma_2 w^2}{6E_1} \left( \frac{\beta w e^{\beta w} - e^{\beta w} + 1}{e^{\beta w} \beta^2 w^2 - e^{2\beta w} + 2e^{\beta w} - 1} \right) \end{aligned} \quad (27)$$



شکل ۴- نمودار جابجایی در راستای محور X روی مرز خارجی سمت چپ

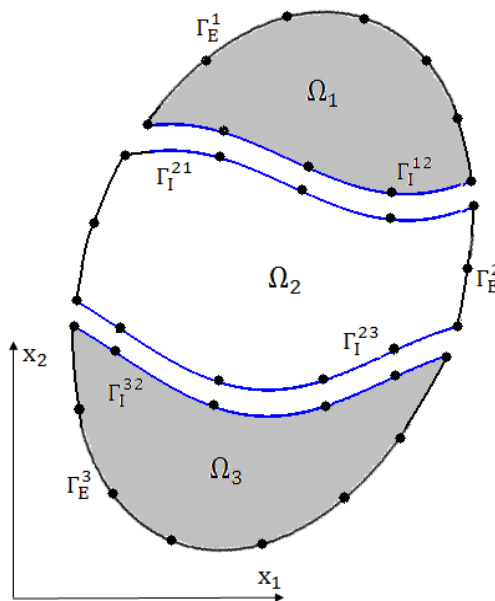


شکل ۵- نمودار جایجایی در راستای محور  $y$  روی مرز خارجی سمت چپ

نتایج حاصل از حل تحلیلی و عددی به دست آمده برای تنش و جایجایی‌ها برای مرز خارجی سمت چپ در شکل‌های (۴) و (۵) نشان داده شده است. نتایج به دست آمده نشان دهنده دقت خوب جواب‌های بدست آمده از حل عددی با استفاده از روش المان‌های مرزی می‌باشد.

#### ۴- مسئله مستقیم محاسبه تنش‌ها و جایجایی‌ها روی مرزهای خارجی جسم مرکب

در این قسمت نحوه محاسبه تنش‌ها و جایجایی‌ها روی مرزهای خارجی یک جسم مرکب، تشکیل شده از دو جسم همگن و یک جسم ناهمگن مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل ۶- جسم الاستیک ناهمگن با سه زیر ناحیه در تماس

با توجه به مطالب گفته شده در قسمت قبل حال اگر دامنه مسئله غیریکنواخت باشد به طوری که مطابق شکل (۶) جسم از سه ماده مختلف تشکیل شده باشد، به صورتی که ماده (۱) و ماده (۳) همگن و ماده میانی یک ماده ناهمگن و به صورت ترکیبی از ماده (۱) و (۳) باشد، در این صورت دامنه  $\Omega$  به سه زیر دامنه  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  تقسیم می شود که هر یک دارای نسبت پواسون و مدول الاستیسیته خاص خود هستند و با دو مرز مشترک  $\Gamma_I^{12}(\Gamma_I^{21})$  و  $\Gamma_I^{23}(\Gamma_I^{32})$  از هم جدا شده اند.

برای ماده میانی ناهمگن از رابطه (۲۳) و برای مواد همگن (۱) و (۲) از فرمول های مربوط به مواد همگن استفاده می شود. با اعمال معادلات برای هر زیر دامنه  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  به صورت جداگانه، می توان نوشت:

$$[H_E^1 \quad H_I^{12}] \begin{Bmatrix} u_E^1 \\ u_I^{12} \end{Bmatrix} = [G_E^1 \quad G_I^{12}] \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_I^{12} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

$$[H_E^{21} \quad H_I^{21} \quad H_I^{23}] \begin{Bmatrix} u_E^2 \\ u_I^{21} \\ u_I^{23} \end{Bmatrix} = [G_E^2 \quad G_I^{21} \quad G_I^{23}] \begin{Bmatrix} t_E^2 \\ t_I^{21} \\ t_I^{23} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$[H_E^3 \quad H_I^{32}] \begin{Bmatrix} u_E^3 \\ u_I^{32} \end{Bmatrix} = [G_E^3 \quad G_I^{32}] \begin{Bmatrix} t_E^3 \\ t_I^{32} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$t_E^1, u_E^1$ : مقادیر جابجایی ها و تراکشن ها در گره های مرز خارجی  $\Gamma_E^1$  در امتداد های  $x_1, x_2$   
 $t_I^{12}, u_I^{12}$ : مقادیر جابجایی ها و تراکشن ها در گره های مرز مشترک  $\Gamma_I^{12}$  در امتداد های  $x_1, x_2$   
 $t_E^2, u_E^2$ : مقادیر جابجایی ها و تراکشن ها در گره های مرز خارجی  $\Gamma_E^2$  در امتداد های  $x_1, x_2$   
 $t_I^{21}, u_I^{21}$ : مقادیر جابجایی ها و تراکشن ها در گره های مرز مشترک  $\Gamma_I^{21}$  در امتداد های  $x_1, x_2$   
 $t_I^{23}, u_I^{23}$ : مقادیر جابجایی ها و تراکشن ها در گره های مرز مشترک  $\Gamma_I^{23}$  در امتداد های  $x_1, x_2$   
 $t_E^3, u_E^3$ : مقادیر جابجایی ها و تراکشن ها در گره های مرز خارجی  $\Gamma_E^3$  در امتداد های  $x_1, x_2$   
 $t_I^{32}, u_I^{32}$ : مقادیر جابجایی ها و تراکشن ها در گره های مرز مشترک  $\Gamma_I^{32}$  در امتداد های  $x_1, x_2$

همانطور که گفته شد فرمولاسیون استفاده شده در این قسمت برای محاسبه ماتریس های H و G برای ماده ناهمگن میانی (۲) و مواد همگن (۱) و (۲) متفاوت می باشد برای محاسبه ماتریس های H و G برای مواد همگن (۱) و (۲) از روابط مرجع [۱۴] استفاده می شود.

برای مولفه های جابجایی هر گره  $i$  بر روی مرز های هموار و مشترک میانی می توان نوشت:

$$u_I^{12} = u_I^{21} \Rightarrow \begin{cases} u_{x_1}^i |_{\Gamma_I^{12}} = u_{x_1}^i |_{\Gamma_I^{21}} \\ u_{x_2}^i |_{\Gamma_I^{12}} = u_{x_2}^i |_{\Gamma_I^{21}} \end{cases} \quad (31)$$

$$u_I^{32} = u_I^{23} \Rightarrow \begin{cases} u_{x_1}^i |_{\Gamma_I^{32}} = u_{x_1}^i |_{\Gamma_I^{23}} \\ u_{x_2}^i |_{\Gamma_I^{32}} = u_{x_2}^i |_{\Gamma_I^{23}} \end{cases}$$

و برای تراکشن ها:

$$t_I^{12} = -t_I^{21} \Rightarrow \begin{cases} t_{x_1}^{2i-1}|_{\Gamma_I^{12}} = t_{x_1}^{2i}|_{\Gamma_I^{12}} = -t_{x_1}^{2i-1}|_{\Gamma_I^{21}} = -t_{x_1}^{2i}|_{\Gamma_I^{21}} \\ t_{x_2}^{2i-1}|_{\Gamma_I^{12}} = t_{x_2}^{2i}|_{\Gamma_I^{12}} = -t_{x_2}^{2i-1}|_{\Gamma_I^{21}} = -t_{x_2}^{2i}|_{\Gamma_I^{21}} \end{cases} \quad (32)$$

$$t_I^{32} = -t_I^{23} \Rightarrow \begin{cases} t_{x_1}^{2i-1}|_{\Gamma_I^{32}} = t_{x_1}^{2i}|_{\Gamma_I^{32}} = -t_{x_1}^{2i-1}|_{\Gamma_I^{23}} = -t_{x_1}^{2i}|_{\Gamma_I^{23}} \\ t_{x_2}^{2i-1}|_{\Gamma_I^{32}} = t_{x_2}^{2i}|_{\Gamma_I^{32}} = -t_{x_2}^{2i-1}|_{\Gamma_I^{23}} = -t_{x_2}^{2i}|_{\Gamma_I^{23}} \end{cases}$$

با اعمال شرایط حاکم و با توجه به اینکه مرزهای مشترک برای هر زیر دامنه به طور جداگانه منظور می شود می توان معادلات (۲۸) و (۲۹) و (۳۰) را با هم تلفیق و ساده کرد.

$$\begin{bmatrix} H_E^1 & H_I^{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_I^{21} & H_E^2 & H_I^{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_I^{32} & H_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^1 \\ u_I^{12} \\ u_E^2 \\ u_I^{23} \\ u_E^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_E^1 & G_I^{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_I^{21} & G_E^2 & G_I^{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_I^{32} & G_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_I^{12} \\ t_E^2 \\ t_I^{23} \\ t_E^3 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

به طور خلاصه می توان نوشت:

$$[H^*] \begin{Bmatrix} u_E^1 \\ u_I^{12} \\ u_E^2 \\ u_I^{23} \\ u_E^3 \end{Bmatrix} = [G^*] \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_I^{12} \\ t_E^2 \\ t_I^{23} \\ t_E^3 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

ماتریس  $[H^*]$  یک ماتریس  $2(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5) \times 2(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5)$  و  $[G^*]$  یک ماتریس  $2(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5) \times 4(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5)$  است که  $N_1$  تعداد گره ها بر روی مرز خارجی زیر ناحیه  $\Omega_1$ ،  $N_2$  تعداد گره ها بر روی مرز خارجی زیر ناحیه  $\Omega_2$ ،  $N_3$  تعداد گره ها بر روی مرز خارجی زیر ناحیه  $\Omega_3$ ،  $N_4$  تعداد گره های بر روی مرز مشترک  $\Gamma_I^{12}(\Gamma_I^{21})$  و  $N_5$  تعداد گره های بر روی مرز مشترک  $\Gamma_I^{23}(\Gamma_I^{32})$  است.

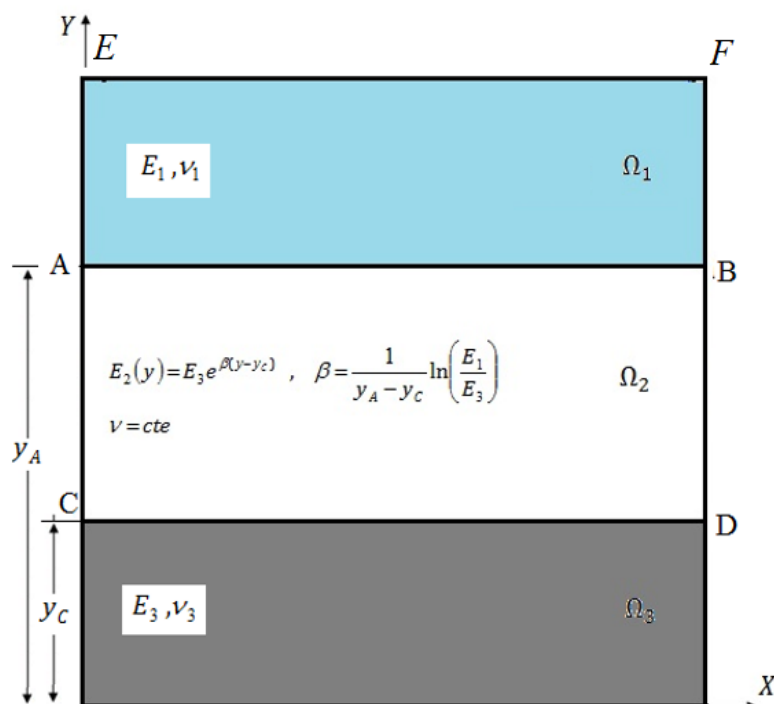
در این معادله همه مقادیر مجهول جابه جایی و تراکشن به سمت راست و همه مقادیر معلوم جابه جایی و تراکشن بر روی مرزها، به سمت چپ آورده می شود. با انجام این کار معادله بر حسب مجهولات مرتب شده و به صورت زیر در می آید:

$$[A]\{x\} = [B] \quad (35)$$

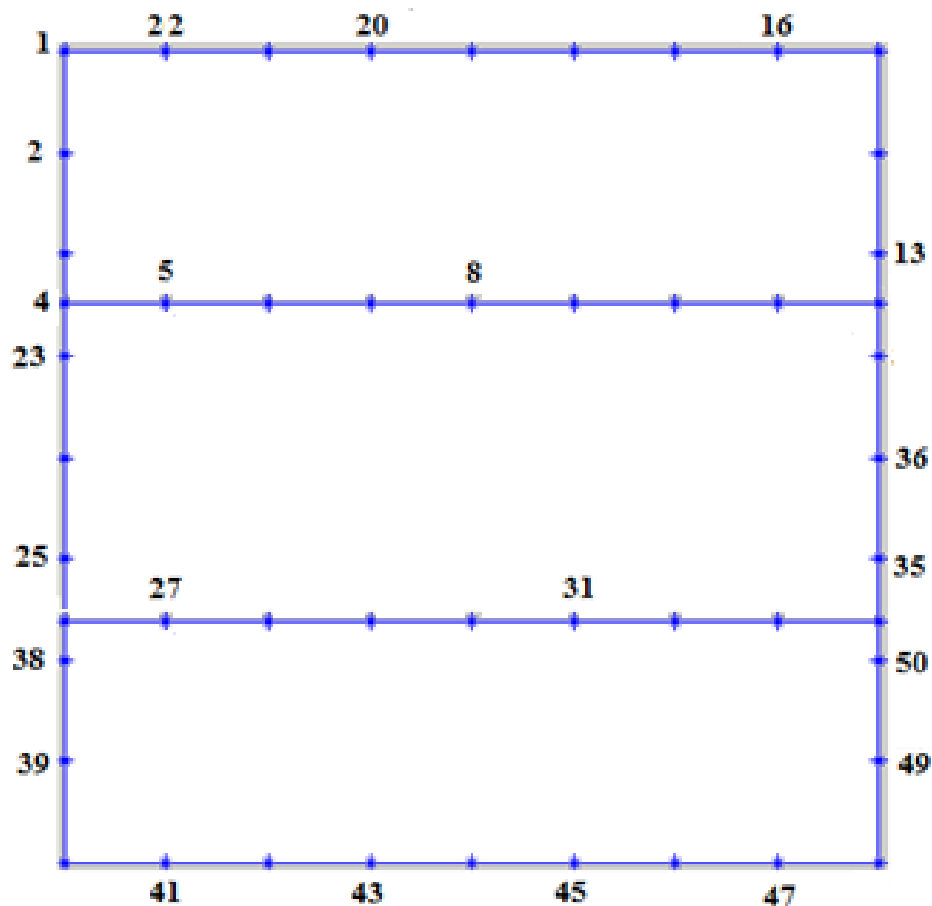
ماتریس مجهولات  $\{x\}$  شامل مقادیر مجهول جابجایی ها و تراکشن ها بر روی مرزهای خارجی و کلیه جابه جایی ها و تراکشن ها بر روی مرز مشترک میانی است. حل دستگاه معادلات فوق با یکی از روش های استاندارد قابل انجام خواهد بود. برای مثال یک جسم ناهمگن مرکب از سه ماده در شکل (۷) نشان داده شده است. در حالت ساده مرزهای داخلی منظم و موازی هم در نظر گرفته می شود. ماده (۱)  $(\Omega_1)$  و ماده (۳)  $(\Omega_3)$  هر دو همگن و ایزوتروپ می باشند، ولی ماده میانی (۲)  $(\Omega_2)$  یک ماده ناهمگن و ایزوتروپ بوده که ضریب پواسون آن ثابت  $(\nu = cte)$  و مقدار مدول یانگ آن به صورت نمایی از  $E_3$  شروع شده و به  $E_1$  می رسد و به شکل رابطه زیر می باشد.

$$E_2(y) = E_3 e^{\beta(y-y_c)} \quad , \quad \beta = \frac{1}{y_A - y_C} \ln\left(\frac{E_1}{E_3}\right) \quad (36)$$

به منظور یک نمونه مسئله یک ماده ناهمگن مطابق شکل (۷) در نظر گرفته می شود. این ماده از ترکیب تنگستن  $(E_{Ti} = 380GPa, \nu = 0.203)$ ، فولاد  $(E_{St} = 210GPa, \nu = 0.298)$  و ماده میانی ناهمگن که فرض می شود مدول یانگ آن به صورت نمایی تغییر می کند و دارای ضریب پواسون ثابت  $(\nu_2 = 0.245)$  است، تشکیل شده است. همچنین مقدار  $y_C = 0.3$  و  $y_A = 0.7$  می باشد. برای حل مسئله مستقیم مطابق شکل (۸) تعداد گره های روی هر کدام از مرزهای داخلی را ۹ گره و روی مرزهای خارجی را ۳۲ گره در نظر گرفته که در مجموع ۵۰ گره خواهیم داشت. جهت بررسی صحت و دقت کد نوشته شده، جواب به دست آمده برای جابجایی گره های روی سطح خارجی از حل مستقیم با روش المان های مرزی با نتایج به دست آمده از نرم افزار ANSYS مقایسه شده است.



شکل ۷- هندسه ماده ناهمگن مرکب از سه ماده

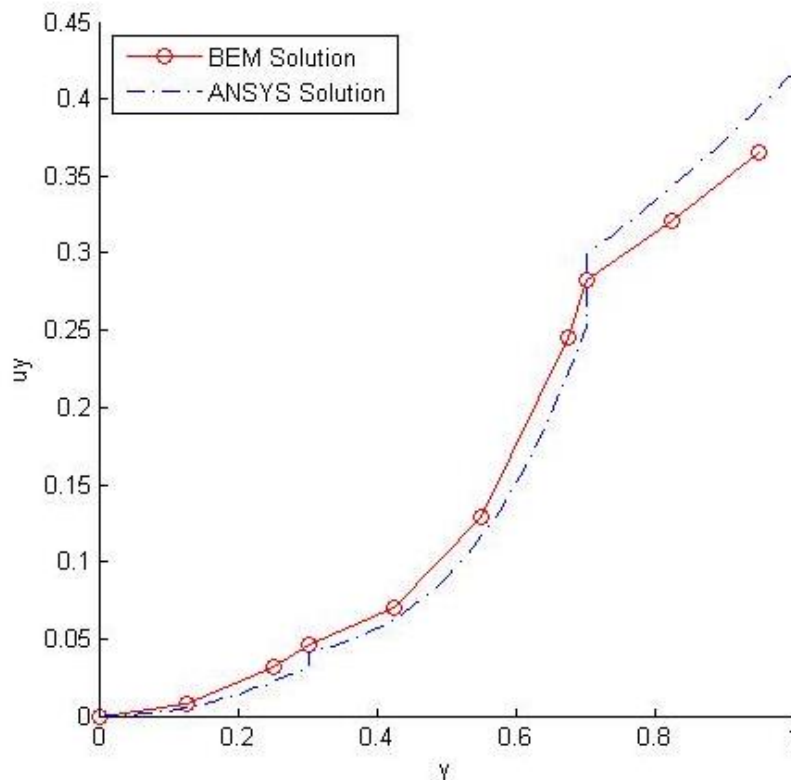


شکل ۸- هندسه ماده ناهمگن مرکب از سه ماده و شماره‌گذاری گره‌ها

برای مقایسه پاسخ‌ها، مطابق شکل (۸) شش گره روی مرز خارجی سمت چپ جسم انتخاب شده و درصد اختلاف بین دو جواب در جدول (۱) ارائه شده است. خطای مشاهده شده کمتر از ۰.۲٪ می‌باشد. در شکل (۹) جابه‌جایی‌های به‌دست محاسبه شده روی گره‌های مرز خارجی سمت چپ جسم به روش المان‌های مرزی و نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار ANSYS رسم شده است. نتایج به دست آمده نشان دهنده دقت خوب جواب-های به‌دست آمده از حل عددی با استفاده از روش المان‌های مرزی می‌باشد.

جدول ۱- درصد اختلاف جواب‌های به‌دست آمده از روش عددی المان‌های مرزی و جواب به‌دست آمده از نرم‌افزار

گره	درصد اختلاف
۲	۱/۷۲
۴	۱/۶۵
۲۳	۱/۵
۲۵	۱/۳۵
۳۸	۱/۰۷
۳۹	۱/۰۲



شکل ۹- جابه‌جایی گره‌های روی مرز خارجی به‌دست آمده از حل عددی و نرم‌افزار Ansys

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله فرمول‌بندی مورد نیاز برای حل مسئله مستقیم محاسبه تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها روی مرزهای خارجی یک جسم ناهمگن با مدول الاستیسیته متغیر ارائه شده است و با استفاده از کد نوشته شده در نرم‌افزار MATLAB یک نمونه مسئله هم برای بررسی صحت روابط استخراج شده و کد نوشته شده مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه هم فرمول‌بندی مورد نیاز برای محاسبه تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها روی گره‌های مرزهای خارجی و گره‌های روی مرزهای داخلی یک جسم ناهمگن، متشکل از سه ماده که ماده میانی (ماده ۲) ناهمگن بوده و مدول یانگ آن راستای محور  $y$  به صورت نمایی تغییر می‌کند، ارائه شده است. نتایج حاصل از حل تحلیلی و عددی به‌دست آمده برای تنش و جابه‌جایی‌ها برای مرز خارجی نشان دهنده دقت خوب جواب‌های بدست آمده از حل عددی با استفاده از روش المان‌های مرزی می‌باشد. در ادامه مسئله مستقیم محاسبه جابه‌جایی‌ها روی مرزهای خارجی یک جسم مرکب، تشکیل شده از دو جسم همگن و یک جسم ناهمگن مورد بررسی قرار می‌گرفت. در این مثال فرض شد، جسم از سه ماده مختلف تشکیل شده است، به صورتی که ماده (۱) و ماده (۳) همگن و ماده میانی یک ماده ناهمگن و به صورت ترکیبی از ماده (۱) و (۳) باشد که هر یک دارای نسبت پواسون و مدول الاستیسیته خاص خود هستند و با دو مرز مشترک از هم جدا شده‌اند. جواب به‌دست آمده از حل مستقیم با نرم‌افزار ANSYS مقایسه شده است و مشاهده می‌شود که خطای به‌دست آمده از حل عددی روش المان‌های مرزی در مقایسه با نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار ANSYS کمتر از ۲٪ می‌باشد که نشان دهنده دقت خوب جواب‌های بدست آمده از حل عددی با استفاده از روش المان‌های مرزی می‌باشد.

## مراجع

- [1] D. L. Clements, and O. A. Jones, "The Boundary Integral Equation Method for the Solution of a Class of Problems in Anisotropic Elasticity," *The ANZIAM Journal*, Vol. 22, No. 4, pp. 394-407, 1981, doi: <https://doi.org/10.1017/S0334270000002745>.
- [2] Q. Ao, "A New Boundary Element Method for Plane Anisotropic Elasticity," *Computers & Structures*, Vol. 55, No. 1, pp. 119-126, 1995/04/03/ 1995, doi: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(94\)00410-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)00410-5).
- [3] E. Pan, and B. Amadei, "A 3-D Boundary Element Formulation of Anisotropic Elasticity with Gravity," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 20, No. 2, pp. 114-120, 1996/02/01/ 1996, doi: [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(95\)00092-X](https://doi.org/10.1016/0307-904X(95)00092-X).
- [4] M. I. Azis, and D. L. Clements, "A Boundary Element Method for Anisotropic Inhomogeneous Elasticity," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 32, pp. 5747-5763, 2001/08/01/ 2001, doi: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00366-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00366-8).
- [5] X. W. Gao, C. Zhang, and L. Guo, "Boundary-only Element Solutions of 2D and 3D Nonlinear and Nonhomogeneous Elastic Problems," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 31, No. 12, pp. 974-982, 2007/12/01/ 2007, doi: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.002>.
- [6] C. Y. Wang, and M. Denda, "3D BEM for General Anisotropic Elasticity," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 22, pp. 7073-7091, 2007/11/01/ 2007, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.03.026>.
- [7] C.-D. Wang, J.-Y. Hou, and W.-J. Wang, "Fundamental Solutions for an Inhomogeneous Cross-anisotropic Material due to Horizontal and Vertical Plane Strain Line Loads," *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 5, No. 2, pp. 241-262, 2010, doi: <https://doi.org/10.2140/jomms.2010.5.241>.
- [8] Y. Zhang, V. Sladek, J. Sladek, and Z. Liu, "A New Boundary Integral Equation Formulation for Plane Orthotropic Elastic Media," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 10, pp. 4862-4875, 2012/10/01/ 2012, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.12.023>.
- [9] E. Ruocco, and V. Minutolo, "Two-dimensional Stress Analysis of Multiregion Functionally Graded Materials using a Field Boundary Element Model," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 2, pp. 663-672, 2012/03/01/ 2012, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.08.013>.
- [10] H. Wang, and Q.-H. Qin, "Boundary Integral Based Graded Element for Elastic Analysis of 2D Functionally Graded Plates," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 33, pp. 12-23, 2012/05/01/ 2012, doi: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.10.005>.
- [11] J. T. Katsikadelis, "The BEM for Nonhomogeneous Bodies," *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 74, pp. 780-789, 2005, doi: <https://doi.org/10.1007/s00419-005-0390-9>.

- [12] M. Nerantzaki, J. Katsikadelis, and J. Platanidi, "The BEM for the Elastostatic Problem in Inhomogeneous Plane Bodies," in 2004 *7th HSTAM National Congress on Mechanics*, pp. 112-117, 24–26 June, 2004, Chania, Greece, [Microsoft Word - HSTAM 2004-Nerantzaki-Katsikadelis-Platanidi corrected](#).
- [13] J.-H. Kim, and G. Paulino, "Isoparametric Graded Finite Elements for Nonhomogeneous Isotropic and Orthotropic Materials," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 69, No. 4, pp. 502-514, 2002, doi: <https://doi.org/10.1115/1.1467094>.
- [14] M. H. Mozaffari, and M. Khodadad, "Identifying Two Regular Interfacial Boundary Configurations and Simultaneously Estimation of Mechanical Properties using Imperialist Competitive Algorithm and Simplex Method," (in Persian), *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 10, pp. 71-79, 2015, dor: <http://dorl.net/dor/20.1001.1.10275940.1393.14.10.12.9>.

## Using of Boundary Elements Method in Calculating the Displacements and Stresses of Points on the Boundaries of a Non-homogeneous Material with Variable Modulus of Elasticity

\*Corresponding author: **Mohammad Hossein Mozaffari**

Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran  
mhmozaffari@tvu.ac.ir

**Mahdi Zare Mehrjardi**

Associate Professor, Mechanical Engineering, Ardakan University, Ardakan, Iran  
Mahdi.zare@ardakan.ac.ir

**Alireza Mortezaee**

Instructor, Department of Agricultural Engineering, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran  
a-mortezaei@tvu.ac.ir

### Abstract

One of the applications of the numerical method of boundary elements is the calculation of stresses and displacements on the external and internal boundaries of a non-homogeneous object. In industry, when two molten material are combined together, there is a possibility that the resulting material is non-homogeneous material. In this article, the formulation needed to solve the direct problem of calculating the stresses and displacements on the external and internal boundaries of a non-homogeneous body with variable modulus of elasticity is presented. The answers obtained from the numerical solution are compared with the ANSYS software and it can be seen that the error of the results obtained using the boundary elements method is less than 2% with the results obtained from the software, which indicates the good accuracy of the solutions obtained from the numerical method of boundary elements.

*Keywords:* Boundary elements method, Non-homogeneous body, Displacements of points on the boundaries, Stress calculation, Variable modulus of elasticity