

## برداشت انرژی با تیر یکسرگیردار دارای دو مقطع

### نمایی در شرایط تحریک دورانی تایر

در این پژوهش، یک مدل برداشت کننده انرژی تیر یکسرگیردار پیزوالکتریک با دو سطح مقطع نمایی در عرض و ضخامت به همراه وزنه موجود در نوک آن، تحت تحریک دورانی تایر برای کاربرد در سیستم نظارت بر فشار باد تایر یا TPMS پیشنهاد شده است. معادلات حاکم بر برداشت انرژی توسط تیر یکسرگیردار دارای مقطع نمایی در شرایط تحریک دورانی تایر برای اولین بار استخراج شد. پژوهش های کمی وجود دارد که هر دو ضخامت و عرض تیر را متغیر در نظر گرفته و هیچ تحقیق نظری بر روی این مدل، تحت تحریک دورانی تایر انجام نشده است. نتایج این پژوهش نشان داد، امکان برداشت انرژی با استفاده از تیر با مقطع نمایی در عرض و ضخامت که می تواند با وزن کمتر و توان الکتریکی بیشتر طراحی شود میسر می گردد. در پژوهش های آتی می توان به کمک معادلات استخراج شده، از بهینه سازی با اهداف افزایش توان الکتریکی و کاهش وزن برای یافتن بهترین مقادیر برای ابعاد هندسی مدل استفاده شود.

مجتبی مؤمن<sup>۱</sup>

کارشناسی ارشد

مرتضی ملاجعفری<sup>۲</sup>

استادیار

سلمان ابراهیمی نژاد<sup>۳</sup>

استادیار

واژه های راهنما: تیر یکسرگیردار پیزوالکتریک، برداشت انرژی، سیستم نظارت بر فشار باد لاستیک (TPMS)، سطح مقطع نمایی، تحریک دورانی، فرکانس رزونانس خودتنظیم

### ۱- مقدمه

سنسور TPMS وظیفه کنترل فشار باد تایر را بر عهده دارد و با کاهش یا افزایش فشار باد تایر از حد تعیین شده، این موضوع را به راننده هشدار می دهد. بنابراین ایمنی حرکت، عمر تایر، مصرف سوخت و عملکرد خودرو را بهبود می بخشد. این مزایا باعث وضع قانون در سال ۲۰۰۶ و ۲۰۱۲ به ترتیب در دولت ایالات متحده و اتحادیه اروپا شده که خودروسازان را مجبور به نصب سیستم های TPMS بر روی خودروهای جدید می کند [۱]. با توجه به بررسی ها، این سنسور در حدود ۲۰ میکرووات، توان نیاز دارد [۲].

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی خودرو، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران [mojtaba.momen1997@gmail.com](mailto:mojtaba.momen1997@gmail.com)

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی خودرو، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران [mollajafari@iust.ac.ir](mailto:mollajafari@iust.ac.ir)

<sup>۳</sup> نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی خودرو، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران [ebrahiminejad@iust.ac.ir](mailto:ebrahiminejad@iust.ac.ir)

این سنسورها معمولاً از باتری تغذیه می‌کنند که معایب زیادی همچون، طول عمر کوتاه، تعویض مشکل و ایجاد آلودگی به محیط است [۳]. به دلیل مشکلات مربوط به استفاده از باتری برای تامین انرژی مورد نیاز سنسور، روش برداشت انرژی از تایر برای تغذیه سنسورهای موجود در آن، به یک موضوع داغ تبدیل شده است [۴]. نتایج تحقیق‌های ادبیات نشان می‌دهد که دستگاه برداشت‌کننده انرژی پیزوالکتریکی، مناسب‌ترین منبع تغذیه TPMS است [۵]. در جدول (۱) مقایسه‌ای بین مزیت‌ها و معایب روش‌های برداشت انرژی صورت گرفته است.

با توجه این که برای شرایط محیط داخل تایر و برای کاربرد توان بدست آمده، در سنسور، روشی باید انتخاب شود که در آن مدل اندازه‌ی بزرگی نداشته باشد، یکپارچه‌سازی آن با سنسور دشوار نباشد، سطح توان خوبی را تولید نماید و به منبع ولتاژ خارجی نیاز نداشته باشد؛ روش برداشت انرژی پیزوالکتریک انتخاب می‌شود. نتایج تحقیق‌های ادبیات نشان می‌دهد که محققان به برداشت‌کننده‌های انرژی تیر یکسرگردار پیزوالکتریک به علت فرآیند ساخت ساده و کرنش نسبتاً بزرگ، توجه زیادی نشان می‌دهند. این مدل برای محیط با فرکانس پایین و کرنش بالا همچون تایر مناسب‌تر است [۶، ۷]. با مطالعه مقاله‌های سال‌های اخیر، این موضوع یافت می‌شود که برای بهبود انرژی برداشت‌شده از مدل، لازم است مدل مطلوبی طراحی شود. به این منظور مروری بر روی مدل‌های برداشت‌کننده انرژی تیر یکسرگردار پیزوالکتریک مقاله‌های سال‌های اخیر انجام شده است.

#### جدول ۱- مزایا و معایب روش‌های برداشت انرژی [۸، ۹]

معایب	مزایا	روش
اندازه بزرگ، دشوار بودن یکپارچه‌سازی با MEMS، قطعات متحرک، ولتاژ تولیدی پایین	عدم نیاز به منبع ولتاژ خارجی، عدم نیاز به ماده هوشمند	الکترومغناطیسی
نیازمند به منبع ولتاژ (یا شارژ) خارجی، محدودیت‌های مکانیکی	سازگار با MEMS، ولتاژهای ۲ تا ۱۰ ولت، عدم نیاز به ماده هوشمند	الکترواستاتیک
دپولاریزاسیون با تنش یا دما، شکننده بودن سرامیک‌های پیزوالکتریک، اتصال ضعیف در پلیمرهای پیزوالکتریک، امپدانس بالا، نشستی بار	سازگار با MEMS، عدم نیاز به منبع ولتاژ خارجی، ولتاژهای ۲ تا ۱۰ ولت، پیکربندی فشرده	پیزوالکتریک
رفتار غیرخطی، نیاز به سیم‌پیچ، نیازمند احتمالی به قسمت بایاس، یکپارچه‌سازی با MEMS دشوار است	ضریب اتصال فوق العاده بالا، خاصیت شکنندگی کمتر نسبت به پیزوسرامیک‌ها	مغناطیسی
طول عمر محدود یکپارچه‌سازی با MEMS دشوار است،	عدم نیاز به منبع ولتاژ خارجی	تریپوالکتریک
سطح توان پایین، نیازمند به تغییر دما	سازگار با MEMS، عدم نیاز به منبع ولتاژ خارجی	برق الکتریکی
نیازمند به منبع ولتاژ (یا شارژ) خارجی	قابلیت کرنش زیاد	پلیمرهای الکتریکی

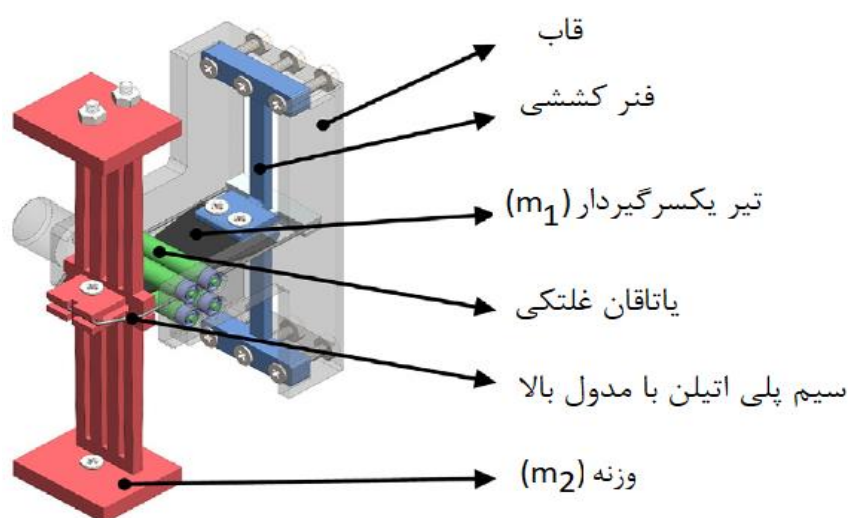
سلمانی و همکاران [۱۰] تاثیر متغیر نمودن مقطع تیر پیزوالکتریک بصورت نمایی را برای استخراج نسبت توان به وزن بیشتر از مدل برداشت کننده انرژی، بررسی کردند و یک راه حل دقیق تحلیلی، برای محاسبه توان تولیدشده از ارتعاش تیر نمایی، با اتصال های سری یا موازی پیزوالکتریک را ارائه دادند. نتایج نشان می دهد که مقادیری برای ضریب باریک شونده تیر و مقاومت الکتریکی وجود دارد که توان خروجی به ازای هر جرم دستگاه برداشت کننده انرژی به حداکثر می رسد. ساهو و پاندی [۱۱] مدل تیرهای غیر یکنواخت با عرض های متغیر بصورت خطی و کوارتیک (درجه چهار) را بررسی کردند. نتایج نشان می دهد که تیر واگرا می تواند در مقایسه با تیر یکنواخت، توان خروجی را بهبود دهد. کشمیری و همکاران [۱۲] یک مدل برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک با هندسه غیر خطی و طرح مواد مدرج تابعی<sup>۱</sup> (FGM) برای افزایش کارایی و خروجی ولتاژ در مقایسه با مدل های برداشت کننده بای مورف یکنواخت و حل آن بر اساس روش تجزیه آدومی با تحریک هارمونیک پایه را مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان می دهد که برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک با ترکیب هندسه مخروطی غیر خطی و طرح FGM می تواند بیش از ۱۹/۷۶ برابر، ولتاژ بالاتر در دامنه فرکانس رزونانس، در مقایسه با طراحی همگن یکنواخت سنتی در دامنه های با فرکانس بالا (بالاتر از فرکانس رزونانس) تولید کند. علامه و همکاران [۱۳] به بررسی شکل های هندسی مختلف با تغییر ابعاد تیر و جرم نوک با هدف افزایش کارایی مدل (نسبت توان تولیدی به وزن بیشتر) پرداختند. نتایج نشان می دهد که هندسه ذوزنقه ای نسبت به مستطیلی بسته به نسبت طول تیر به طول جرم نوک می تواند توان خروجی بیشتری تولید کند. شیونگ و همکاران [۱۴] مدل تیر یکسرگیردار دارای یک سوراخ مستطیلی را ارائه و اثرات این حفره را بر عملکرد تولید ولتاژ مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان می دهد که مدل برداشت کننده انرژی تیر یکسرگیردار پیزوالکتریک با یک سوراخ مستطیلی بر روی آن، فرکانس ویژه کمتری دارد و می تواند تحت تحریک محیط با فرکانس پایین، بهتر کار کند. وانگ و همکاران [۱۵] یک مطالعه مقایسه ای را بر روی عملکرد دستگاه های برداشت کننده انرژی از باد توسط تیر پیزوالکتریک با هندسه های مختلف انجام دادند. نتایج نشان می دهد که برای بهبود کارایی دستگاه های برداشت کننده انرژی، تیر با مقطع نمایی باید در نظر گرفته شود. حاج حیدری و همکاران [۱۶] تأثیر تئوری های غیر یکنواخت برای هندسه تیر یکسرگیردار پیزوالکتریک با عرض و ضخامت غیر یکنواخت را برای هر دو تیر تیموشنکو و اولر-برنولی، برای هر دو حالت یونی مورف و بای مورف مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان می دهد که با افزایش درجه غیر یکنواختی، میزان تولید ولتاژ و کارایی مدل افزایش می یابد. دنگ و همکاران [۱۷] یک مدل جدید را برای افزایش تطابق فرکانسی با استفاده از تاثیر همزمان نیروی مرکزگرا، بر افزایش نیروی محوری (تنظیم به وسیله جرم تنظیم فرکانس) و کاهش طول موثر تیر (تنظیم به وسیله فنر کششی)، طراحی کردند. تجزیه و تحلیل شبیه سازی نشان می دهد که مدل پیشنهادی می تواند از طریق طراحی آسان فنر کششی، خود تطابق فرکانسی را در محدوده ۱۰ تا ۲۰ هرتز بدست آورد. کاندو و نماد [۱۸] تغییر در ضخامت لایه بستر برداشت کننده انرژی ارتعاشی تیر یکسرگیردار پیزوالکتریک را برای دستیابی به تنش یکنواخت در طول تیر مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان می دهد که مدل پیشنهادی ۲۰ درصد بیشتر نسبت به مدل تیر با ضخامت یکنواخت، توان تولید می کند. نیسانث و همکاران [۱۹] تأثیر

<sup>1</sup> Functionally Graded Material

تغییر پارامترهای هندسی تیر و جرم نوک آن را در مدل برداشت‌کننده انرژی تیر پیزوالکتریک مورد بررسی قرار دادند و نتیجه‌گیری شد که مدل بهینه، شامل یک تیر دوزنقه‌ای و یک جرم نوک مثلثی شکل است. از پژوهش‌های انجام‌شده در سال‌های اخیر می‌توان دریافت که برای برداشت انرژی مطلوب، باید تغییراتی در هندسه مدل ایجاد شود. از آنجا که کمتر تحقیقی، هر دو پارامتر عرض و ضخامت تیر را متغیر در نظر گرفته و هیچ تحقیقی بر روی چنین مدلی در شرایط تحریک دورانی تیر انجام نشده است، در این مقاله یک مدل برداشت‌کننده انرژی مبتنی بر مدل تیر یکسرگردار با دو سطح مقطع نمایی در عرض و ضخامت تیر مناسب برای برداشت انرژی از تیر برای کاربرد در سنسور TPMS مورد بررسی قرار می‌گیرد.

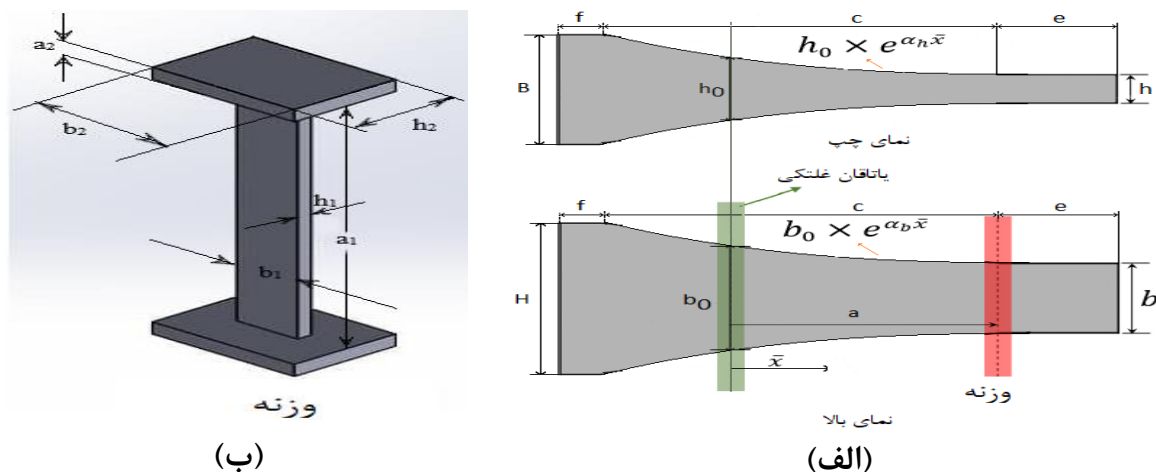
## ۲- سیستم برداشت‌کننده انرژی

ساختار سیستم برداشت‌کننده انرژی مورد بررسی بصورت شکل (۱) است که اجزای آن شامل قاب، فنر کششی، تیر یکسرگردار با جرم  $m_1$ ، یاتاقان غلتکی، سیم پلی اتیلن با مدول بالا<sup>۱</sup> (HMPE)، وزنه نوک تیر با جرم  $m_2$  می‌باشد. در طراحی سیستم، وزنه نوک تیر بصورت عمود بر تیر یکسرگردار، در انتهای آزاد بصورت ثابت قرار گرفته است. فنر کششی بصورت تیر دو سرگردار طراحی شده است که این تیر به خاطر الاستیک بودن، خاصیت تغییر شکل و خم شدن با اعمال نیرو را دارد و می‌تواند نقش یک فنر کششی را داشته باشد. نیروی گریز از مرکز ناشی از وزنه نوک تیر و تیر یکسرگردار بر وسط فنر کششی، از طریق HMPE وارد می‌شود. چهار یاتاقان غلتکی از خم شدن تیر جلوگیری کرده و نقش یک تکیه‌گاه گیردار را در نقطه‌ای از طول تیر، بازی می‌کنند، بنابراین قبل از یاتاقان غلتکی، خم شدن تیر وجود ندارد و بعد از آن، تیر اجازه خمش به واسطه نیروی وزن و وزنه نوک تیر را دارد. همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است، سیم HMPE تقویت‌شده، برای جلوگیری از کشیده شدن تیر یکسرگردار، به دلیل نیروی گریز از مرکز زیاد استفاده می‌شود. وزنه موجود در نوک تیر در برداشت‌کننده انرژی پیشنهادی، به یک تیر یکسرگردار پیزوالکتریک بصورت ثابت، متصل و طراحی شده که از عدم اطمینان ناشی از نیروی اصطکاک جلوگیری می‌کند و سازوکار را ساده می‌نماید.



شکل ۱- ساختار سیستم برداشت‌کننده انرژی تیر یکسرگردار وزنه‌دار [۲]

<sup>۱</sup> High-Modulus Polyethylene

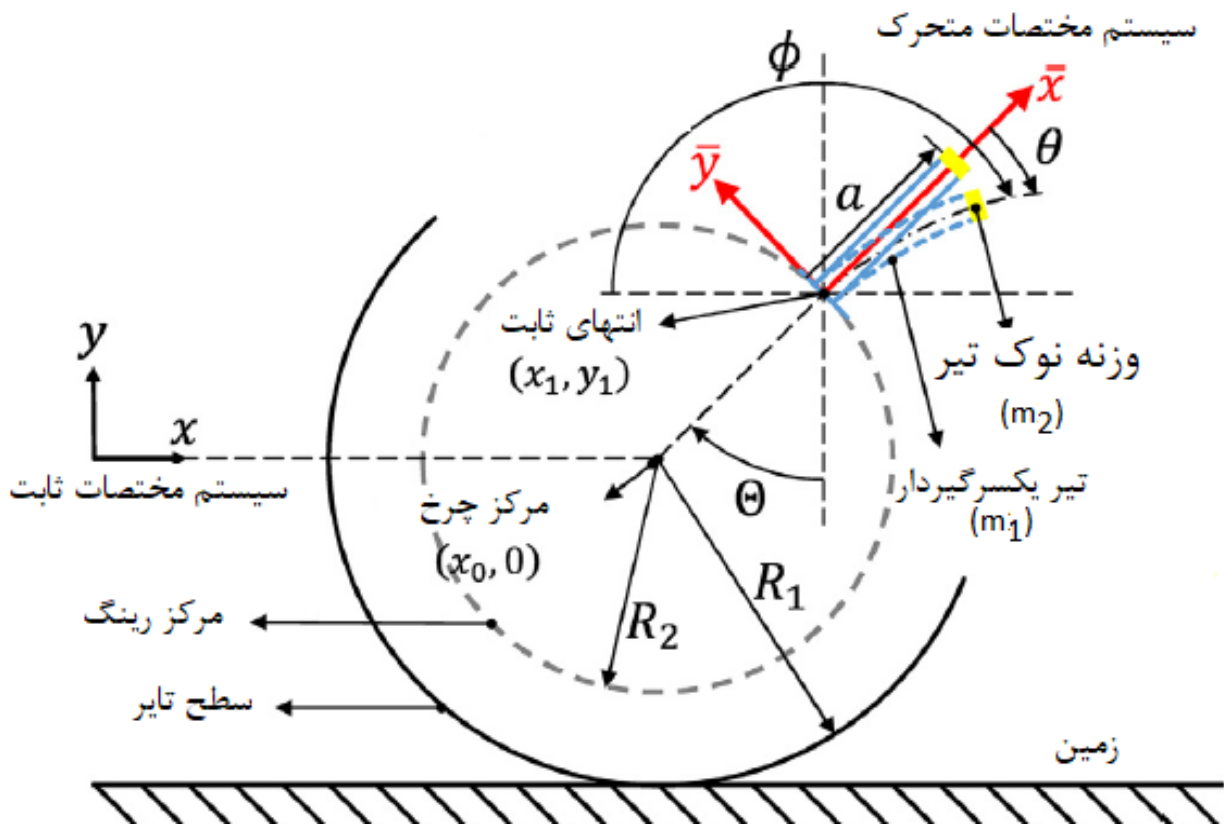


شکل ۲- (الف) هندسه تیر یکسرگیردار با عرض و ضخامت نمایی (ب) وزنه موجود در نوک تیر

هندسه تیر یکسرگیردار با دو سطح مقطع نمایی در عرض و ضخامت تیر و وزنه موجود در نوک آن در شکل (۲) نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، مدل جدید از تیر یکسرگیردار با دو سطح مقطع نمایی در عرض و ضخامت تیر طراحی شده است که در فاصله  $c$  از طول تیر قرار می‌گیرد. در فواصل  $f$  و  $e$  به دلیل تاثیر ناچیز این قسمت‌ها در نتایج ولتاژ و توان خروجی و اتصال بهتر اجزای سیستم به یک دیگر از هندسه مستطیلی استفاده شده است. عرض و ضخامت تیر یکسرگیردار در نوک تیر به ترتیب برابر با  $b$  و  $h$  و در محل یاتاقان غلتشی، برابر با  $b_0$  و  $h_0$  و در ابتدای تیر که دارای بزرگترین عرض و ضخامت است،  $B$  و  $h$  می‌باشد. همچنین  $a$  برابر فاصله وزنه نوک تیر تا محل یاتاقان غلتشی است و طول موثر تیر محسوب می‌شود زیرا در این فاصله، تیر اجازه خمش دارد و این خمش باعث ایجاد تنش و کرنش می‌شود و این کرنش توسط پیروالکترونیک‌هایی که در این قسمت بر روی تیر نصب شده‌اند به ولتاژ و توان تبدیل می‌شود، بنابراین بعد از یاتاقان غلتکی تحلیل الکترودینامیکی مدل انجام می‌شود و یاتاقان غلتکی نقش یک تکیه‌گاه گیردار را دارد.  $\alpha_h$  و  $\alpha_b$  نیز به ترتیب ضریب باریک شونده‌گی در عرض و ضخامت تیر می‌باشد در مدل برداشت‌کننده انرژی، وزنه نوک تیر بصورت یک تیر است که دارای یک جان و دو بال می‌باشد و ابعاد  $a_1$  و  $b_1$  و  $h_1$  متعلق به جان و ابعاد  $a_2$  و  $b_2$  و  $h_2$  متعلق به دو بال تیر است که در شکل (۲-ب) قابل مشاهده می‌باشد.

### ۳- مدل‌سازی و فرمول‌بندی مدل برداشت‌کننده انرژی

در این پژوهش، تاثیر تحریک دورانی تایر بر روی سیستم برداشت‌کننده انرژی مورد بررسی قرار می‌گیرد و تایر در شرایط غلتش کامل در نظر گرفته می‌شود. مدل‌سازی سیستم برداشت‌کننده انرژی و شماتیک مدل برداشت‌کننده انرژی متصل به رینگ در شکل (۳) نشان داده شده است که در آن یک تیر یکسرگیردار با یک وزنه موجود در نوک آن، بر روی رینگ چرخ قرار گرفته است. فاصله بین پایه تیر یکسرگیردار و مرکز چرخ، شعاع چرخ، جرم تیر یکسرگیردار و جرم وزنه نوک تیر به ترتیب، توسط  $R_1$ ،  $R_2$ ،  $m_1$  و  $m_2$ ، نشان داده شده است. فاصله  $a$  به عنوان طول موثر تیر یکسرگیردار معرفی می‌شود که فاصله وزنه نوک تیر تا پایه تیر را نشان می‌دهد.



شکل ۳- شماتیک مدل برداشت کننده انرژی متصل بر روی رینگ [۲]

برای توصیف مدل، دو سیستم مختصات تعریف شده است. سیستم مختصات ثابت که با  $x$  و  $y$  و سیستم مختصات متحرک که با  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  نشان داده شده است که مبدا آن بر روی رینگ یا پایه تیر یکسرگیردار قرار گرفته است. مدل برداشت کننده انرژی، بارها بخاطر نیروی گریز از مرکز تغییر می کند و نسبت به سیستم مختصات متحرک متغیر است. همان طور که در شکل (۳) دیده می شود، زاویه چرخش چرخ و زاویه انحنای تیر یکسرگیردار با توجه به سیستم مختصات متحرک، به ترتیب با  $\theta$  و  $\theta$  تعریف شده و زاویه انحنای تیر یکسرگیردار نسبت به سیستم مختصات ثابت با  $\phi$  نشان داده شده است. مرکز چرخ و پایه تیر یکسرگیردار نیز به ترتیب در فاصله  $x_0$  و  $x_1$  نسبت به محور افق و فاصله صفر و  $y_1$  نسبت به محور عمود از سیستم مختصات ثابت قرار گرفته اند. معادله دینامیکی سیستم برداشت کننده انرژی نوع تیر یک سرگیردار نصب شده بر روی چرخ غلتان، با استفاده از فرمول بندی اویلر-لاگرانژ تهیه شده است. رابطه های مربوط به زاویه انحنای تیر یکسرگیردار با دو سطح مقطع نمایی در عرض و ضخامت، ناشی از خمش، در هر نقطه از طول تیر و در انتهای آزاد آن، از رابطه های (۱) و (۲) بدست می آید.

$$\theta(a) = \frac{12w_2((\alpha_b + 3\alpha_h)a - 1 + e^{-a(\alpha_b + 3\alpha_h)})}{Eb_0h_0^3(\alpha_b + 3\alpha_h)^2} \quad (1)$$

$$\delta(\bar{x}) = \theta(a) \times \frac{B_1}{B_2} \quad (2)$$

$$B_1 = (\alpha_b + 3\alpha_h) \times [((\alpha_b + 3\alpha_h)a - 1)\bar{x} - \bar{x} e^{-\bar{x}(\alpha_b + 3\alpha_h)}] \\ + ((\alpha_b + 3\alpha_h)a - 2)e^{-\bar{x}(\alpha_b + 3\alpha_h)} - ((\alpha_b + 3\alpha_h)a - 2)$$

$$B_2 = (\alpha_b + 3\alpha_h)[(\alpha_b + 3\alpha_h)a - 1 + e^{-a(\alpha_b + 3\alpha_h)}]$$

که در آن  $w_2$  وزن و زنه موجود در نوک تیر و  $E$  مدول الاستیسیته تیر می‌باشد. همان‌طور که در شکل (۳) مشاهده می‌شود،  $\emptyset$ ،  $\theta$  و  $\theta$  با هم در ارتباطند و رابطه (۳) بین آن‌ها برقرار است.

$$\emptyset - \theta - \theta = \frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

مختصات هر نقطه از تیر یکسرگیردار بصورت  $(x_a, y_a)$  تعریف شده است که از رابطه‌ی (۴) پیروی می‌کند.

$$x_a = x_0 + R_2 \sin \theta + \bar{x} \sin \theta + \delta \cos \theta \quad (۴)$$

$$y_a = R_2 \cos \theta + \bar{x} \cos \theta - \delta \sin \theta$$

وزن مدل از رابطه  $weight = (m_1 + m_2)g$  بدست می‌آید که در آن  $g = 9.81 (m/s^2)$  شتاب گرانش زمین است. طول موثر تیر یکسرگیردار که توسط نیروی گریز از مرکز به طور پیوسته تغییر می‌کند، از رابطه‌ی (۵) بدست می‌آید.

$$a = l_i + \frac{P_c}{k_s} \quad (۵)$$

$$P_c = (m_1 + m_2)R_3\dot{\theta}^2$$

که در آن،  $l_i$  برابر طول موثر اولیه تیر یکسرگیردار در زمانی است که نیروی گریز از مرکز به مدل برداشت‌کننده انرژی وارد نمی‌شود یعنی در زمانی است که تایلر نمی‌چرخد، بنابراین طول موثر تیر یکسرگیردار در زمان طراحی است.  $P_c$  نیروی گریز از مرکز،  $k_s$  سفتی فنر کششی و  $\frac{P_c}{k_s}$  برابر با فاصله جابجایی فنر کششی است.  $R_3$  مرکز جرم معادل جرم‌های  $m_1$  و  $m_2$  نسبت به مرکز چرخ است. انرژی جنبشی و پتانسیل تیر یکسرگیردار از رابطه‌های (۶) و (۷) بدست می‌آید.

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^a \rho_1 h(\bar{x}) b(\bar{x}) (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2) d\bar{x} \quad (۶)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} E \int_0^a I(\bar{x}) \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \delta(\bar{x}) \right)^2 d\bar{x} + \int_0^a \rho_1 h(\bar{x}) b(\bar{x}) g y_a d\bar{x} \quad (7)$$

که در آن  $I(\bar{x})$  ممان اینرسی سطحی تیر یکسرگیردار می‌باشد. انرژی جنبشی و پتانسیل وزنه موجود در نوک تیر از رابطه‌های (۸) و (۹) بدست می‌آید.

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{X}_a^2 + \dot{Y}_a^2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2 \quad (8)$$

$$U_2 = m_2 g Y_a \quad (9)$$

که در آن  $I_2$  ممان اینرسی دورانی وزنه نوک تیر حول محور دوران خودش می‌باشد. انرژی جنبشی چرخ از رابطه‌ی (۱۰) پیروی می‌کند. انرژی پتانسیل چرخ نیز که با پارامتر  $U_3$  تعریف می‌شود، با فرض حرکت خودرو بر روی سطح صاف برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.

$$T_3 = \frac{1}{2} I_w \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_w \dot{x}_0^2 \quad (10)$$

که در آن  $I_w$  و  $m_w$  به ترتیب مربوط به ممان اینرسی جرمی و جرم چرخ است. انرژی جنبشی و پتانسیل کل سیستم به ترتیب از رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) بدست می‌آید.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (11)$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad (12)$$

لاگرانژین کل سیستم از رابطه‌ی (۱۳) پیروی می‌کند.

$$L = T - U \quad (13)$$

انرژی اتلافی مدل برداشت‌کننده انرژی از رابطه‌ی (۱۴) بدست می‌آید.

$$R_e = \frac{1}{2} C_t \dot{\theta}^2 \quad (14)$$



که در آن  $C_t$  ثابت میرایی تعمیم یافته کلی مدل برداشت کننده انرژی است. معادله دینامیکی مربوط به مدل برداشت کننده انرژی با استفاده از روش اویلر-لاگرانژ بصورت (۱۵) بدست می آید که در آن  $Q_1$  برابر نیروی خارجی تعمیم یافته مربوط به مختصات  $\theta$  می باشد.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R_e}{\partial \dot{\theta}} = Q_1 \quad (15)$$

با جایگذاری رابطه های (۱۳) و (۱۴) داخل رابطه ی (۱۵)، معادله دینامیکی مدل برداشت کننده انرژی شامل تیر یکسرگیردار با دو سطح مقطع نمایی همراه با وزنه موجود در نوک آن بدست می آید. زمانی که فرکانس طبیعی مدل برداشت کننده انرژی با فرکانس چرخش چرخ منطبق و هماهنگ شود، می توان از مدل برداشت کننده انرژی، انرژی خوبی برداشت کرد. ولتاژ خروجی تیر یکسرگیردار پیزوالکتریک متصل به یک بار مقاوم خارجی توسط رابطه (۱۶)، به نرخ کرنش مربوط می شود [۲۰].

$$\dot{V} = - \frac{2h_e d_{31} E_p}{F_{sp} \epsilon_p} \dot{S} - \frac{1}{RC_b} V \quad (16)$$

که در آن،  $R$  مقاومت خارجی دریافت کننده انرژی الکتریکی است.  $h_e$ ،  $d_{31}$ ،  $E_p$  و  $\epsilon_p$  به ترتیب ضخامت پیزوالکتریک، ضریب کرنش پیزوالکتریک، مدول یانگ و ثابت دی الکتریک PVDF هستند.  $F_{sp}$  ضریب سری یا موازی لایه های پیزوالکتریک است.  $C_b$  ظرفیت الکتریکی خازنی مواد پیزوالکتریک است که از رابطه ی (۱۷) پیروی می کند.

$$C_b = \frac{F_{sp}^2 \epsilon_p b_e l_e}{2h_e} \quad (17)$$

که در آن  $l_e$  و  $b_e$  طول و عرض ماده پیزوالکتریک می باشد.  $\dot{S}$  نرخ کرنش متوسط در سطح پیزوالکتریک تیر یکسرگیردار با دو سطح مقطع نمایی در عرض و ضخامت است که باعث کوپلینگ معادله های دینامیکی به معادله های الکتریکی می شود و از رابطه ی (۱۸) پیروی می کند.

$$\dot{S} = ZZ \times \dot{\theta}(a)$$

$$ZZ = \frac{\alpha_b (e^{-2a\alpha_h} + 2a\alpha_h - 1)}{8\alpha_h^2 \left( \frac{a(\alpha_b + 3\alpha_h) + e^{-a(\alpha_b + 3\alpha_h)} - 1}{h_0(\alpha_b + 3\alpha_h)^2} \right) (e^{a\alpha_b} - 1)} \quad (18)$$

فیلم‌های پیزوالکتریک به عنوان مبدل‌هایی در نظر گرفته می‌شوند که انرژی مکانیکی را به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کنند. طبق قانون بقای انرژی، انرژی الکتریکی تولیدشده باید برابر انرژی مکانیکی مصرف‌شده باشد. بنابراین، توان الکتریکی بصورت رابطه (۱۹) نوشته می‌شود.

$$P = \frac{V^2}{R} = C_e \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (19)$$

با جایگذاری رابطه  $V$  بدست‌آمده از رابطه (۱۸) در داخل رابطه (۱۹)، رابطه  $C_e$  بصورت رابطه (۲۰) بدست می‌آید.

$$C_e = R \left( i_s^2 Z Z^2 + C_b^2 \left( \frac{\dot{V}}{\dot{\theta}} \right)^2 - 2i_s C_b Z Z \left( \frac{\dot{V}}{\dot{\theta}} \right) \right) \quad (20)$$

که در آن،  $i_s = F_{spl} e b_e d_{31} E_p$  می‌باشد.  $C_t$  توسط رابطه (۲۱) به پارامترهای دیگر مرتبط است و باعث ارتباط رابطه‌های دینامیکی و الکتریکی به یکدیگر می‌شود که در آن  $C_m$  به عنوان میرایی مکانیکی و  $C_e$  به عنوان میرایی الکتریکی ناشی از اثر پیزوالکتریک، در مدل برداشت‌کننده انرژی است.

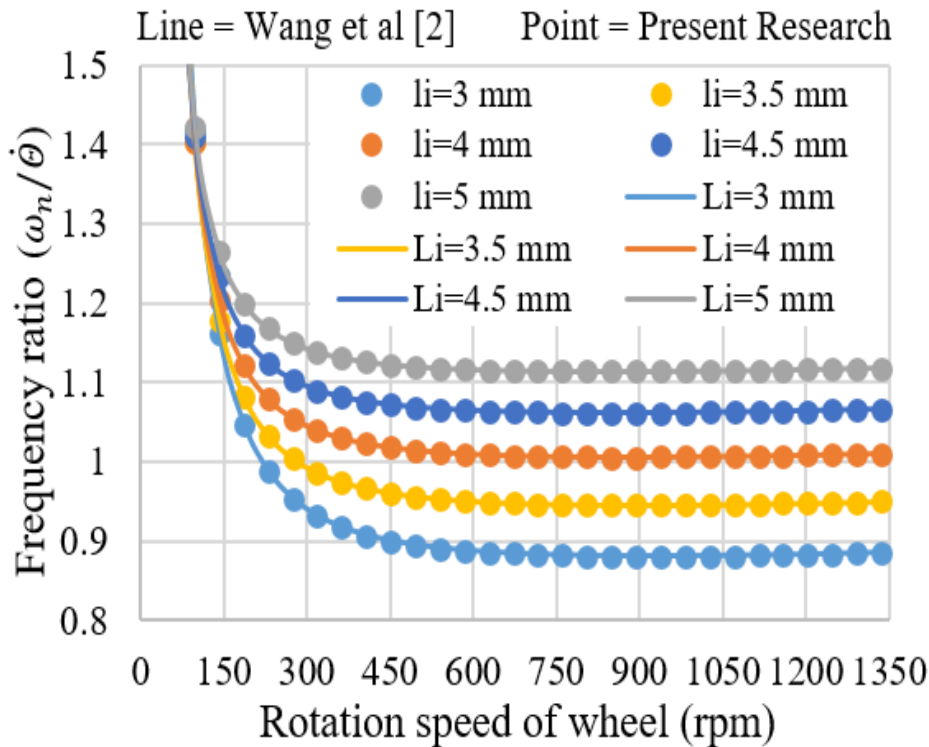
$$\frac{C_t}{I_t} = C_m + C_e \quad (21)$$

با جایگذاری رابطه (۱۸) در داخل رابطه (۱۶) و رابطه (۲۱) در داخل معادله حاکم مکانیکی و حل همزمان دو معادله دینامیکی و الکتریکی کوپل‌شده، ولتاژ خروجی مدل برداشت‌کننده انرژی بدست می‌آید. با استفاده از رابطه (۲۱) هم توان خروجی مدل یافت می‌شود.

#### ۴- صحنه‌گذاری مدل برداشت‌کننده انرژی

برای صحنه‌گذاری سیستم برداشت‌کننده انرژی این پروژه و نتایج آن از مدل و روش مقاله وانگ و همکاران [۲] که در سال ۲۰۱۹ انجام شده است استفاده می‌شود. با حذف دو سطح مقطع نمایی در عرض و ضخامت تیر یکسرگیردار پیزوالکتریک این پژوهش و در نظر گرفتن سطح مقطع دوزنقه‌ای برای عرض تیر و در نظر گرفتن ضخامت ثابت، مدل برداشت‌کننده انرژی مقاله مرجع بدست می‌آید. با حل همزمان دو معادله دینامیکی و الکتریکی کوپل‌شده، ولتاژ خروجی مدل برداشت‌کننده انرژی بدست می‌آید.

نسبت فرکانس طبیعی مدل برداشت‌کننده انرژی بر روی فرکانس چرخش چرخ، برحسب سرعت چرخش چرخ در مدل برداشت‌کننده انرژی، شبیه‌سازی شده و نتیجه‌ی آن در شکل (۴) برای صحنه‌گذاری نتایج جدید آورده شده است.



شکل ۴- صحنه‌گذاری نمودار تغییرات نسبت فرکانسی بر حسب سرعت چرخش چرخ با طول‌های موثر اولیه متفاوت تیر یکسرگردار

## ۵- طراحی طول موثر ایده‌آل برای افزایش پهنای باند عملکرد مطلوب مدل

بسیاری از محققان برداشت انرژی ارتعاشی، سعی در افزایش ولتاژ و توان خروجی بدست‌آمده از مدل برداشت‌کننده انرژی خود را داشته‌اند و از روش‌های مختلفی استفاده کرده‌اند. یکی از این روش‌ها، هماهنگ کردن فرکانس طبیعی ارتعاشات مدل برداشت‌کننده انرژی با فرکانس تحریک است که برای شرایط تایر کاربرد دارد و باعث می‌شود که فرکانس طبیعی ارتعاشات مدل برداشت‌کننده انرژی با فرکانس تحریک، منطبق شده و پدیده رزونانس اتفاق بیفتد. مدل برداشت‌کننده انرژی مورد تحقیق در این پروژه، بر روی رینگ چرخ نصب شده است و به دلیل ابعاد کوچک مدل برداشت‌کننده و مقدار فاصله زیاد رینگ تا سطح تایر که حفره تایر نام دارد و فرض حرکت بر روی سطح صاف، تنها تحریک دورانی، بر مدل برداشت‌کننده انرژی وارد می‌شود. برای ایجاد تطابق فرکانسی در شرایطی همانند حفره تایر، که در آن فرکانس تحریک (فرکانس دورانی تایر) با تغییر سرعت حرکت خودرو تغییر می‌کند، باید فرکانس طبیعی مدل برداشت‌کننده انرژی خودتنظیم با فرکانس تحریک باشد.

جدول (۲) مشخصه‌های سیستم برداشت‌کننده انرژی شامل تیر یکسرگردار، وزنه موجود در نوک آن، پیزوالکتریک و تایر را نشان می‌دهد.

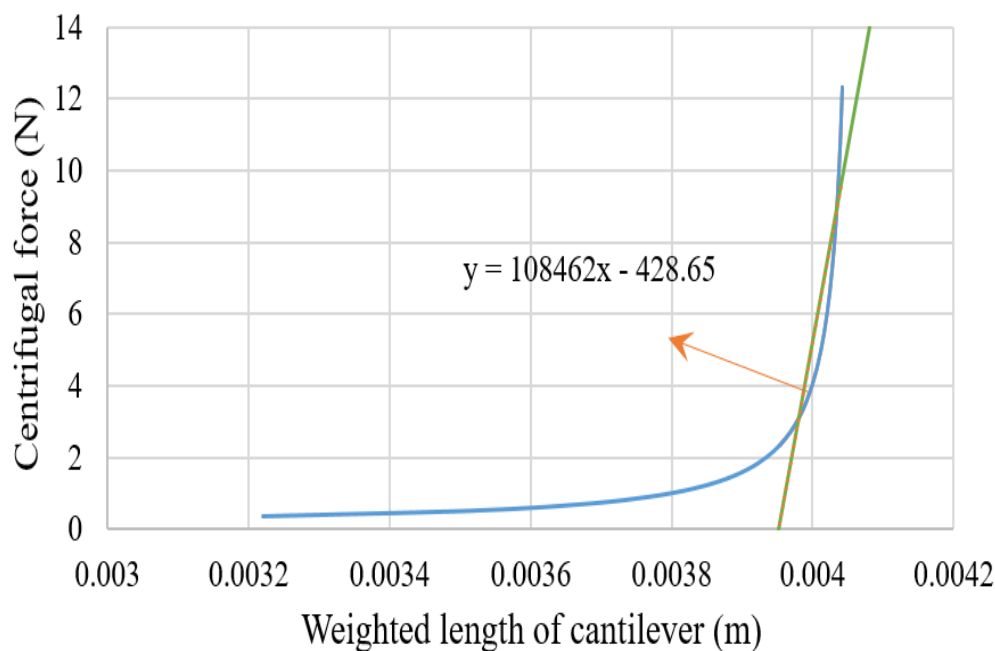
برای تنظیم خودکار فرکانس طبیعی مدل برداشت‌کننده انرژی با فرکانس دورانی تایر در سرعت‌های مختلف حرکت خودرو، باید نسبت فرکانس طبیعی مدل برداشت‌کننده انرژی بر روی فرکانس چرخش برابر یک شود ( $\frac{\omega_n}{\theta} = 1$ ). پارامتر طول موثر تیر به نیروی گریز از مرکز در شرایطی که تطابق فرکانسی اتفاق می‌افتد مرتبط می‌شود. نمودار نیروی گریز از مرکز بر حسب طول موثر تیر در سرعت‌های مختلف چرخش چرخ و در

شرایطی که تطابق فرکانسی اتفاق می‌افتد، بصورت شکل (۵) است. شیب خط برازش کننده منحنی، نشان‌دهنده ثابت فنریت این فنر خطی است و فاصله داخلی بین خط برازش کننده و محور  $x$  نشان‌دهنده طول موثر اولیه تیر یکسرگیردار می‌باشد که با پارامتر  $l_i$  نشان داده شده است و در زمانی است که چرخ نمی‌چرخد یا نیروی گریز از مرکز صفر است. با توجه به نتایج بدست آمده اگر مقدار  $k_s$  برابر  $108462$  نیوتون بر متر در نظر گرفته شود، مقدار طول موثر اولیه تیر، مقدار  $3/952$  میلی‌متر بدست می‌آید.

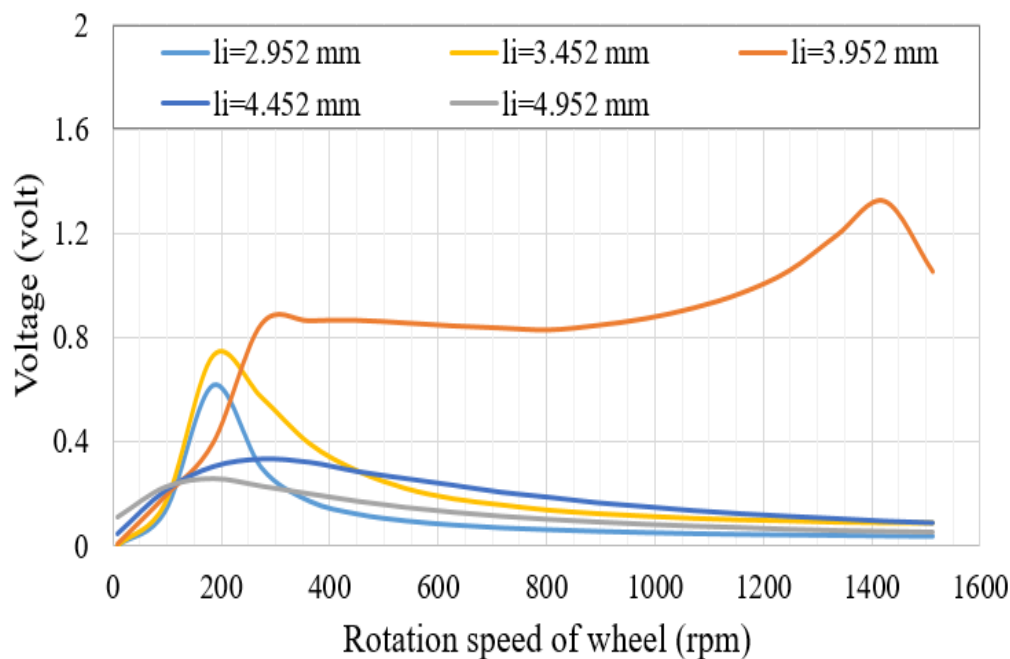
جدول ۲- مشخصه‌های سیستم برداشت کننده انرژی

پارامترها	معرفی پارامترها	مقدار	واحد
<b>مشخصه‌های تیر</b>			
$f$	طول گیره	۲	mm
$c$	طول سطح مقطع نمایی تیر	۱۸	mm
$e$	طول بعد از وزنه	۱۰	mm
$b$	عرض کوچک تیر	۶	mm
$h$	ضخامت کوچک تیر	۰/۵	mm
$\alpha_b$	ضریب باریک شونده‌گی در عرض تیر	-۳۹/۸۸	
$\alpha_h$	ضریب باریک شونده‌گی در ضخامت تیر	-۰/۱	
<b>مشخصه‌های وزنه</b>			
$a_1$	طول جان	۶۰	mm
$b_1$	عرض جان	۹	mm
$h_1$	ضخامت جان	۲	mm
$a_2$	ضخامت بال	۳	mm
$b_2$	طول بال	۲۱	mm
$h_2$	عرض بال	۱۵	mm
<b>مشخصه‌های مواد تیر و وزنه</b>			
$E$	مدول الاستیسیته تیر	$10^7$	$N/m^2$
$\rho_1$	چگالی تیر	۹۶۰	$kg/m^3$
$\rho_2$	چگالی وزنه	۱۱۴۸	$kg/m^3$
<b>مشخصه‌های پیزوالکتریک</b>			
$d_{31}$	ضریب کرنش پیزوالکتریک	۹/۱۱۲۶	$pC/N$
$\epsilon_p$	ثابت دی الکتریک ماده پیزوالکتریک	۹۷/۸۴۹	$pF/m$
$E_p$	مدول الاستیسیته پیزوالکتریک	۳	$GPa$
<b>مشخصه‌های تایر</b>			
$R_1$	شعاع چرخ	۳۰۰	mm
$R_2$	شعاع رینگ	۱۷۵	mm

هنگامی که سرعت چرخش چرخ در محدوده ۲۷۴ تا ۱۴۲۳ دور بر دقیقه باشد، برای طول موثر اولیه تیر یکسرگردار ۳/۹۵۲ میلی‌متر، نسبت فرکانسی به مقدار یک نزدیک می‌شود. بنابراین مدل برداشت‌کننده انرژی می‌تواند در بیشتر سرعت‌های چرخش چرخ، دچار رزونانس شود. با حل همزمان دو معادله دینامیکی و الکتریکی کوپل‌شده، ولتاژ خروجی مدل برداشت‌کننده انرژی بدست می‌آید و توان خروجی مدل یافت می‌شود. در شکل (۶) تغییرات ولتاژ خروجی یک لایه PVDF برحسب سرعت چرخش چرخ با طول‌های موثر اولیه متفاوت تیر یکسرگردار، ارائه شده است.



شکل ۵- طراحی فنر خطی برای برآزش طول موثر ایده‌آل تیر یکسرگردار در ناحیه سرعت چرخش بالا



شکل ۶- نمودار ولتاژ خروجی برحسب سرعت چرخش چرخ با طول‌های موثر اولیه متفاوت تیر یکسرگردار

بنابراین یکی از روش‌های نتیجه‌گیری مطلوب از مدل برداشت‌کننده انرژی، طراحی طول موثر ایده‌آل تیر یکسرگردار ( $a$ ) می‌باشد که با توجه به رابطه (۴) و شکل (۵) با یافتن طول موثر اولیه مناسب تیر یکسرگردار ( $l_i$ ) به همراه سفتی فنر کششی مناسب ( $k_s$ ) به دست می‌آید. با تغییر ابعاد هندسی مدل، مقدار  $a$  ایده‌آل عوض می‌شود که می‌توان آن را در زمان کمی با تکرار مراحل و ترسیم نموداری مشابه به نمودار شکل (۵) برای ابعاد هندسی جدید بدست آورد. بنابراین این روش یک نقطه بهینه موضعی را برای هر مقدار ابعاد هندسی برای پارامترهای مدل برداشت‌کننده انرژی، پیدا می‌کند که در آن پهنای باند عملکرد مطلوب مدل بزرگتر می‌شود.

## ۸- نتیجه‌گیری

هدف اصلی این پروژه، مدل‌سازی و استخراج معادلات حاکم یک مدل برداشت‌کننده انرژی تایر مبتنی بر تیر یکسرگردار پیزوالکتریک با دو سطح مقطع نمایی در عرض و ضخامت برای کاربرد در سنسور TPMS است. مدل برداشت‌کننده انرژی پیشنهادی به گونه‌ای طراحی شده است که قابلیت تنظیم خودکار فرکانس رزونانس خود را با فرکانس چرخش چرخ در محدوده گسترده‌ای از سرعت‌های حرکت خودرو دارد، بنابراین مدل دارای ساختار غیر خطی می‌باشد. این ویژگی باعث شده است که مدل پیشنهادی برای محیط فرکانس تحریک متغیر همچون تایر مناسب باشد و بتواند در سرعت‌های مختلف حرکت خودرو به دلیل عملکرد نزدیک فرکانس رزونانس خود، توان بالایی را تولید نماید. با طراحی طول موثر اولیه ایده‌آل تیر یکسرگردار و طراحی مناسب سفتی فنر کششی، پهنای باند عملکرد مطلوب مدل افزایش می‌یابد. بنابراین با دانستن مقدار پارامترهای شکل هندسی مدل و یافتن طول موثر ایده‌آل برای تیر یکسرگردار، نقطه بهینه موضعی برای مدل برداشت‌کننده انرژی یافت می‌شود. نتایج بدست آمده از مدل برداشت‌کننده انرژی پیشنهادی نشان می‌دهد که در طول موثر اولیه مطلوب، میزان ولتاژ و توان متوسط مدل برداشت‌کننده انرژی در سرعت‌های بین یک تا ۱۵۱ کیلومتر بر ساعت به ترتیب ۰/۸۲ ولت و ۳/۵۱ میکرووات می‌باشد که مقادیر مناسبی برای استفاده در سنسور TPMS است. این پژوهش نشان داد امکان برداشت انرژی با استفاده از تیر با مقطع نمایی در عرض و ضخامت که می‌تواند با وزن کمتر و توان الکتریکی بیشتر طراحی شود میسر می‌گردد. معادلات استخراج شده در این مقاله راه را برای پژوهش‌های آتی هموار می‌سازد تا به کمک بهینه‌سازی چند هدفه، با یافتن بهترین مقادیر برای ابعاد هندسی مدل، اهداف افزایش ولتاژ و توان الکتریکی خروجی و کاهش وزن تیر یکسرگردار پیزوالکتریک را همزمان برآورده سازد.

## مراجع

[1] I. Rouf *et al.*, "Security and Privacy Vulnerabilities of {In-Car} Wireless Networks: A Tire Pressure Monitoring System Case Study," In *19th USENIX Security Symposium (USENIX Security 10)*, 2010. [Online]. Available: [https://www.usenix.org/legacy/event/sec10/tech/full\\_papers/Rouf.pdf](https://www.usenix.org/legacy/event/sec10/tech/full_papers/Rouf.pdf).

- [2] Y.-J. Wang, T.-Y. Chuang, and C. Lee, "Resonant Frequency Self-tunable Piezoelectric Cantilevers for Energy Harvesting and Disturbing Torque Absorbing," *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 285, pp. 25-34, 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2018.10.043>.
- [3] A. E. Kubba and K. Jiang, "A Comprehensive Study on Technologies of Tyre Monitoring Systems and Possible Energy Solutions," *Sensors*, Vol. 14, No. 6, pp. 10306-10345, 2014, doi: <https://doi.org/10.3390/s140610306>.
- [4] H. J. Chilabi *et al.*, "Rotational Piezoelectric Energy Harvesting: A Comprehensive Review on Excitation Elements, Designs, and Performances," *Energies*, Vol. 14, No. 11, p. 3098, 2021, doi: <https://doi.org/10.3390/en14113098>.
- [5] B. Wu, Y. Fang, and L. Deng, "Summary of Energy Collection Application in Vehicle Tire Pressure Monitoring System," In *Proceedings of the 2019 4th International Conference on Automation, Control and Robotics Engineering*, 2019, pp. 1-6, doi: <https://doi.org/10.1145/3351917.3351918>.
- [6] L. Li, J. Xu, J. Liu, and F. Gao, "Recent Progress on Piezoelectric Energy Harvesting: Structures and Materials," *Advanced Composites and Hybrid Materials*, Vol. 1, pp. 478-505, 2018, doi: <https://doi.org/10.1007/s42114-018-0046-1>.
- [7] M. Soleymaniha, M. B. Coskun, H. M. Nasrabadi, A. Alipour, and S. R. Moheimani, "Design, Fabrication and Characterization of Active Atomic Force Microscope Cantilever Arrays," In *2021 IEEE 34th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)*, 2021: IEEE, pp. 883-886, doi: <https://doi.org/10.1109/MEMS51782.2021.9375345>.
- [8] C. Bowen and M. Arafa, "Energy Harvesting Technologies for Tire Pressure Monitoring Systems," *Advanced Energy Materials*, Vol. 5, No. 7, p. 1401787, 2015, doi: <https://doi.org/10.1002/aenm.201401787>.
- [9] L. Wang and F. Yuan, "Vibration Energy Harvesting by Magnetostrictive Material," *Smart Materials and Structures*, Vol. 17, No. 4, p. 045009, 2008, doi: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/17/4/045009>.
- [10] H. Salmani, G. Rahimi, and S. Hosseini Kordkheili, "An Exact Analytical Solution to Exponentially Tapered Piezoelectric Energy Harvester," *Shock and Vibration*, Vol. 2015, 2015, doi: <https://doi.org/10.1155/2015/426876>.
- [11] D. K. Sahoo and A. K. Pandey, "Performance of Non-uniform Cantilever Based Piezoelectric Energy Harvester," *ISSS Journal of Micro and Smart Systems*, Vol. 7, pp. 1-13, 2018, doi: <https://doi.org/10.1007/s41683-018-0018-2>.
- [12] A. Keshmiri, N. Wu, and Q. Wang, "A New Nonlinearly Tapered FGM Piezoelectric Energy Harvester," *Engineering Structures*, Vol. 173, pp. 52-60, 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.081>.
- [13] A. H. Alameh, M. Gratuze, and F. Nabki, "Impact of Geometry on the Performance of Cantilever-based Piezoelectric Vibration Energy Harvesters," *IEEE Sensors Journal*, Vol. 19, No. 22, pp. 10316-10326, 2019, doi: <https://doi.org/10.1109/JSEN.2019.2932341>.

- [14] Y. Xiong, F. Song, and X. Leng, "A Piezoelectric Cantilever-Beam Energy Harvester (PCEH) with a Rectangular Hole in the Metal Substrate," *Microsystem Technologies*, Vol. 26, pp. 801-810, 2020, doi: <https://doi.org/10.1007/s00542-019-04608-8>.
- [15] K. Wang, B. Wang, Y. Gao, and J. Zhou, "Nonlinear Analysis of Piezoelectric Wind Energy Harvesters with Different Geometrical Shapes," *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 90, pp. 721-736, 2020, doi: <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01636-8>.
- [16] P. Hajheidari, I. Stiharu, and R. Bhat, "Performance of Tapered Cantilever Piezoelectric Energy Harvester Based on Euler–Bernoulli and Timoshenko Beam Theories," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 31, No. 4, pp. 487-502, 2020, doi: <https://doi.org/10.1177/1045389X19891526>.
- [17] L. Deng, J. Jiang, L. Zhou, D. Zhang, and Y. Fang, "Design and Simulation of a Frequency Self-tuning Vibration Energy Harvester for Rotational Applications," *Microsystem Technologies*, Vol. 27, pp. 2857-2862, 2021, doi: <https://doi.org/10.1007/s00542-020-05064-5>.
- [18] S. Kundu and H. B. Nemade, "Piezoelectric Vibration Energy Harvester with Tapered Substrate Thickness for Uniform Stress," *Microsystem Technologies*, Vol. 27, pp. 105-113, 2021, doi: <https://doi.org/10.1007/s00542-020-04922-6>.
- [19] A. Nisanth, K. Suja, and V. Seena, "Design and Optimization of MEMS Piezoelectric Energy Harvester for Low Frequency Applications," *Microsystem Technologies*, Vol. 27, No. 1, pp. 251-261, 2021, doi: <https://doi.org/10.1007/s00542-020-04944-0>.
- [20] S. Roundy, P. K. Wright, and J. M. Rabaey, "Energy Scavenging for Wireless Sensor networks," In *Norwell*: Springer New York, NY, 2003, pp. 45-4, <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-0485-6>.



## فهرست نمادهای انگلیسی

$m_1$	جرم تیر یکسرگیردار
$m_2$	جرم وزنه موجود در نوک تیر یکسرگیردار
$f$	طول گیره
$c$	طول سطح مقطع نمایی تیر یکسرگیردار
$e$	طول بعد از وزنه در تیر یکسرگیردار
$b$	عرض کوچک تیر یکسرگیردار
$h$	ضخامت کوچک تیر یکسرگیردار
$a_1$	طول جان وزنه موجود در نوک تیر یکسرگیردار
$b_1$	عرض جان وزنه موجود در نوک تیر یکسرگیردار
$h_1$	ضخامت جان وزنه موجود در نوک تیر یکسرگیردار
$b_2$	طول بال وزنه موجود در نوک تیر یکسرگیردار
$h_2$	عرض بال وزنه موجود در نوک تیر یکسرگیردار
$a_2$	ضخامت بال وزنه موجود در نوک تیر یکسرگیردار
$E$	مدول الاستیسیته تیر یکسرگیردار
$E_p$	مدول الاستیسیته پیزوالکتریک
$\rho_1$	چگالی تیر یکسرگیردار
$\rho_2$	چگالی وزنه موجود در نوک تیر یکسرگیردار
$d_{31}$	ضریب کرنش پیزوالکتریک
$l_e$	طول پیزوالکتریک
$b_e$	عرض پیزوالکتریک
$h_e$	ضخامت پیزوالکتریک
$R_1$	شعاع چرخ
$R_2$	شعاع رینگ تایر
$R_3$	مرکز جرم معادل جرم‌های $m_1$ و $m_2$ نسبت به مرکز چرخ
$l_i$	طول موثر اولیه تیر یکسرگیردار
$a$	طول موثر تیر یکسرگیردار
$P_c$	نیروی گریز از مرکز
$k_s$	سفتی فنر کششی
$I(\bar{x})$	ممان اینرسی سطحی تیر یکسرگیردار
$I_2$	ممان اینرسی دورانی وزنه نوک تیر حول محور دوران خودش
$I_t$	ممان اینرسی جرمی کل مدل برداشت‌کننده انرژی
$T_1$	انرژی جنبشی تیر یکسرگیردار

$T_2$	انرژی جنبشی وزنه موجود در نوک تیر
$T_3$	انرژی جنبشی چرخ
$U_1$	انرژی پتانسیل تیر یکسرگیردار
$U_2$	انرژی پتانسیل وزنه موجود در نوک تیر
$U_3$	انرژی پتانسیل چرخ
$L$	لاگرانژین
$R_e$	انرژی اتلافی مدل برداشت کننده انرژی
$C_e$	میرایی الکتریکی ناشی از اثر پیزوالکتریک
$C_m$	میرایی مکانیکی مدل
$C_t$	ثابت میرایی تعمیم یافته کلی مدل برداشت کننده انرژی
$Q_1$	نیروی خارجی تعمیم یافته
$A_1$ تا $A_{17}$	روابط مربوط به معادله دینامیکی مدل برداشت کننده انرژی
$V$	ولتاژ خروجی از مدل برداشت کننده انرژی
$P$	توان خروجی از مدل برداشت کننده انرژی

#### نمادهای یونانی

$\alpha_b$	ضریب باریک شوندگی در عرض تیر یکسرگیردار
$\alpha_h$	ضریب باریک شوندگی در ضخامت تیر یکسرگیردار
$\varepsilon_p$	ثابت دی الکتریک ماده پیزوالکتریک
$\theta$	زاویه چرخش چرخ نسبت به سیستم مختصات متحرک
$\theta$	زاویه انحنای تیر یکسرگیردار نسبت به سیستم مختصات متحرک
$\emptyset$	زاویه انحنای تیر یکسرگیردار نسبت به سیستم مختصات ثابت
$\omega_n$	فرکانس طبیعی مدل برداشت کننده انرژی

## Energy Harvesting with a Single Beam with Two Radial Sections under the Tire Rotation Excitation

**Mojtaba Momen**

M.Sc., Department of Automotive Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran  
mojtaba.momen1997@gmail.com

**Morteza Mollajafari**

Assistant Professor, Department of Automotive Engineering, Iran University of Science and Technology,  
Tehran, Iran  
mollajafari@iust.ac.ir

\*Corresponding author: **Salman Ebrahimejad**

Assistant Professor, Department of Automotive Engineering, Iran University of Science and Technology,  
Tehran, Iran  
ebrahimejad@iust.ac.ir

### Abstract

In this study, a piezoelectric cantilever beam energy harvester model with two exponential cross-sections in width and thickness, and a tip weight, was proposed for use in a tire pressure monitoring system (TPMS). The governing equations for energy harvesting were derived for the first time for an exponential cross-section beam under rotational tire excitation conditions, based on the Euler-Lagrange method and coupled with electrical relations. There are few studies that consider both the thickness and width of the beam as variables, and no theoretical research has been conducted on this model under rotational excitation of the tire. The results of this study showed that it is possible to harvest energy by using a beam with an exponential cross section in width and thickness that can be designed with less weight and more electrical power. In future research, the derived equations can be used for optimization to increase electrical power and reduce weight to find the optimal values of the model's geometric dimensions.

*Keywords:* Piezoelectric cantilever beam, Energy harvester, Tire pressure monitoring system, Exponential cross-section, Rotational excitation, Self-tuning resonance frequency