

# حلّ تحلیلی برای آنالیز کمانش پوسته استوانه ای مقارن محوری تحت بار محوری با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی

در این مقاله، بار کمانش پوسته‌ای استوانه‌ای مقارن محوری با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) به صورت تحلیلی تعیین می‌شود. برای توصیف سینماتیک پوسته، از روابط FSĐT و فن کارمن استفاده می‌شود. معادلات تعادل غیرخطی از اصل کار مجازی تعیین و با استفاده از تکنیک اغتشاشات به صورت تحلیلی حل می‌شوند. با استفاده از روش تعادل در مجاورت، معادلات پایداری استخراج و برای یافتن بار کمانش سازه به صورت تحلیلی حل می‌شوند. آثار ویژگی‌های هندسی روی نتایج توسط یک مطالعه پارامتریک بررسی می‌شوند. همچنین بار کمانش با استفاده از روش اجزای محدود تعیین و با حلّ تحلیلی مقایسه می‌شوند.

محمد رضا عباسی<sup>۱</sup>  
دانشجوی دکتری

مهدي قنّاد<sup>۲</sup>  
دانشیار

حامد قارونی<sup>۳</sup>  
دکتری

واژه‌های راهنما: تحلیل کمانش، پوسته استوانه‌ای، حلّ تحلیلی، نظریه تغییر شکل برشی، تکنیک اغتشاشات

## ۱- مقدمه

تحلیل کمانش پوسته، یکی از موضوعات مهم در طراحی مهندسی است. لورنز با استفاده از نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌ها، بار کمانش یک استوانه‌ی نازک را تحت بار محوری تعیین کرد. نظریه‌ی غیرخطی فن کارمن در ۱۹۴۱ ارائه شد [۱].

میشیلسن کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک تحت بار محوری را با استفاده از روابط فن کارمن و تسین محاسبه کرد [۲]. نچبار و هاف کمانش پوسته‌ی نازک با یک تکیه‌گاه آزاد را به وسیله‌ی نظریه‌ی خطی کلاسیک تعیین کردند [۳]. چن کمانش و پس کمانش پوسته‌های بیضی‌شکل را ارائه نمود [۴]. بار بحرانی کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای ساخته‌شده از نیکل توسط آل‌مروت و همکاران تعیین شد [۵].

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران،

[mohammad.reza.abbasi.2011@gmail.com](mailto:mohammad.reza.abbasi.2011@gmail.com)

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، کدپستی: ۳۶۱۹۹۵۱۶۱، صندوق پستی

۳۱۶، [mghannadk@shahroodut.ac.ir](mailto:mghannadk@shahroodut.ac.ir)

<sup>۳</sup> دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، [gharooni.hamed@gmail.com](mailto:gharooni.hamed@gmail.com)

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۵/۲۴، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۸/۱۲، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۱/۱۵

هاف و رهنفیلد حلّ شکل بسته برای مقدار بار بحرانی کلاسیک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک را به دست آوردند. آن‌ها برای این کار از معادلات خطی دائل بهره بردند [۶]. بررسی اثر شرایط مرزی بستر الاستیک روی کمانش، توسط کوبایاشی استخراج شد [۷]. میورا روشی برای بررسی نظری تغییرشکل کمانش ایزومتریک پوسته‌ی نازک استوانه‌ای معرفی نمود [۸]. بار بحرانی پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک بر اساس فرضیه‌ی کیرشلف-لوو و به صورت خطی توسط هارت اسمیت محاسبه شد [۹]. فاینشتاین و همکاران به طور تجربی، بار کمانش را برای پوسته‌های بیضی‌شکل با انتهای ثابت پیدا کردند [۱۰].

نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یک توسط ردی و چاندراشخارا، به منظور کاربرد در پوسته‌های ضخیم ارائه شد [۱، ۱۱، ۱۲]. لرد و همکاران روش عددی مبتنی بر تجزیه‌ی طیفی گالرکین با ارائه حل‌های هموکلینیک در معادلات فُن کارمن-دائل به دست آوردند [۱۳]. فیلیپوف و همکاران کمانش موضعی لوله‌های مربعی با دیواره‌ی نازک تحت فشار محوری را به روش مجانبی مطالعه و نتایج را با نتایج عددی (FEM) مقایسه کردند [۱۴]. چون و کالادین برای بررسی کمانش موضعی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک از روش عددی اجزای محدود غیرخطی و روش تجربی استفاده کردند [۱۵]. بلاندزی و ماگنوک‌کی پایداری پوسته‌های استوانه‌ای با نیروی محوری ثابت و متغیر را بررسی کردند [۱۶]. ارژنگ پی و همکاران از روش عددی محلی پتروف-گالرکین بدون مش (MLPG) برای مطالعه‌ی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای همسانگرد تحت بار محوری استفاده کردند. آن‌ها معادلات جابه‌جایی را بر اساس نظریه‌ی دائل و FSDT به دست آوردند [۱۷].

بر اساس نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی بالا و به صورت تحلیلی، استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری FGM با تغییرات توانی خواص تحت فشار یکنواخت داخلی و یا خارجی توسط قناد و قارونی بررسی شد و نتایج آن با نتایج حاصل از روش اجزای محدود مقایسه شدند [۱۸]. قناد و همکاران پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم با ضخامت متغیر FGM تحت فشار داخلی را با استفاده از FSDT و تکنیک اغتشاشات به صورت تحلیلی بررسی و نتایج حاصل از آن را با نتایج حاصل از روش اجزای محدود مقایسه کردند [۱۹]. براساس نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی سوم (TSDT) استوانه‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات نمایی خواص مواد توسط قناد و قارونی بررسی شد [۲۰]. طاهر و ماندل بار کمانش پوسته‌های استوانه‌ای نازک تحت فشار محوری را با استفاده از شبکه‌ی عصبی مصنوعی پیش‌بینی نمودند [۲۱]. پایداری پوسته‌ی استوانه‌ای از روابط خطی پوسته‌ی جدار نازک و معیار انرژی توسط تودچوک مورد مطالعه قرار گرفت [۲۲]. ایفایفونمی و همکاران کمانش پوسته‌های مخروطی فولادی تحت فشار محوری و بارگذاری حرارتی را به صورت عددی و روش تجربی بررسی کردند [۲۳]. به‌وسیله‌ی شبکه‌ی عصبی مصنوعی، بار کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک تحت بار محوری توسط ماندل و همکاران تعیین شد [۲۴]. اوکین حلّی با استفاده از نتایج تحلیل عددی برای بررسی کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای ارائه داد [۲۵]. لی و کیم استحکام نهایی پوسته‌ی استوانه‌ای با نقص هندسی اولیه تحت فشار محوری را با روش اجزای محدود غیرخطی پیش‌بینی نمودند [۲۶].

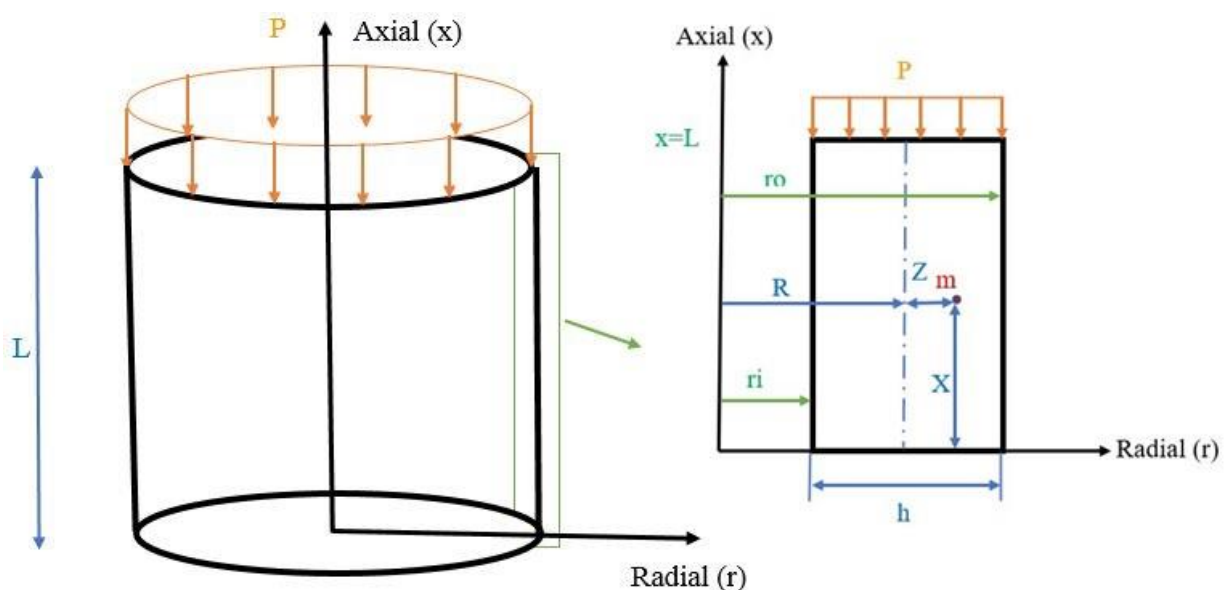
اکثر پژوهشگران از روش‌های عددی یا تجربی برای تعیین بار کمانش پوسته‌ها به‌ویژه در حالت غیرخطی استفاده کردند. برخی از آن‌ها نیز از روش‌های تحلیلی مبتنی بر توابع تقریبی مانند سری فری‌بینیوس استفاده کرده‌اند. روش‌های تحلیلی معمولاً برای مسائل خطی و نظریه‌های پوسته‌ی کلاسیک استفاده شده است.

در این مقاله، یک حلّ تحلیلی برای یافتن بار کماتش پوسته‌ی استوانه‌ای متقارن محوری تحت بار محوری ارائه شده است. معادلات حاکم بر اساس FSDT با اثر کرنش نرمال عرضی و با در نظر گرفتن روابط سینماتیکی غیرخطی فن کارمن و قانون هوک استخراج می‌شوند. معادلات تعادل، دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی جفت‌شده با ضرایب ثابت هستند. معادلات پایداری از معادلات تعادل با روش تعادل در مجاورت<sup>۱</sup> استخراج شده و حلّ تحلیلی با نتایج روش اجزای محدود مقایسه می‌شوند. این روش برای تعیین بار کماتش برای داده‌های ورودی مختلف بسیار سریع بوده و دارای حساسیت بسیار مناسبی برای تحلیل است. در موارد بررسی شده مشاهده می‌شود، با اعمال تغییرات در خصوصیات هندسی (طول، شعاع و ضخامت) می‌توان بار کماتش را افزایش داد.

## ۲- معادلات تعادل

یک پوسته‌ی استوانه‌ای با طول  $L$ ، شعاع متوسط  $R$ ، شعاع داخلی  $r_i$ ، شعاع خارجی  $r_o$  و ضخامت ثابت  $h$ ، تحت فشار محوری یکنواخت  $P$  قرار می‌گیرد. مختصات شعاعی و محوری یک نقطه روی مقطع طولی یک استوانه‌ی متقارن به ترتیب با  $r$  و  $x$  تعریف می‌شوند (شکل (۱)) و  $r=R+z$  که  $z$  فاصله از سطح میانی اندازه‌گیری می‌شود. با در نظر گرفتن FSDT برای یک حالت متقارن محور، میدان جابه‌جایی به صورت معادله (۱) در نظر گرفته می‌شوند.

$$\begin{aligned} U_x(x, z) &= u(x) + z\varphi(x) \\ U_z(x, z) &= w(x) + z\psi(x) \\ U_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$



شکل ۱- الگووار پوسته‌ی استوانه‌ای و مقطع طولی آن

<sup>1</sup> Adjacent criterion

که در آن  $U_x(x,z)$  جابه‌جایی محوری،  $U_z(x,z)$  جابه‌جایی شعاعی،  $U_\theta$  جابه‌جایی محیطی،  $u(x)$ ،  $w(x)$ ،  $\varphi(x)$  و  $\psi(x)$  توابع مجهول بر حسب  $x$  هستند. با توجه به روابط سینماتیکی غیرخطی فن کارمن، روابط کرنش-جابه‌جایی برای جابه‌جایی‌های بزرگ به صورت معادله (۲) است [۱۲].

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_\theta = \frac{U_z}{r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad (2)$$

اصل کار مجازی بیان می‌کند  $\delta U = \delta W$ ، که در آن  $U$  و  $W$  به ترتیب انرژی کرنشی و کار خارجی هستند. برای یک پوسته‌ی الاستیک، انرژی کرنشی و کار خارجی انجام‌شده توسط بار محوری مانند روابط (۳) تعریف می‌شود.

$$U = \iiint \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) r d\theta dx dz \quad (1-3)$$

$$r = R + z; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \quad 0 \leq x \leq L; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

$$W_p = -\iint P U_x |_{x=L} r d\theta dz = -2\pi P h \left( uR + \frac{h^2}{12} \varphi \right) \quad (2-3)$$

که  $P$  فشار در  $x=L$  است. مواد همگن و همسانگرد هستند و  $E$  مدول الاستیسیته و نسبت پواسون  $\nu$ ، برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای ثابت است. طبق قانون هوک، روابط تنش-کرنش به صورت زیر فرض می‌شود.

$$\sigma_i = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_i + \nu(\varepsilon_j + \varepsilon_k)]; \quad \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}; \quad i \neq j \neq k \quad (4)$$

منتجه‌های تنش به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\{N_x, M_x, P_x\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{1, z, z^2\} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz; \quad \{N_\theta, M_\theta\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{1, z\} \sigma_\theta dz \quad (5)$$

$$\{Q_x, M_{xz}\} = \kappa \int_{-h/2}^{h/2} \{1, z\} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz; \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$

که در آن،  $\kappa$  ضریب تصحیح برشی است و در این مطالعه  $5/6$  در نظر گرفته شده است. معادلات تعادل و شرایط مرزی به صورت توابعی از نتیجه‌های تنش، با قرار دادن معادلات (۱) تا (۳) و معادله (۵) در اصل کار مجازی، به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
 eq1: R \frac{dN_x}{dx} &= 0 \\
 eq2: R \frac{dM_x}{dx} - RQ_x &= 0 \\
 eq3: R \frac{d}{dx} \left( N_x \frac{dw}{dx} + M_x \frac{d\psi}{dx} + Q_x (1 + \psi) \right) - N_\theta &= 0 \\
 eq4: R \frac{d}{dx} \left( N_x \frac{dw}{dx} + P_x \frac{d\psi}{dx} + M_{xz} \right) - M_\theta - RN_z (1 + \psi) - RQ_x \frac{dw}{dx} + R\psi \frac{dM_{xz}}{dx} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{۱-۶}$$

$$\begin{aligned}
 (R(N_x + Ph)\delta u)|_{x=L} - (RN_x \delta u)|_{x=0} &= 0 \\
 \left( R \left( M_x + \frac{Ph^3}{12} \right) \delta \varphi \right)|_{x=L} - (RM_x \delta \varphi)|_{x=0} &= 0 \\
 \left( R \left( N_x \frac{dw}{dx} + M_x \frac{d\psi}{dx} + Q_x (1 + \psi) \right) \delta w \right)|_{x=0}^{x=L} &= 0 \\
 \left( R \left( M_x \frac{dw}{dx} + P \frac{d\psi}{dx} + M_{xz} (1 + \psi) \right) \delta \psi \right)|_{x=0}^{x=L} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{۲-۶}$$

از شرط مرزی اول روابط (۲-۶) می‌توان رابطه (۷) را نتیجه گرفت.

$$N_x = -Ph \text{ at } x = L \tag{۷}$$

به عبارت دیگر، منتهجه تنش  $N_x$  ثابت است. معادلات تعادل (معادلات ۱-۶) شامل چهار معادله دیفرانسیل غیرخطی جفت‌شده با ضرایب ثابت است. با جایگذاری معادلات (۱) تا (۵) در معادلات (۶)، معادلات حاکم به‌عنوان توابع جابه‌جایی تعیین و شکل بی‌بعدی آن‌ها بعداً گزارش شده است. برای حلّ این معادلات، تبدیل آن‌ها به شکل بی‌بعد ضروری است. پارامترهای بی‌بعد به‌صورت زیر تعریف می‌گردند.

$$\begin{aligned}
 x^* = \frac{x}{L}; h^* = \frac{h}{h_0}; R^* = \frac{R}{r_0}; r_i^* = \frac{r_i}{r_0}; z^* = \frac{r_0}{h_0}; u^* = \frac{u}{h_0}; w^* = \frac{w}{h_0}; \varepsilon = \frac{h_0}{L} \\
 E^* = \frac{E}{E_0}; P^* = \frac{P}{\varepsilon E_0}; V = \varepsilon \frac{du^*}{dx^*}; m_1 = \ln \left( \frac{2R-h}{R} \right); m_2 = \ln \left( \frac{2R-h}{2R} \right); m_3 = \ln \left( \frac{2R+h}{R} \right)
 \end{aligned}
 \tag{۸}$$

در رابطه فوق  $r_0$  و  $h_0$  به ترتیب شعاع و ضخامت شاخص می‌باشند.  $L$  طول پوسته،  $(*)$  مخفف یک کمیت بی‌بعد و  $\varepsilon$  پارامتر بی‌بعد اغتشاشی کوچک است. با استفاده از پارامترهای بی‌بعد بالا و جایگذاری آن‌ها در معادلات تعادل (۶) و انتگرال‌گیری از معادله اول و در نظر گرفتن متغیر جدید  $X = x^*/\varepsilon$ ، شکل بی‌بعد معادلات به دست می‌آیند. این معادلات در پیوست (۱) گزارش شده و برای حلّ آن‌ها از روش بسط مستقیم تکنیک اغتشاشات استفاده شده است [۲۷]. سری یکنواخت (۹) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} V^* &= \varepsilon V_0^* + \varepsilon^2 V_1^*; & \varphi &= \varepsilon \varphi_0 + \varepsilon^2 \varphi_1 \\ w^* &= \varepsilon w_0^* + \varepsilon^2 w_1^*; & \psi &= \varepsilon \psi_0 + \varepsilon^2 \psi_1 \end{aligned} \quad (9)$$

با جایگزینی معادلات (۹) به شکل بی‌بعد معادلات و در نظر گرفتن عبارتهایی با مرتبه‌ی یکسان  $\varepsilon$ ، معادلات مرتبه‌ی صفر و یک به‌عنوان معادلات (۱۰) تعیین می‌شود. این معادلات دستگاهی متشکل از چهار معادله‌ی ناهمگن خطی جفت‌شده هستند و جواب کل آن‌ها حاصل جمع جواب‌های عمومی (همگن) و خصوصی است.

$$\text{zero-order: } [A_2] \frac{d^2 \{Y_0\}}{dX^2} + [A_1] \frac{d\{Y_0\}}{dX} + [A_0] \{Y_0\} = \{F_0\}; \{Y_0\} = \{V_0^* \quad \varphi_0 \quad w_0^* \quad \psi_0\} \quad (1-10)$$

$$\text{first-order: } [A_2] \frac{d^2 \{Y_1\}}{dX^2} + [A_1] \frac{d\{Y_1\}}{dX} + [A_0] \{Y_1\} = \{F_1\}; \{Y_1\} = \{V_1^* \quad \varphi_1 \quad w_1^* \quad \psi_1\} \quad (2-10)$$

ماتریس‌های  $[A_0]$ ،  $[A_1]$ ،  $[A_2]$ ، بردارهای  $\{F_0\}$  و  $\{F_1\}$  در پیوست (۲) گزارش شده است. حلّ عمومی معادلات مرتبه‌ی صفر (معادلات (۱-۱۰)) به صورت  $\{Y_0\}_g = \{V\} \exp(\lambda X)$  در نظر گرفته می‌شود که  $\lambda$  مقدار ویژه و  $\{V\}$  بردار ویژه مربوط به آن است. حلّ عمومی به صورت معادله (۱۱) به دست می‌آید.

$$\{Y_0\}_g = \sum_{i=1}^6 C_i \{V_i\} \exp(\lambda_i X) \quad (11)$$

که  $C_i$  ضرایب ثابت حلّ عمومی هستند. حلّ خصوصی برای معادلات مرتبه‌ی صفر را از طریق معادله (۱۲) می‌توان به دست آورد.

$$\{Y_0\}_p = [A_0]^{-1} \{F\} \quad (12)$$

حلّ کلی معادلات مرتبه‌ی صفر به صورت معادله (۱۳) است.

$$\{Y_0\} = \{Y_0\}_g + \{Y_0\}_p \quad (13)$$

با محاسبه  $V_0^*$ ، از طریق معادله (۱۴)  $u_0^*$  به دست می‌آید.

$$u_0^* = \int V_0^* dx^* + C_7 \quad (14)$$

با جایگذاری شرایط مرزی، ضرایب  $C_i$  و به تبع آن  $\varphi_0, u_0^*, w_0^*$  و  $\psi_0$  تعیین می‌شوند. با جایگزین کردن پاسخ حلّ مرتبه‌ی صفر در معادلات مرتبه‌ی یک (معادلات (۱۰-۲))، این معادلات ساده‌تر می‌شوند. از آنجایی که اجزای همگن این معادلات مانند معادلات مرتبه‌ی صفر است، حلّ عمومی این معادلات مشابه معادله (۱۱) است. اجزای غیرهمگن معادلات مرتبه‌ی یک شامل عبارات نمایی و چند جمله‌ای و توابعی از مولفه‌های  $\{Y_0\}$  هستند. حلّ خصوصی مربوط به بخش چند جمله‌ای به صورت معادله (۱۵) در نظر گرفته می‌شود.

$$\{Y_1\}_{p1} = \{B_1\} X + \{B_0\} \quad (15)$$

حلّ خصوصی بخش نمایی به صورت معادله (۱۶) است.

$$\{Y_1\}_{p2} = \sum_i (\{C_2\}_i X^2 + \{C_1\}_i X + \{C_0\}_i) \exp(\lambda_i X) + \sum_j \{D\}_j \exp(n_j X) \quad (16)$$

که در آن  $\lambda_i$  مقدار ویژه حلّ عمومی هست. بردارهای  $\{B_0\}, \{B_1\}, \{C_0\}, \{C_1\}, \{C_2\}$  و  $\{D\}$  با جایگذاری معادلات (۱۵) و (۱۶) در معادلات (۱۰-۲) تعیین می‌شوند. حلّ کلی معادلات مرتبه‌ی یک به شکل معادله (۱۷) است.

$$\{Y_1\} = \{Y_1\}_g + \{Y_1\}_{p1} + \{Y_1\}_{p2} \quad (17)$$

با محاسبه  $V_1^*$ ، مشابه معادله (۱۴)  $u_1^*$  به دست می‌آید. با اعمال شرایط مرزی در حلّ کلی، مقادیر ضرایب  $C_i$  به دست می‌آیند. عبارات  $\varphi_1, u_1^*, w_1^*$  و  $\psi_1$  محاسبه می‌شوند. با استفاده از معادلات (۹)  $\varphi, u, w$  و  $\psi$  به دست می‌آیند و به وسیله‌ی معادلات (۱)،  $U_x$  و  $U_z$  تعیین می‌شوند.

### ۳- معادلات پایداری

برای استخراج معادلات پایداری از روش تعادل در مجاورت استفاده می‌شود. براساس این روش معادلات پایداری با استفاده از معادلات تعادل و حلّ آن‌ها که در قسمت قبل توضیح داده شد، استخراج می‌شوند. برای این منظور جابه‌جایی‌ها و رشد کوچک در جابه‌جایی‌ها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱].

$$V^* = V_e^* + V_s^*; \quad \varphi = \varphi_e + \varphi_s; \quad w^* = w_e^* + w_s^*; \quad \psi = \psi_e + \psi_s \quad (18)$$

که در آن پارامترهای با اندیس  $e$  بیانگر یک لحظه قبل از کمانش و در حالت تعادل هستند که معادلات تعادل را برآورده می‌کنند و پارامترهای با اندیس  $s$  نشان‌دهنده افزایش‌های کوچک بعد از کمانش هستند. با جایگذاری روابط بالا در معادلات تعادل و با حذف عبارات غیرخطی به دلیل کوچک بودن، معادلات بی‌بعد پایداری

به دست می‌آید که در پیوست (۳) آمده است. این معادلات، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل همگن خطی جفت شده با ضرایب متغیر هستند به شکل ماتریسی زیر نشان داده شده است.

$$[B_2] \frac{d^2 \{Y_s\}}{dX^2} + [B_1] \frac{d\{Y_s\}}{dX} + [B_0] \{Y_s\} = \{0\}; \quad \{Y_s\} = \{V_s^* \quad \varphi_s \quad w_s^* \quad \psi_s\}^T \quad (19)$$

که  $[B_0]$ ،  $[B_1]$  و  $[B_2]$  ماتریس‌های ضرایب در معادلات می‌باشند. این ماتریس‌ها متغیر بوده و بامقدار متوسط آن‌ها جایگزین می‌شود. برای تعیین حلّ عمومی معادله (۱۹)، حل به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\{Y_s\} = \{V\} \exp(\alpha X) \quad (20)$$

که در آن  $\{V\}$  بردار ویژه و  $\alpha$  مقدار ویژه است. با جایگذاری این حل، دستگاه معادلات جبری (۲۱) استخراج می‌شود.

$$[ax] = [B_2] \alpha^2 + [B_1] \alpha + [B_0] \quad (21)$$

با برابر صفر قرار دادن دترمینان این معادله، معادله مشخصه حاصل می‌شود. ریشه‌های این معادله، مقادیر ویژه هستند که توابعی از  $P_{cr}^*$  می‌باشند. برای هر مقدار ویژه، بردار ویژه مربوطه وجود دارد. حلّ عمومی به صورت زیر است.

$$\{Y_s\} = \sum_{i=1}^6 C_i \{V\}_i \exp(\alpha_i X) \quad (22)$$

با اعمال شرایط مرزی یک دستگاه معادلات جبری به صورت زیر به دست می‌آید.

$$[bx]_{6 \times 6} \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} = \{0\}_{6 \times 1} \quad (23)$$

که اجزای ماتریس  $[bx]$  توابعی از  $P_{cr}^*$  و  $\alpha$  هستند. با برابر صفر قرار دادن دترمینان  $[bx]$ ، یک معادله حاصل می‌شود که یک تابع جبری پیچیده بر حسب  $P_{cr}^*$  است. ریشه‌ی این معادله، بار کمانش بی‌بعد است که با استفاده از روش تصنیف<sup>۱</sup> و با در نظر گرفتن شرایط مرزی به دست می‌آید.

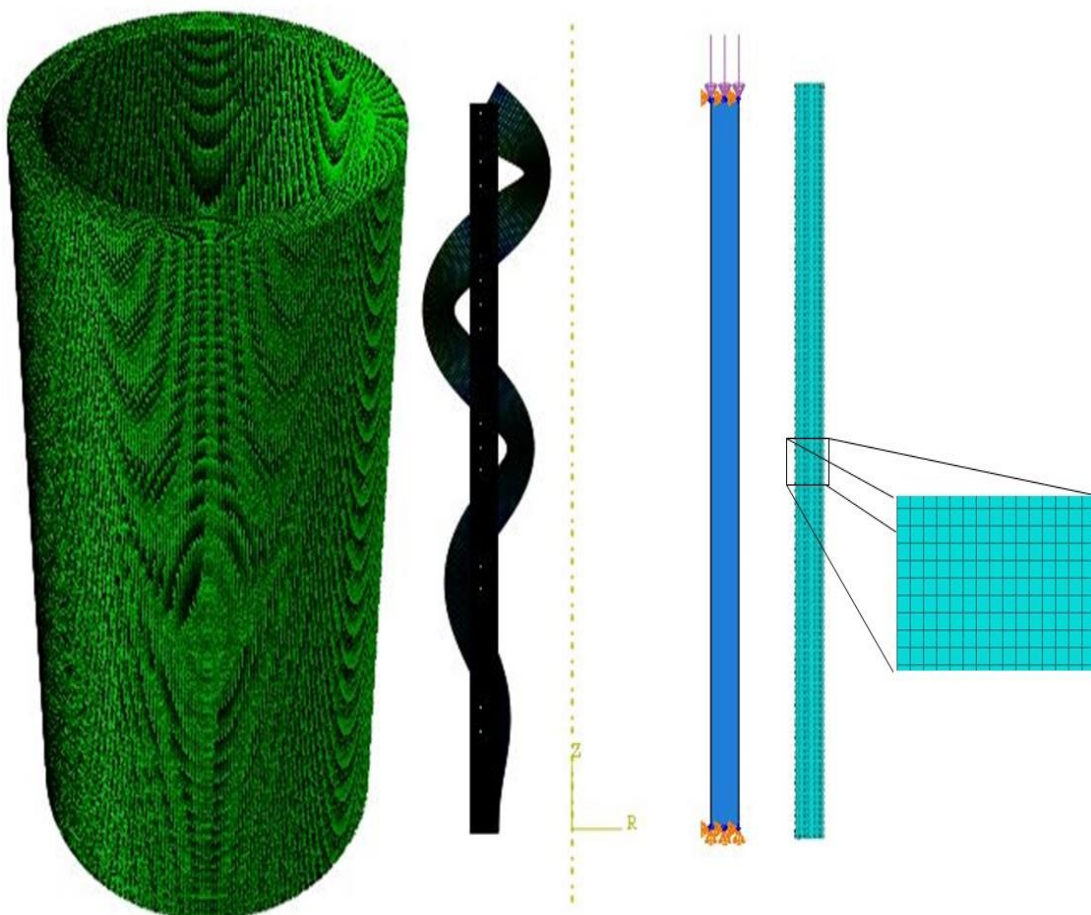
<sup>1</sup> Bisection method

## ۴- حلّ عددی

از نرم‌افزار DS SIMULIA Suite 2022 (Abaqus/CAE 2022) برای تعیین بار کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای استفاده شده است. برای تحلیل المان چهارضلعی متقارن محوری هشت گرهی CAX8 به کار گرفته شده است. اندازه مش با آزمون و خطا انتخاب شد تا حساسیت نتایج به تغییرات اندازه مش حذف شود. شرایط مرزی پوسته در  $X=0$  گیردار و در  $X=1$  حرکت در راستای محور آزاد است. خواص پوسته در جدول (۱) آمده است. در شکل (۲) الگوی مش، بارگذاری، شرایط مرزی و پوسته‌ی کمانه‌شده نشان داده شده است.

جدول ۱- مشخصات پوسته

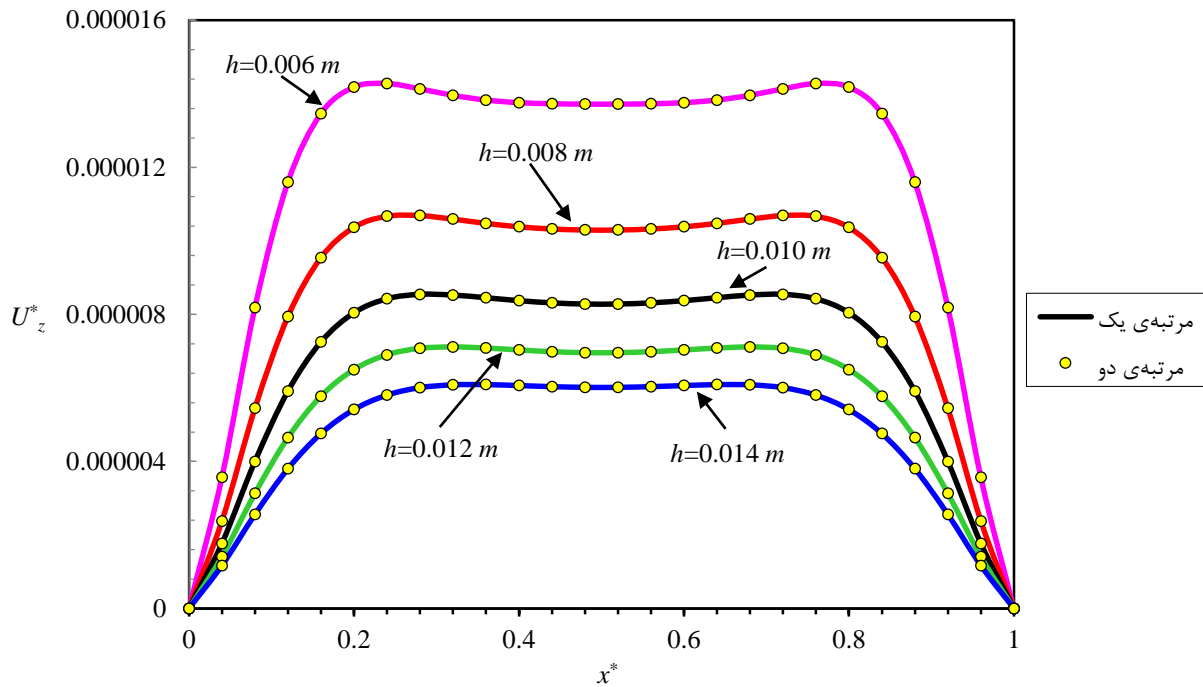
| ویژگی           | مقدار                |
|-----------------|----------------------|
| طول             | $L=0.2 \text{ m}$    |
| شعاع داخلی      | $r_i=0.05 \text{ m}$ |
| شعاع خارجی      | $r_o=0.06 \text{ m}$ |
| ضریب پواسون     | $\nu=0.3$            |
| مدول الاستیسیته | $E=200 \text{ GPa}$  |



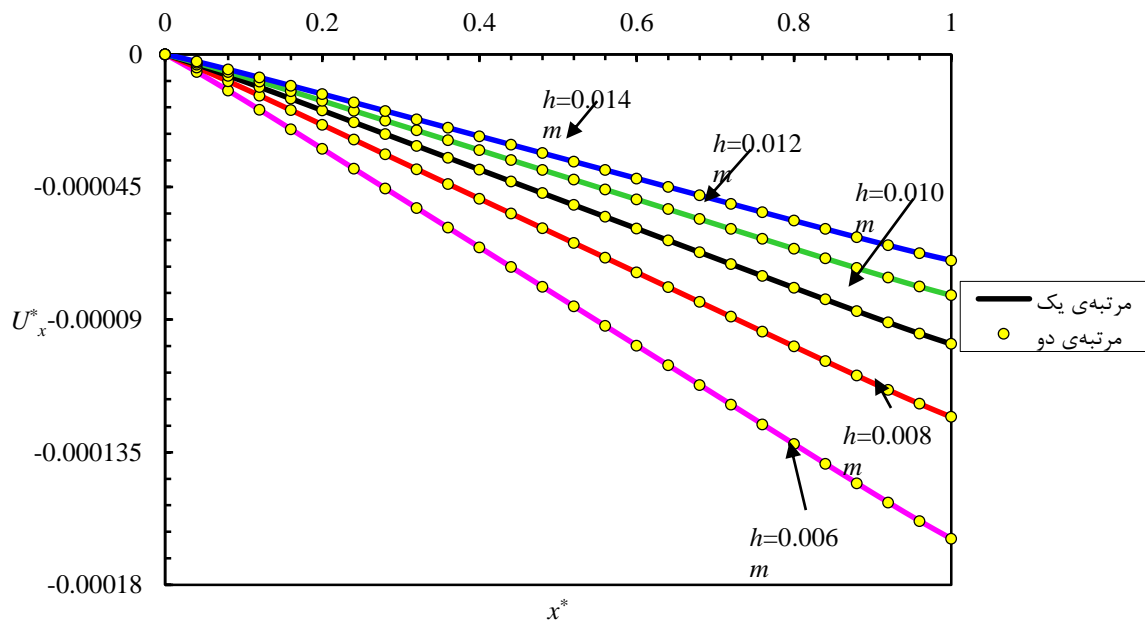
شکل ۲- الگوی مش، بارگذاری، شرایط مرزی و پوسته‌ی کمانه‌شده

### ۵- بحث و نتایج

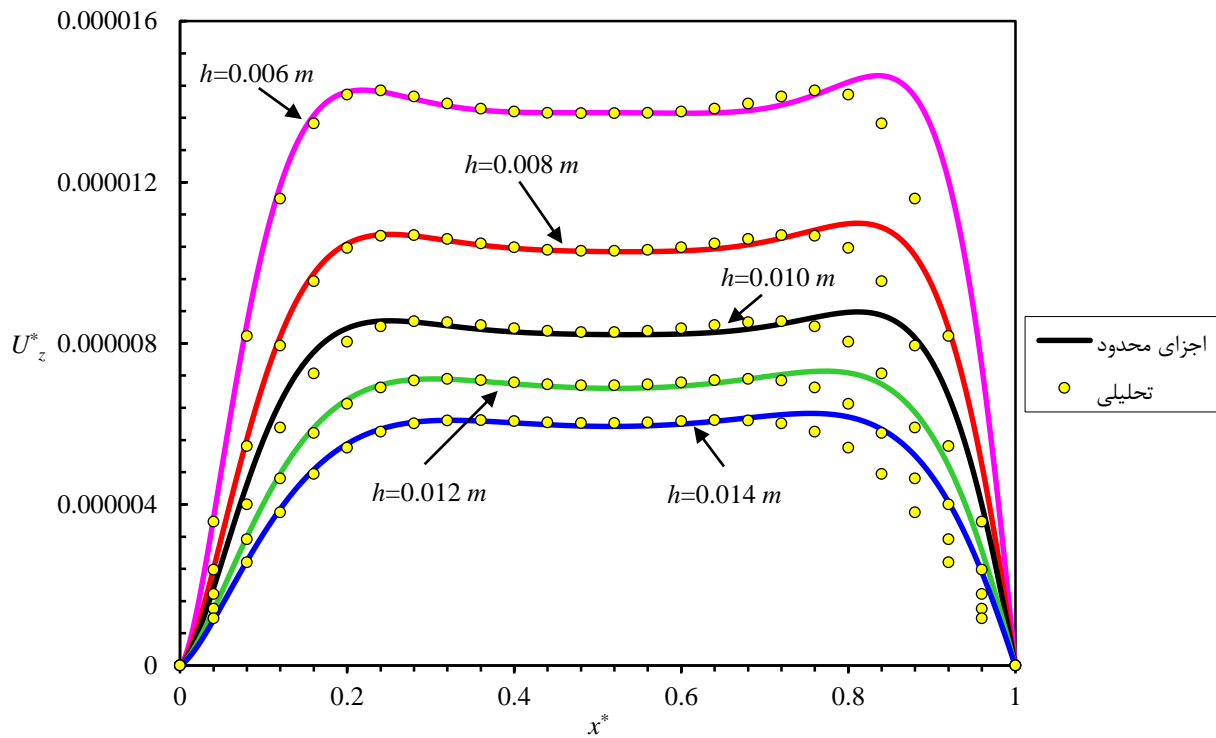
بار کماتش پوسته‌ای استوانه‌ای به صورت تحلیلی تعیین و برنامه‌ای برای انجام محاسبات با استفاده از نرم‌افزار ریاضی Maple 2015 تهیه شده است. ابتدا صحت حل بررسی شد. در تمامی موارد، مدول الاستیسیته و نسبت پواسون به ترتیب  $E=200 \text{ GPa}$ ،  $\nu=0.3$  است.



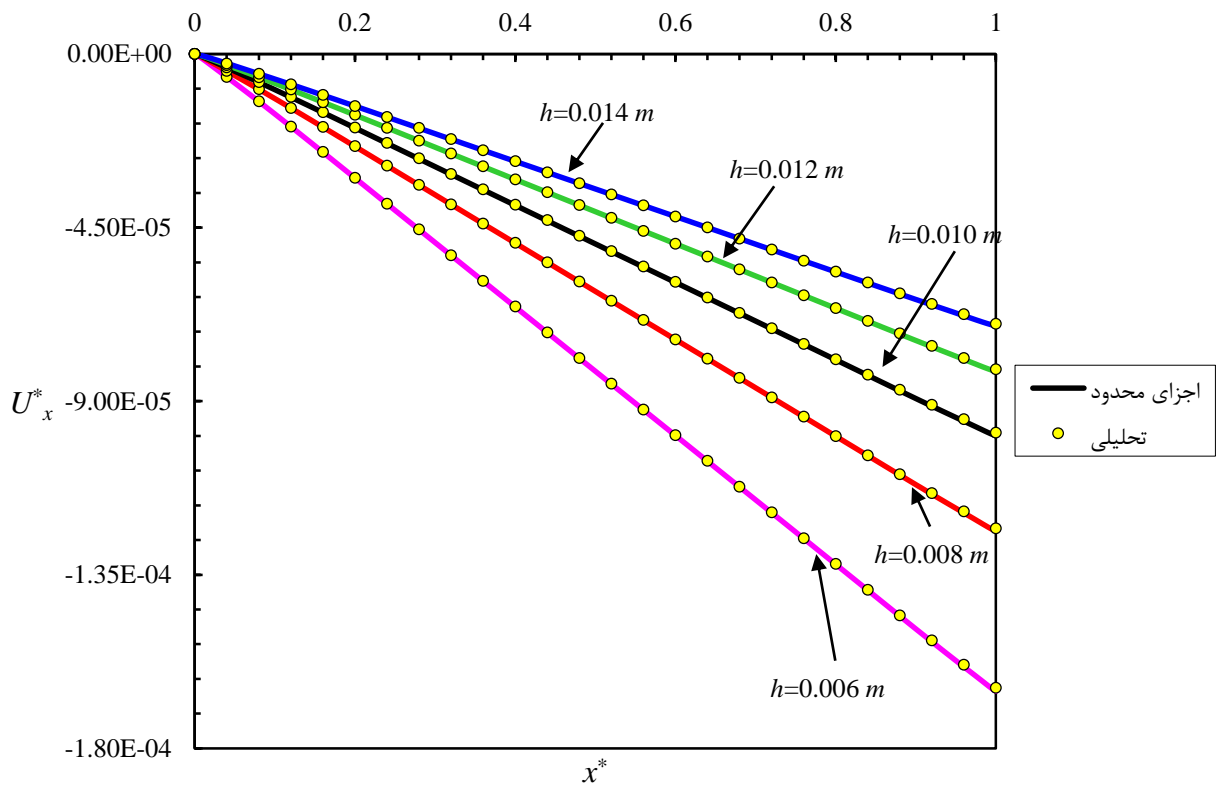
شکل ۳- مقایسه‌ی جابه‌جایی بی‌بعد شعاعی مرتبه‌ی یک و دو تحلیلی پوسته‌های همگن ( $L=0.2 \text{ m}$ ,  $P=1e6 \text{ MPa}$ )  
( $z=0$ ,  $R=0.055 \text{ m}$ )



شکل ۴- مقایسه‌ی جابه‌جایی بی‌بعد محوری مرتبه‌ی یک و دو تحلیلی پوسته‌های همگن ( $L=0.2 \text{ m}$ ,  $P=1e6 \text{ MPa}$ )  
( $z=0$ ,  $R=0.055 \text{ m}$ )



شکل ۵- مقایسه‌ی جابه‌جایی بی‌بعد شعاعی عددی و مرتبه‌ی دو تحلیلی پوسته‌های همگن ( $L=0.2\text{ m}$ ,  $P=1\text{e}6\text{ MPa}$ )  
( $z=0$ ,  $R=0.055\text{ m}$ )



شکل ۶- مقایسه‌ی جابه‌جایی بی‌بعد محوری عددی و مرتبه‌ی دو تحلیلی پوسته‌های همگن ( $L=0.2\text{ m}$ ,  $P=1\text{e}6\text{ MPa}$ )  
( $z=0$ ,  $R=0.055\text{ m}$ )

با توجه به معادلات (۱)، (۹) و (۱۴)، در شکل‌های (۳) و (۴) جابه‌جایی‌های بی‌بعد مرتبه‌ی یک و دو به ترتیب شعاعی و محوری و در شکل‌های (۵) و (۶) جابه‌جایی‌های بی‌بعد اجزای محدود و مرتبه‌ی دو تحلیلی به ترتیب شعاعی و محوری بر حسب متغیر بی‌بعد  $x^*$  با ضخامت‌های مختلف  $h$  نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که نتایج حلّ مرتبه‌ی یک و دو تحلیلی معادلات تعادل به سرعت همگرا می‌شوند و نیازی به مرتبه‌های بالاتر نیست. مرتبه‌ی دو برای این مطالعه مناسب بوده و سایر نتایج با این مرتبه گزارش شده است. همچنین نتایج حلّ معادلات تعادل به روش‌های تحلیلی و اجزای محدود تطابق خوبی با یکدیگر دارند. علاوه بر این، جابه‌جایی شعاعی نسبت به جابه‌جایی محوری بسیار کم است.

برای تعمیم نتایج، فشار بحرانی به صورت بی‌بعد و از طریق رابطه (۸) تعریف می‌شود.

در جدول (۲)، بار کمانش بی‌بعد پوسته‌های همگن با ضخامت ثابت و طول‌های مختلف  $L$  که از روش‌های تحلیلی، اجزای محدود و کلاسیک (لورنز) [۲۸] به دست آمده، نشان داده شده است. در نظریه‌ی کلاسیک بار کمانش از رابطه (۲۴) به دست می‌آید. مشاهده می‌شود که نتایج حلّ تحلیلی تطابق خوبی با اجزای محدود دارد. همان‌گونه که در بخش (۴) نیز بیان شد، در حلّ اجزای محدود از حالت متقارن محوری استفاده شده است. همچنین با افزایش طول، اختلاف نتایج نظریه‌ی کلاسیک از روش‌های تحلیلی و اجزای محدود افزایش می‌یابد. در محدوده‌ی پارامترهای مورد مطالعه، با کاهش تقریباً ۵۷ درصدی طول، بار کمانش بی‌بعد تقریباً ۵۶ درصد کاهش می‌یابد.

$$P_{cr} = 0.605 \frac{Eh}{R} \quad (24)$$

جدول (۳) اثر تغییرات شعاع  $R$  بر بار کمانش بی‌بعد محاسبه‌شده به روش‌های عددی، تحلیلی و نظریه‌ی کلاسیک را نشان می‌دهند. در محدوده‌ی پارامترهای مورد مطالعه، با کاهش تقریباً ۵۳ درصدی شعاع، بار کمانش بی‌بعد تقریباً ۱۰۰ درصد افزایش می‌یابد. همچنین با کاهش شعاع، اختلاف نتایج نظریه‌ی کلاسیک از اجزای محدود افزایش می‌یابد.

در جدول (۴) اثر تغییرات ضخامت  $h$  بر بار کمانش بی‌بعد محاسبه‌شده به روش‌های عددی، تحلیلی و نظریه‌ی کلاسیک ارائه شده است. در محدوده‌ی پارامترهای مورد مطالعه، افزایش تقریباً ۱۳۳ درصدی ضخامت موجب کاهش تا حدود ۵/۵ درصدی بار کمانش بی‌بعد می‌شود. مشاهده می‌شود که روش ارائه‌شده همخوانی خوبی با نتایج اجزای محدود، حتی برای پوسته‌های ضخیم دارد. همچنین با افزایش ضخامت، اختلاف نتایج نظریه‌ی کلاسیک از اجزای محدود افزایش می‌یابد.

**جدول ۲-** تأثیر تغییرات طول بر بار کمانش بی‌بعد حلّ عددی و تحلیلی ( $R=0.055 m, h=0.01 m$ )

| $L (m)$ | عددی   | تحلیلی | نظریه‌ی کلاسیک |
|---------|--------|--------|----------------|
| ۰/۱۲    | ۱/۳۰۰۵ | ۱/۳۱۵۸ | ۱/۳۲۰۰         |
| ۰/۱۶    | ۱/۷۰۸۹ | ۱/۷۳۶۱ | ۱/۷۶۰۰         |
| ۰/۲۰    | ۲/۱۲۲۰ | ۲/۱۵۸۴ | ۲/۲۰۰۰         |
| ۰/۲۴    | ۲/۵۳۷۵ | ۲/۵۷۹۴ | ۲/۶۴۰۰         |
| ۰/۲۸    | ۲/۹۵۴۳ | ۳/۰۰۰۸ | ۳/۰۸۰۰         |

جدول ۳- تأثیر تغییرات شعاع بر بار کمانش بی‌بعد حلّ عددی و تحلیلی ( $L=0.20 m$   $h=0.01 m$ )

| نظریه‌ی کلاسیک | تحلیلی | اجزای محدود | $R (m)$ |
|----------------|--------|-------------|---------|
| ۳/۴۵۷۱         | ۳/۴۲۳۲ | ۳/۲۳۷۷      | ۰/۰۳۵   |
| ۲/۶۸۸۹         | ۲/۷۰۴۰ | ۲/۵۶۲۷      | ۰/۰۴۵   |
| ۲/۲۰۰۰         | ۲/۱۵۸۴ | ۲/۱۲۲۰      | ۰/۰۵۵   |
| ۱/۸۶۱۵         | ۱/۹۶۳۳ | ۱/۸۱۵۷      | ۰/۰۶۵   |
| ۱/۶۱۳۳         | ۱/۷۱۰۴ | ۱/۵۸۵۱      | ۰/۰۷۵   |

جدول ۴- تأثیر تغییرات ضخامت بر بار کمانش بی‌بعد حلّ عددی و تحلیلی ( $R=0.055 m$   $L=0.20 m$ )

| نظریه‌ی کلاسیک | تحلیلی | اجزای محدود | $h (m)$ |
|----------------|--------|-------------|---------|
| ۲/۲۰۰۰         | ۲/۳۵۷۹ | ۲/۱۵۴۳      | ۰/۰۰۶   |
| ۲/۲۰۰۰         | ۲/۳۰۴۲ | ۲/۱۳۹۲      | ۰/۰۰۸   |
| ۲/۲۰۰۰         | ۲/۱۵۸۴ | ۲/۱۲۲۰      | ۰/۰۱۰   |
| ۲/۲۰۰۰         | ۲/۲۳۵۸ | ۲/۱۰۸۶      | ۰/۰۱۲   |
| ۲/۲۰۰۰         | ۲/۲۲۸۱ | ۲/۰۹۳۲      | ۰/۰۱۴   |

## ۶- نتیجه‌گیری

یک حلّ تحلیلی برای یافتن بار کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای متقارن محوری با ضخامت ثابت تحت بار محوری پیشنهاد شد. معادلات حاکم با استفاده از FSĐT و فنّ کارمن استخراج شد. می‌توان برای انجام این محاسبات، یک برنامه ریاضی در محیط Maple تهیه کرد. خصوصیات هندسی (شعاع متوسط، ضخامت و طول پوسته) فقط به‌عنوان ورودی برای برنامه تهیه شده است. در این روش معادلات تعادل که دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی جفت‌شده هستند، با استفاده از تکنیک اغتشاشات حل شدند. معادلات پایداری که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی جفت‌شده با ضرایب متغیر هستند، به‌صورت تحلیلی حل شدند و فشار بحرانی به‌دست آمد. با انجام یک مطالعه‌ی پارامتری به بررسی تأثیر تغییر ویژگی‌های هندسی پوسته روی بار کمانش پرداخته شد. این حلّ تحلیلی همگرایی سریع و دقت خوبی دارد. به‌دست آوردن بار کمانش با روش ارائه‌شده آسان‌تر و سریع‌تر از روش اجزای محدود است، زیرا نیازی به ایجاد مدل اجزای محدود و مش‌بندی آن ندارد.

## مراجع

[1] D.O. Brush, B.O. Almroth, and J. Hutchinson, "*Buckling of Bars, Plates, and Shells*", New York: McGraw-Hill, 1975, <https://doi.org/10.1115/1.3423755>.

[2] H.F. Michielsen, "The Behavior of Thin Cylindrical Shells after Buckling under Axial Compression", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 15, No. 12, pp. 738-744, 1948, <https://doi.org/10.2514/8.11706>.

- [3] W. Nachbar, and N.J. Hoff, "The Buckling of a Free Edge of an Axially-compressed Circular Cylindrical Shell", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 20, No. 3, pp. 267-277, 1962, <https://doi.org/10.1090/qam/140215>.
- [4] Y.-N. Chen, "*Buckling and Postbuckling of an Oval Cylindrical Shell under Axial Compression*", Dissertation for the Ph.D. (Applied Mechanics), Polytechnic Institute of Brooklyn, Brooklyn: Polytechnic University Press, June 1964, <https://www.proquest.com/openview/a511b30c068f1291a82dedef7f748e0d/1.pdf?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y>.
- [5] B.O. Almroth, A.M. Holmes, and D.O. Brush, "An Experimental Study of the Buckling of Cylinders under Axial Compression: Test Program is Aimed at Determining the Causes of Discrepancy between Theoretical and Experimental Results for the Buckling Load of Axially Compressed Cylindrical Shells", *Experimental Mechanics*, Vol. 4, No. 9, pp. 263-270, 1964, <https://doi.org/10.1007/BF02323088>.
- [6] N.J. Hoff, and L.W. Rehfield, "Buckling of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells at Stresses Smaller than the Classical Critical Value", *ASME*, Vol. 32, No. 3, pp. 542-546, 1965, <https://doi.org/10.1115/1.3627256>.
- [7] S. Kobayashi, "The Influence of the Boundary Conditions on the Buckling Load of Cylindrical Shells under Axial Compression", NASA-CR-558, USA, 1966, <https://ntrs.nasa.gov/citations/19660024175>.
- [8] K. Miura, "Inextensional Buckling Deformations of General Cylindrical Shells", *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 5, pp. 966-968, 1968, <https://doi.org/10.2514/3.4651>.
- [9] L. Hart-Smith, "Buckling of Thin Cylindrical Shells under Uniform Axial Compression", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 12, No. 4, pp. 299-313, 1970, [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(70\)90084-6](https://doi.org/10.1016/0020-7403(70)90084-6).
- [10] G. Feinstein, B. Erickson, and J. Kempner, "Stability of Oval Cylindrical Shells: Experimental Investigation of Initial and Ultimate Buckling Loads of Fixed-end, Oval Cylindrical Shells under Axial Compression", *Experimental Mechanics*, Vol. 11, pp. 514-520, 1971, <https://doi.org/10.1007/BF02327691>.
- [11] C.R. Calladine, *Theory of Shell Structures*, New York: Cambridge University Press, 1989, <https://doi.org/10.1017/CBO9780511624278>.
- [12] M. Amabili, *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*, New York: Cambridge University Press, 2008, <https://doi.org/10.1017/CBO9780511619694>.
- [13] G.J. Lord, A.R. Champneys, and G.W. Hunt, "Computation of Homoclinic Orbits in Partial Differential Equations: An Application to Cylindrical Shell Buckling", *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 21, No. 2, pp. 591-619, 1999, <https://doi.org/10.1137/S1064827597321647>.
- [14] S. Filippov, E. Haseganu, and A. Smirnov, "Buckling Analysis of Axially Compressed Square Elastic Tubes with Weakly Supported Edges", *European Journal of Engineering*

*Mechanics*, Vol. 20, No. 1, pp. 13-20, 2000, <https://journals.ub.ovgu.de/index.php/techmech/article/view/1067>.

[15] Z. En-chun, and C.R. Calladine, "Buckling of Thin Cylindrical Shells under Locally Axial Compression", *Engineering Mechanics*, Vol. 20, No. 2, pp. 168-170, 2003, <https://www.engineeringmechanics.cn/en/article/id/3739>.

[16] E. Magnucka-Blandzi, and K. Magnucki, "Elastic Buckling of an Axially Compressed Open Circular Cylindrical Shell", *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, Vol. 4, No. 1, pp. 546-547, <https://doi.org/10.1002/pamm.200410254>.

[17] A. Arjangpay, M. Darvizeh, R. Ansari, and G. Zarepour, "Axial Buckling Analysis of an Isotropic Cylindrical Shell using the Meshless Local Petrov-Galerkin Method", *Computational Methods in Civil Engineering*, Vol. 2, No. 2, pp. 219-230, 2011, [https://cmce.guilan.ac.ir/article\\_903.html](https://cmce.guilan.ac.ir/article_903.html).

[18] M. Ghannad, and H. Gharooni, "Displacements and Stresses in Pressurized Thick FGM Cylinders with Varying Properties of Power Function Based on HSDT", *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 4, No. 3, pp. 237-251, 2012, <https://dorl.net/dor/20.1001.1.20083505.2012.4.3.2.6>.

[19] M. Ghannad, G.H. Rahimi, and M.Z. Nejad, "Elastic Analysis of Pressurized Thick Cylindrical Shells with Variable Thickness Made of Functionally Graded Materials", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 45, No. 1, pp. 388-396, 2013, <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.09.043>.

[20] M. Ghannad, and H. Gharooni, "Elastic Analysis of Pressurized Thick FGM Cylinders with Exponential Variation of Material Properties using TSDT", *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 12, No. 6, pp. 1024-1041, 2015, <https://doi.org/10.1590/1679-78251491>.

[21] Z. ul. R. Tahir, and P. Mandal, "Artificial Neural Network Prediction of Buckling Load of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression", *Engineering Structures*, Vol. 152, pp. 843-855, 2017, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.09.016>.

[22] V. Todchuk, "Stability of Cylindrical Shells", *Proceedings of the National Aviation University*, Vol. 76, No. 3, pp. 56-61, 2018, <http://dx.doi.org/10.18372/2306-1472.76.13156>.

[23] O. Ifayefunmi, M. Ismail, and M. Othman, "Buckling of Unstiffened Cone-cylinder Shells Subjected to Axial Compression and Thermal Loading", *Ocean Engineering*, Vol. 225, p. 108601, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.108601>.

[24] P. Mandal, M.T. Adil, and F. Naz, "Application of Artificial Neural Network to Predict Buckling Load of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression", *Engineering Structures*, Vol. 248, p. 113221, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113221>.

[25] A. Evkin, "Analytical Model of Local Buckling of Axially Compressed Cylindrical Shells", *Thin-Walled Structures*, Vol. 168, p. 108261, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.108261>.

[26] S. Li, and D. K. Kim, "Ultimate Strength Characteristics of Unstiffened Cylindrical Shell in Axial Compression", *Ocean Engineering*, Vol. 243, p. 110253, 2022, <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.110253>.

[27] A.H. Nayfeh, "Introduction to Perturbation Techniques", New York: John Wiley, 1993, <https://www.wiley.com/en-us/Introduction+to+Perturbation+Techniques-p-9783527618453>.

[28] S.P. Timoshenko, and J.M. Gere, "Theory of Elastic Stability", 2<sup>th</sup> Edition, New York: Dover Publications, 2009, <https://store.doverpublications.com/products/9780486472072>.

## فهرست نمادهای انگلیسی

|            |                  |
|------------|------------------|
| $[A_0]$    | ماتریس ضرایب     |
| $[A_1]$    | ماتریس ضرایب     |
| $[A_2]$    | ماتریس ضرایب     |
| $[B_0]$    | ماتریس ضرایب     |
| $[B_1]$    | ماتریس ضرایب     |
| $[B_2]$    | ماتریس ضرایب     |
| $C_i$      | ضرایب ثابت       |
| $E$        | مدول الاستیسیته  |
| $h$        | ضخامت پوسته      |
| $h_0$      | ضخامت شاخص       |
| $L$        | طول پوسته        |
| $N_x$      | منتجه‌ی تنش      |
| $N_z$      | منتجه‌ی تنش      |
| $N_\theta$ | منتجه‌ی تنش      |
| $M_x$      | منتجه‌ی تنش      |
| $M_{xz}$   | منتجه‌ی تنش      |
| $M_\theta$ | منتجه‌ی تنش      |
| $P$        | فشار محوری       |
| $P^*_{cr}$ | بار بحرانی کمانش |
| $P_x$      | منتجه‌ی تنش      |
| $Q_x$      | منتجه‌ی تنش      |
| $r$        | مختصات شعاعی     |
| $r_0$      | شعاع شاخص        |
| $r_i$      | شعاع داخلی پوسته |
| $r_o$      | شعاع خارجی پوسته |

|             |                                   |
|-------------|-----------------------------------|
| $R$         | شعاع متوسط پوسته                  |
| $U$         | انرژی کرنشی                       |
| $U(x)$      | مولفه‌ی جابه‌جایی محوری در FSDT   |
| $U_x(x, z)$ | جابه‌جایی محوری                   |
| $U_z(x, z)$ | جابه‌جایی شعاعی                   |
| $U_\theta$  | جابه‌جایی محیطی                   |
| $\{V\}$     | بردار ویژه                        |
| $W$         | کار نیروی خارجی                   |
| $W(x)$      | مولفه‌ی جابه‌جایی محوری در FSDT   |
| $x$         | مختصات محوری                      |
| $\{Y_0\}$   | حل کلی معادلات مرتبه‌ی صفر        |
| $\{Y_0\}_g$ | حل عمومی معادلات مرتبه‌ی صفر      |
| $\{Y_0\}_p$ | حل خصوصی معادلات مرتبه‌ی صفر      |
| $z$         | فاصله از سطح میانی پوسته          |
| *           | مخفف کمیت بی‌بعد                  |
| $e$         | مخفف یک لحظه قبل از کمانش         |
| $s$         | مخفف افزایش‌های کوچک بعد از کمانش |

### نمادهای یونانی

|                      |                                 |
|----------------------|---------------------------------|
| $\alpha$             | مقدار ویژه                      |
| $\gamma_{xy}$        | کرنش برشی                       |
| $\varepsilon$        | پارامتر بی‌بعد اغتشاشی کوچک     |
| $\varepsilon_x$      | کرنش محوری                      |
| $\varepsilon_z$      | کرنش شعاعی                      |
| $\varepsilon_\theta$ | کرنش محیطی                      |
| $\theta$             | مختصات محیطی                    |
| $\kappa$             | ضریب تصحیح برشی                 |
| $\lambda$            | مقدار ویژه                      |
| $\nu$                | نسبت پواسون                     |
| $\sigma_x$           | تنش محوری                       |
| $\sigma_z$           | تنش شعاعی                       |
| $\sigma_\theta$      | تنش محیطی                       |
| $\tau_{xz}$          | تنش برشی                        |
| $\varphi(x)$         | مولفه‌ی جابه‌جایی محوری در FSDT |
| $\psi(x)$            | مولفه‌ی جابه‌جایی محوری در FSDT |

### پیوست ۱- شکل بی بعد معادلات تعادل

$$eq1: \frac{E^* h^*}{(1+\nu)(-1+2\nu)} \left[ \frac{\nu w^*}{R^* z^*} + \frac{h^* \left(\frac{d\phi}{dX}\right) \nu}{12 R^* z^*} - \frac{\left(\frac{dw^*}{dX}\right)^2}{2} - V^* - \frac{h^* \left(\frac{d\phi}{dX}\right)}{12 R^* z^*} + \frac{h^* \left(\frac{d\psi}{dX}\right)^2 \nu}{24} + \frac{h^* \left(\frac{dw^*}{dX}\right) \left(\frac{d\psi}{dX}\right) \nu}{12 R^* z^*} \right. \\ \left. + \frac{\left(\frac{dw^*}{dX}\right)^2 \nu}{2} - \frac{\psi^2 \nu}{2} + V^* \nu - \psi \nu - \frac{h^* \left(\frac{d\psi}{dX}\right)^2}{24} - \frac{h^* \left(\frac{dw^*}{dX}\right) \left(\frac{d\psi}{dX}\right)}{12 R^* z^*} + \varepsilon P^* (-1+\nu+2\nu^2) \right] = 0$$

$$eq2: \frac{E^* h^*}{(1+\nu)(-1+2\nu)} \left[ \frac{h^* \left(\frac{d^2 w^*}{dX^2}\right) \left(\frac{d\psi}{dX}\right) \nu}{12} + \frac{h^* \left(\frac{d^2 \psi}{dX^2}\right) \left(\frac{dw^*}{dX}\right) \nu}{12} - \frac{h^* \left(\frac{d^2 w^*}{dX^2}\right) \left(\frac{d\psi}{dX}\right)}{12} - \frac{h^* \left(\frac{d^2 \psi}{dX^2}\right) \left(\frac{dw^*}{dX}\right)}{12} \right. \\ \left. + \frac{h^* \left(\frac{d^2 \phi}{dX^2}\right) \nu}{12} + \frac{h^* \left(\frac{d^2 \psi}{dX^2}\right) \left(\frac{d\psi}{dX}\right)}{80 R^* z^*} + \frac{h^* \left(\frac{d^2 w^*}{dX^2}\right) \left(\frac{dw^*}{dX}\right) \nu}{12 R^* z^*} - \frac{h^* \psi \left(\frac{d\psi}{dX}\right) \nu}{12 R^* z^*} + \frac{h^* \left(\frac{dV^*}{dX}\right) \nu}{12 R^* z^*} - h^* \left(\frac{d^2 \phi}{dX^2}\right) \right. \\ \left. - \frac{h^* \left(\frac{d\psi}{dX}\right) \nu}{6 R^* z^*} - \frac{h^* \left(\frac{d^2 \psi}{dX^2}\right) \left(\frac{d\psi}{dX}\right) \nu}{80 R^* z^*} - \frac{h^* \left(\frac{d^2 w^*}{dX^2}\right) \left(\frac{dw^*}{dX}\right)}{12 R^* z^*} - \frac{h^* \left(\frac{dV^*}{dX}\right)}{12 R^* z^*} + \frac{h^* \kappa \psi \left(\frac{d\psi}{dX}\right)}{24 R^* z^*} - \frac{h^* \kappa \psi \left(\frac{d\psi}{dX}\right) \nu}{12 R^* z^*} \right. \\ \left. + \frac{\kappa \psi \left(\frac{dw^*}{dX}\right)}{2} - \kappa \psi \left(\frac{dw^*}{dX}\right) \nu + \frac{h^* \kappa \left(\frac{d\psi}{dX}\right)}{24 R^* z^*} - \frac{h^* \kappa \left(\frac{d\psi}{dX}\right) \nu}{12 R^* z^*} + \frac{\kappa \left(\frac{dw^*}{dX}\right)}{2} - \kappa \left(\frac{dw^*}{dX}\right) \nu + \frac{\kappa \phi}{2} - \kappa \phi \nu \right] = 0$$

$$eq3: \frac{E^* h^*}{(1+\nu)(-1+2\nu)} \left[ \frac{h^* \left(\frac{d^2 w^*}{dX^2}\right) \left(\frac{dw^*}{dX}\right) \left(\frac{d\psi}{dX}\right) \nu}{4} + \frac{h^* \left(\frac{d^2 w^*}{dX^2}\right)^2}{8} - \frac{h^* R^* z^* \left(\frac{d^2 \phi}{dX^2}\right) \left(\frac{d\psi}{dX}\right)}{12} + \frac{h^* \kappa \nu \left(\frac{d^2 \psi}{dX^2}\right) \psi}{6} \right. \\ \left. - \frac{h^* R^* z^* \left(\frac{d^2 \psi}{dX^2}\right) \left(\frac{d\phi}{dX}\right)}{12} + \frac{h^* \kappa \nu \left(\frac{d^2 \psi}{dX^2}\right) \psi^2}{12} - \frac{R^* z^* \kappa \left(\frac{d^2 w^*}{dX^2}\right)}{2} - \frac{3 R^* z^* \left(\frac{d^2 w^*}{dX^2}\right) \left(\frac{dw^*}{dX}\right)^2}{2} - R^* z^* \left(\frac{d^2 w^*}{dX^2}\right) V^* \right. \\ \left. - R^* z^* \left(\frac{dw^*}{dX}\right) \left(\frac{dV^*}{dX}\right) + \frac{h^* \kappa \nu \left(\frac{d\psi}{dX}\right)^2 \psi}{6} + \frac{R^* z^* \nu m_3 \psi}{h^*} - \frac{R^* z^* \nu m_1 \psi}{h^*} - \frac{R^* z^* \kappa \nu \left(\frac{d\phi}{dX}\right)}{2} + 2 R^* z^* \kappa \nu \left(\frac{d^2 w^*}{dX^2}\right) \psi \right. \\ \left. + R^* z^* \kappa \nu \left(\frac{d^2 w^*}{dX^2}\right) \psi^2 + \frac{h^* R^* z^* \nu \left(\frac{d^2 \psi}{dX^2}\right) \left(\frac{dw^*}{dX}\right) \left(\frac{d\psi}{dX}\right)}{4} - R^* z^* \nu \left(\frac{dw^*}{dX}\right) \left(\frac{d\psi}{dX}\right) \psi + 2 R^* z^* \kappa \nu \left(\frac{dw^*}{dX}\right) \left(\frac{d\psi}{dX}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -R^* z^* \kappa \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right) \psi(X) + R^* z^* \kappa \nu \left( \frac{d\psi}{dX} \right) \varphi + \frac{h^{*2} R^* z^* \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2}{8} + \frac{h^{*2} R^* z^* \nu \left( \frac{d^2 \varphi}{dX^2} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)}{12} \\
 & + R^* z^* \kappa \nu \left( \frac{d\varphi}{dX} \right) \psi - \frac{h^{*2} R^* z^* \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)}{4} + \frac{h^{*2} R^* z^* \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \left( \frac{d\varphi}{dX} \right)}{12} + \frac{3R^* z^* \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \left( \frac{dw^*}{dX} \right)^2}{2} \\
 & - \frac{R^* z^* \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \psi^2}{2} + R^* z^* \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) V^*(X) - R^* z^* \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \psi - R^* z^* \kappa \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \psi - \frac{R^* z^* \kappa \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \psi^2}{2} \\
 & + R^* z^* \kappa \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) - \frac{R^* z^* \kappa \left( \frac{d\psi}{dX} \right) \varphi}{2} - R^* z^* \nu \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right) + R^* z^* \nu \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{dV^*}{dX} \right) - R^* z^* \kappa \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right) \\
 & + R^* z^* \kappa \nu \left( \frac{d\varphi}{dX} \right) - \frac{R^* z^* \kappa \left( \frac{d\varphi}{dX} \right) \psi}{2} - \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2}{8} - \frac{\nu \left( \frac{dw^*}{dX} \right)^2}{2} + \frac{\nu \psi^2}{2} + \nu V^* + \frac{R^* z^* m_1 \psi}{h^*} - \frac{h^{*2} \kappa \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \psi}{12} \\
 & - \frac{R^* z^* m_3 \psi}{h^*} - \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) w^* - \frac{h^{*2} \kappa \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \psi^2}{24} + \frac{h^{*2} \kappa \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right)}{12} + \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \left( \frac{d\varphi}{dX} \right)}{12} - \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \psi^2}{24} \\
 & + \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \left( \frac{dw^*}{dX} \right)^2}{8} - \frac{h^{*2} \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)}{4} + \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d^2 \varphi}{dX^2} \right) \left( \frac{dw^*}{dX} \right)}{12} + \frac{3h^{*4} \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2}{160} - \frac{w^* m_1}{h^*} \\
 & + \frac{w^* m_3}{h^*} + \psi + \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) V^*}{12} - \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \psi^2}{6} + \frac{h^{*2} \kappa \nu \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2}{6} - \frac{h^{*2} \kappa \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2 \psi}{12} + \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d\psi}{dX} \right) \left( \frac{dV^*}{dX} \right)}{12} \\
 & \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2 \psi}{12} - \frac{h^{*2} \left( \frac{dw^*}{dX} \right)^2 \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right)}{8} - \frac{3h^{*4} \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2 \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right)}{160} - \frac{h^{*2} \left( \frac{d\varphi}{dX} \right) \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right)}{12} - \frac{h^{*2} \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{d^2 \varphi}{dX^2} \right)}{12} \\
 & \frac{h^{*2} \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) V^*}{12} - \frac{h^{*2} \kappa \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right)}{24} - \frac{h^{*2} \left( \frac{d\psi}{dX} \right) \left( \frac{dV^*}{dX} \right)}{12} - \frac{h^{*2} \kappa \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2}{12} + 2R^* z^* \kappa \nu \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right) \psi + \frac{\nu w^* m_1}{h^*} \\
 & \left. - \frac{\nu w^* m_3}{h^*} \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{eq4: } \frac{E^* h^*}{(1+\nu)(-1+2\nu)} \left[ w^* + \frac{h^{*2} R^* z^* \kappa \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \psi^2}{12} + \frac{h^{*2} R^* z^* \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)}{4} + \frac{h^{*2} R^* z^* \kappa \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \psi}{6} \right. \\
 \left. - R^* z^* \kappa \nu \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \varphi + \frac{h^{*2} R^* z^* \kappa \nu \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2 \psi}{12} - R^* z^* \kappa \nu \left( \frac{dw^*}{dX} \right)^2 \psi - \frac{h^{*4} \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \left( \frac{d\varphi}{dX} \right)}{80} - \frac{h^{*4} \left( \frac{d^2 \varphi}{dX^2} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)}{80} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{3h^{*4} \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2}{160} - \frac{h^{*2} \kappa \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right)}{24} - \frac{h^{*2} \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \left( \frac{dw^*}{dX} \right)^2}{8} - \frac{h^{*2} \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) V^*}{12} - \frac{h^{*2} \kappa \left( \frac{d\phi}{dX} \right)}{24} + \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d\phi}{dX} \right)}{6} \\
 & - \frac{h^{*2} \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{dV^*}{dX} \right)}{12} + \frac{h^{*2} \kappa \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \psi^2}{12} + \frac{h^{*2} \kappa \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \psi}{6} - \frac{h^{*2} R^* z^* \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) V^*}{12} - \frac{h^{*2} R^* z^* \kappa \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right)}{24} \\
 & \frac{h^{*2} R^* z^* \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \left( \frac{dw^*}{dX} \right)^2}{8} - \frac{h^{*2} R^* z^* \left( \frac{d^2 \phi}{dX^2} \right) \left( \frac{dw^*}{dX} \right)}{12} - \frac{h^{*2} R^* z^* \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \left( \frac{d\phi}{dX} \right)}{12} - \frac{3h^{*4} R^* z^* \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2}{160} \\
 & + \frac{3h^{*4} \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)}{80} - \frac{R^* z^* \nu w^* m_1}{h^*} + \frac{R^* z^* \nu w^* m_3}{h^*} - \frac{R^{*2} z^{*2} \nu \psi m_3}{h^*} + \frac{R^{*2} z^{*2} \nu \psi m_1}{h^*} + \frac{R^* z^* \nu \left( \frac{dw^*}{dX} \right)^2 \psi}{2} \\
 & - \frac{3R^* z^* \nu \psi^2}{2} - \frac{R^* z^* \nu \psi^3}{2} + \frac{R^* z^* \kappa \left( \frac{dw^*}{dX} \right)^2}{2} + \frac{h^{*2} \kappa \nu \left( \frac{d\phi}{dX} \right) \psi}{12} - \frac{h^{*2} R^* z^* \nu \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2}{24} - \frac{h^{*2} R^* z^* \kappa \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \psi^2}{24} \\
 & - \frac{h^{*2} R^* z^* \kappa \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2}{24} + R^* z^* \nu V^* - \frac{h^{*2} R^* z^* \left( \frac{d\psi}{dX} \right) \left( \frac{dV^*}{dX} \right)}{12} + \frac{h^{*2} R^* z^* \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \left( \frac{dw^*}{dX} \right)^2}{8} + \frac{h^{*2} R^* z^* \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) V^*}{12} \\
 & \frac{h^{*2} R^* z^* \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \psi^2}{24} - \frac{h^{*2} R^* z^* \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \psi}{12} - \frac{h^{*2} R^* z^* \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)}{4} + \frac{h^{*2} R^* z^* \nu \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{d^2 \phi}{dX^2} \right) \psi}{12} \\
 & + \frac{h^{*2} R^* z^* \nu \left( \frac{d\phi}{dX} \right) \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right)}{12} + \frac{3h^{*4} R^* z^* \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2}{160} + \frac{h^{*2} R^* z^* \kappa \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right)}{12} + \frac{h^{*2} R^* z^* \nu \left( \frac{d\psi}{dX} \right) \left( \frac{dV^*}{dX} \right)}{12} \\
 & \frac{h^{*2} R^* z^* \kappa \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \psi^2}{12} + \frac{R^* z^* \kappa \left( \frac{dw^*}{dX} \right)^2 \psi}{2} + \frac{R^* z^* \kappa \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \phi}{2} - \frac{h^{*2} R^* z^* \kappa \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2 \psi}{24} - \frac{h^{*2} R^* z^* \nu \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2 \psi}{24} \\
 & - R^* z^* \kappa \nu \left( \frac{dw^*}{dX} \right) + \frac{h^{*2} R^* z^* \kappa \nu \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2 \psi}{12} + \frac{R^* z^* \nu \left( \frac{dw^*}{dX} \right)^2 \psi}{2} - \frac{3h^{*4} \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)}{80} - \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) w^*}{12} \\
 & + \frac{h^{*2} \kappa \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right)}{12} + R^* z^* \nu \psi V^* + \frac{h^{*4} \nu \left( \frac{d^2 \psi}{dX^2} \right) \left( \frac{d\phi}{dX} \right)}{80} + \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) V^*}{12} - \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \psi}{6} - \frac{h^{*2} \kappa \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \psi^2}{24} \\
 & \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \psi^2}{24} + \frac{3h^{*4} \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)^2}{160} + \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \left( \frac{dw^*}{dX} \right)^2}{8} + \frac{h^{*4} \nu \left( \frac{d^2 \phi}{dX^2} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)}{80} - \frac{h^{*2} \kappa \left( \frac{d^2 w^*}{dX^2} \right) \psi}{12} \\
 & + \frac{R^* z^* w^* m_1}{h^*} - \frac{R^* z^* w^* m_3}{h^*} - \frac{R^{*2} z^{*2} \psi m_1}{h^*} + \frac{R^{*2} z^{*2} \psi m_3}{h^*} + \frac{3R^* z^* \psi^2}{2} + \nu w^* \psi + \frac{R^* z^* \psi^3}{2} + \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{dV^*}{dX} \right)}{12} \\
 & + \left. \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{d\phi}{dX} \right) \psi}{12} - \frac{h^{*2} \kappa \left( \frac{d\phi}{dX} \right) \psi}{24} - \frac{h^{*2} \nu \left( \frac{dw^*}{dX} \right) \left( \frac{d\psi}{dX} \right)}{12} + \frac{h^{*2} \kappa \nu \left( \frac{d\phi}{dX} \right)}{12} \right] = 0
 \end{aligned}$$

## پیوست ۲- ماتریس‌ها و بردارهای معادلات تعادل

$$[A_0] = \begin{bmatrix} A_0[1,1] & 0 & A_0[1,3] & A_0[1,4] \\ 0 & A_0[2,2] & 0 & 0 \\ A_0[3,1] & 0 & A_0[3,3] & A_0[3,4] \\ A_0[4,1] & 0 & A_0[4,3] & A_0[4,4] \end{bmatrix}; [A_1] = \begin{bmatrix} 0 & A_1[1,2] & 0 & 0 \\ A_1[2,1] & 0 & A_1[2,3] & A_1[2,4] \\ 0 & A_1[3,2] & 0 & 0 \\ 0 & A_1[4,2] & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2[2,2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2[3,3] & A_2[3,4] \\ 0 & 0 & A_2[4,3] & A_2[4,4] \end{bmatrix}$$

$$A_0[1,1] = E^* h^* R^* z^* (\nu - 1); A_0[1,3] = -A_0[3,1] = -E^* h^* \nu; A_0[1,4] = -A_0[4,1] = -E^* h^* R^* z^* \nu;$$

$$A_0[2,2] = \frac{E^* h^* \kappa^* R^* z^*}{2} (1 - 2\nu); A_0[3,3] = E^* (m_3 - m_1) (1 - \nu)$$

$$A_0[3,4] = A_0[4,3] = E^* h^* - E^* R^* z^* (m_3 - m_1) (1 - \nu); A_0[4,4] = E^* R^{*2} z^{*2} (m_3 - m_1) (1 - \nu);$$

$$A_1[1,2] = A_1[2,1] = -\frac{E^* h^{*3}}{12} (1 - \nu); A_1[2,3] = -A_1[3,2] = \frac{E^* h^* \kappa^* R^* z^*}{2} (1 - 2\nu)$$

$$A_1[2,4] = -A_1[4,2] = \frac{E^* h^{*3}}{24} (-2\kappa^* \nu + \kappa^* - 4\nu)$$

$$A_2[2,2] = \frac{E^* h^{*3} R^* z^*}{12} (\nu - 1); A_2[3,3] = -\frac{E^* h^* \kappa^* R^* z^*}{2} (1 - 2\nu); A_2[3,4] = A_2[4,3] = -\frac{E^* h^{*3} \kappa^*}{24} (1 - 2\nu)$$

$$A_2[4,4] = -\frac{E^* h^{*3} \kappa^* R^* z^*}{24} (1 - 2\nu)$$

$$\{F_0\} = -P^* h^* R^* z^* (\nu - 1 + 2\nu^2) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{F_1\} = \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{14} \end{Bmatrix}$$

$$F_{11} = \frac{E^* h^*}{24} \left[ (1 - \nu) \left( 2h^{*2} \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right) \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right) + 12R^* z^* \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right)^2 + h^{*2} R^* z^* \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right)^2 \right) + 12R^* z^* \nu \psi_0^2 \right]$$

$$F_{12} = \frac{E^* h^*}{240} \left\{ (1 - \nu) h^{*2} \left[ \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right) \left( 3h^{*2} \left( \frac{d^2\psi_0}{dX^2} \right) + 20R^* z^* \left( \frac{d^2w_0^*}{dX^2} \right) \right) + 20 \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right) \left( \frac{d^2w_0^*}{dX^2} \right) + 20R^* z^* \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right) \left( \frac{d^2\psi_0}{dX^2} \right) \right] \right. \\ \left. + 10h^{*2} (2\kappa\nu + 2\nu - \kappa) \psi_0 \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right) - 120(1 - 2\nu) R^* z^* \kappa \psi_0 \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right) \right]$$

$$F_{13} = \frac{E^* h^*}{24} \left[ 24R^* z^* (1-\nu) V_0^* \left( \frac{d^2 w_0^*}{dX^2} \right) + 2h^{*2} R^* z^* (1-\nu) \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right) \left( \frac{d^2 \phi_0}{dX^2} \right) + 2h^{*2} R^* z^* (1-\nu) \left( \frac{d\phi_0}{dX} \right) \left( \frac{d^2 \psi_0}{dX^2} \right) \right. \\ + 24R^* z^* (\nu + \kappa - 2\kappa\nu) \psi_0 \left( \frac{d^2 w_0^*}{dX^2} \right) - 2h^{*2} (2\kappa\nu - \kappa - 2\nu) \psi_0 \left( \frac{d^2 \psi_0}{dX^2} \right) + 2h^{*2} (1-\nu) \left( \frac{d\phi_0}{dX} \right) \left( \frac{d^2 w_0^*}{dX^2} \right) \\ + 2h^{*2} (1-\nu) \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right) \left( \frac{d^2 \phi_0}{dX^2} \right) + 2h^{*2} (1-\nu) V_0^* \left( \frac{d^2 \psi_0}{dX^2} \right) + \nu w_0^* \left( \frac{d^2 w_0^*}{dX^2} \right) + 12R^* z^* \kappa (1-2\nu) \psi_0 \left( \frac{d\phi_0}{dX} \right) \\ + 24R^* z^* (1-\nu) \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right) \left( \frac{dV_0^*}{dX} \right) + 24R^* z^* (\kappa + \nu + 2\kappa\nu) \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right) \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right) + 12R^* z^* \kappa (1-2\nu) \phi_0 \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right) \\ \left. + 2h^{*2} (1-\nu) \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right) \left( \frac{dV_0^*}{dX} \right) - 12\nu \psi_0^2 + 12\nu \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right)^2 - h^{*2} (4\kappa\nu - 2\kappa - 3\nu) \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right)^2 \right]$$

$$F_{14} = \frac{E^* h^*}{240} \left[ -240R^* z^* \nu \psi_0 V_0^* - 120R^* z^* \kappa (1-\nu) \phi_0 \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right) + 120R^* z^* (2\kappa - 1) \nu \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right)^2 - 120R^* z^* \kappa \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right)^2 \right. \\ + 20h^{*2} R^* z^* (1-\nu) \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right) \left( \frac{dV_0^*}{dX} \right) + 20h^{*2} R^* z^* (1-\nu) \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right) \left( \frac{d^2 \phi_0}{dX^2} \right) + 20h^{*2} R^* z^* (1-\nu) V_0^* \left( \frac{d^2 \psi_0}{dX^2} \right) \\ + 20h^{*2} R^* z^* (1-\nu) \left( \frac{d\phi_0}{dX} \right) \left( \frac{d^2 w_0^*}{dX^2} \right) + 20h^{*2} R^* z^* (\kappa + \nu - 2\kappa\nu) \psi_0 \left( \frac{d^2 \psi_0}{dX^2} \right) - 10h^{*2} R^* z^* (2\kappa - 1) \nu \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right)^2 \\ - 10h^{*2} (2\kappa\nu + 2\nu - \kappa) \psi_0 \left( \frac{d\phi_0}{dX} \right) + 20h^{*2} (1-\nu) V_0^* \left( \frac{d^2 w_0^*}{dX^2} \right) + 10h^{*2} R^* z^* \kappa \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right)^2 - 480R^* z^* (1-\nu) \psi_0^2 \\ - 20h^{*2} (2\kappa\nu - \kappa - 2\nu) \psi_0 \left( \frac{d^2 w_0^*}{dX^2} \right) + 20h^{*2} (1-\nu) \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right) \left( \frac{dV_0^*}{dX} \right) + 20h^{*2} \nu w_0^* \left( \frac{d^2 \psi_0}{dX^2} \right) - 240\nu \psi_0 w_0^* \\ \left. + 3h^{*4} (1-\nu) \left( \frac{d\phi_0}{dX} \right) \left( \frac{d^2 \psi_0}{dX^2} \right) + 3h^{*4} (1-\nu) \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right) \left( \frac{d^2 \phi_0}{dX^2} \right) + 20h^{*2} \nu \left( \frac{dw_0^*}{dX} \right) \left( \frac{d\psi_0}{dX} \right) \right]$$

### پیوست ۳- شکل بی بعد معادلات پایداری

$$eq1: \frac{E^* h^* (\nu - 1)}{(1+\nu)(-1+2\nu)} \left[ \frac{h^{*2}}{12R^* z^*} \left( \frac{d\phi_s}{dX^*} + \frac{dw_s^*}{dX^*} \frac{d\psi_e}{dX^*} + \frac{dw_e^*}{dX^*} \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2}}{12} \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \frac{dw_s^*}{dX^*} \frac{dw_e^*}{dX^*} + V_s^* \right] - \frac{E^* h^* \nu}{(1+\nu)(-1+2\nu)} \times \\ \left[ \frac{w_s^*}{R^* z^*} + \psi_e \psi_s + \psi_s \right]$$

$$eq2: \frac{E^* h^*}{(1+\nu)(-1+2\nu)} \left[ \frac{h^{*2} (\nu - 1)}{12} \left( \frac{d^2 \phi_s}{dX^2} + \frac{dw_s^*}{dX} \frac{d^2 \psi_e}{dX^2} + \frac{dw_e^*}{dX} \frac{d^2 \psi_s}{dX^2} + \frac{d\psi_s}{dX} + \frac{1}{R^* z^*} \left( \frac{dw_s^*}{dX} \frac{d^2 w_e^*}{dX^2} + \frac{dw_e^*}{dX} \frac{d^2 w_s^*}{dX^2} \right) \right. \right. \\ + \frac{d\psi_e}{dX} \left. \right] - \frac{h^{*4} (\nu - 1)}{80R^* z^*} \left( \frac{d\psi_s}{dX} + \frac{d\psi_e}{dX} \right) - \frac{h^{*2}}{24R^* z^*} (2\nu \psi_s (1+\kappa) - \kappa \psi_s) \frac{d\psi_e}{dX} - \frac{h^{*2}}{24R^* z^*} (2\nu \phi_e (\kappa+1) - \kappa \psi_e \\ - \kappa + 4\nu + 2\kappa\nu) \frac{d\psi_s}{dX} + \frac{h^{*2} (\nu - 1)}{12R^* z^*} \frac{dV_s^*}{dX} + \frac{\kappa}{2} (1-2\nu) \psi_s \frac{dV_s^*}{dX} + \frac{\kappa}{2} (1-2\nu) (1+\psi_e) \frac{dw_s^*}{dX} + \frac{\kappa}{2} (1-2\nu) \phi_s \left. \right]$$

$$\begin{aligned}
eq3: & \frac{E^* h^*}{(1+\nu)(-1+2\nu)} \left[ \frac{R^* z^* \kappa (2\nu-1)}{2} (1+\psi_e) \frac{d\varphi_s}{dX^*} + \frac{R^* z^* \kappa (2\nu-1)}{2} \psi_s \frac{d\varphi_e}{dX^*} + \frac{R^* z^* \nu (m_3-m_1)}{h^*} \psi_s + \psi_s + \nu V_s^* \right. \\
& + \frac{(m_3-m_1)}{h^*} w_s^* + R^* z^* (\nu-1) \frac{dw_s^*}{dX^*} \frac{dV_e^*}{dX^*} + R^* z^* (\nu-1) \frac{dw_e^*}{dX^*} \frac{dV_s^*}{dX^*} + \frac{R^* z^* (m_1-m_3)}{h^*} \psi_s - \nu \frac{dw_e^*}{dX^*} \frac{dw_s^*}{dX^*} + \nu \psi_e \psi_s \\
& - \frac{h^{*2} \kappa}{12} \left( 1 + \frac{\nu}{\kappa} - 2\nu \right) \psi_s \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right)^2 + \left( \frac{h^{*2}}{3} \left( \kappa\nu(1+\psi_e) - \left( \frac{\kappa+\nu}{2} \right) \psi_e - \frac{\kappa-3\nu}{2} \right) \right) \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2}}{12} (\nu-1) \left( \frac{dV_s^*}{dX^*} \right) \\
& - R^* z^* (\kappa+\nu+2\kappa\nu) \psi_s \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) - R^* z^* \left( (\kappa-2\kappa\nu+\nu) + (\nu-2\kappa\nu+\kappa) \psi_e \right) \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) + \frac{R^* z^* \kappa (2\nu-1) \varphi_s}{2} \times \\
& \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right) + \left( \frac{h^{*2}}{12} (\nu-1) \left( \frac{dV_e^*}{dX^*} \right) - R^* z^* \left( (\kappa-2\kappa\nu+\nu) + (\nu-2\kappa\nu+\kappa) \psi_e \right) \right) \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \frac{R^* z^* \kappa (2\nu-1) \varphi_e}{2} \times \\
& \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2}}{12} (\nu-1) \left( \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \frac{1}{R^* z^*} \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) \right) \left( \frac{d^2 \varphi_e}{dX^{*2}} \right) + \left( \left( \frac{h^{*2}}{12} (\nu-3) \right) \left( \frac{d\varphi_s}{dX^*} \right) + \left( \frac{h^{*2} R^* z^*}{4} (\nu-1) \right) \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) \right) \\
& + \left( \frac{h^{*2}}{4} (\nu-1) \right) \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right) + \left( \frac{h^{*2}}{4} (\nu-1) \right) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + (3R^* z^* (\nu-1)) \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) - R^* z^* \times \\
& \left( V_s^* (1-\nu) + (\kappa-2\kappa\nu+\nu) (\psi_s + \psi_e \psi_s) + \nu w_s^* \right) \left( \frac{d^2 w_e^*}{dX^{*2}} \right) + \left( \frac{h^{*2}}{12} (\nu-1) \left( \frac{d\varphi_e}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2} R^* z^*}{8} (\nu-1) \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right) \right)^2 \\
& + \frac{h^{*2}}{4} (\nu-1) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right) + \frac{3R^* z^*}{2} (\nu-1) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right)^2 + R^* z^* (\kappa\nu\psi_e^2 + 2\kappa\nu\psi_e + \nu V_e^* + \kappa\nu - \kappa\psi_e - \nu\psi_e - V_e^* \\
& - \frac{(\nu-\kappa)}{2} \psi_e^2 - \frac{\kappa-\nu w_e^*}{2 R^* z^*} \left( \frac{d^2 w_s^*}{dX^{*2}} \right) + \frac{h^{*2}}{12} (\nu-1) \left( R^* z^* \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right) + \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) \right) \left( \frac{d^2 \varphi_s}{dX^{*2}} \right) + \left( \frac{h^{*2} R^* z^*}{12} \nu (\nu-1) \left( \frac{d\varphi_s}{dX^*} \right) \right. \\
& + \left( \frac{3h^{*4}}{80} (\nu-1) \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2} R^* z^*}{4} (\nu-1) \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) \right) \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2} R^* z^*}{4} (\nu-1) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2} V_s^*}{12} (\nu-1) \\
& + \frac{h^{*2}}{4} (\nu-1) \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) - \frac{h^{*2} \psi_s}{12} (\kappa-2\kappa\nu+2\nu) (\psi_e + 1) \left( \frac{d^2 \psi_e}{dX^{*2}} \right) + \left( \frac{h^{*2} R^* z^*}{4} (\nu-1) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) \right) \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right) \\
& + \frac{h^{*2} R^* z^*}{12} (\nu-1) \left( \frac{d\varphi_e}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2}}{8} (\nu-1) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right)^2 + \frac{3h^{*4}}{160} (\nu-1) \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right)^2 + \frac{h^{*2}}{24} (2\nu\varphi_e (2\kappa+\kappa\varphi_e-2) + 2V_e^* (\nu-1) \\
& \left. - \psi_e (2\kappa+\kappa\psi_e+\nu\psi_e) + \kappa(2\nu-1) \right) \left( \frac{d^2 \psi_s}{dX^{*2}} \right) + \frac{\nu w_s^*}{h^*} (m_1-m_3) \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 eq4: & \frac{E^* h^*}{(1+\nu)(-1+2\nu)} \left[ \nu \left( \psi_s w_e^* + \psi_e w_s^* + 3R^* z^* \psi_e \psi_s + \frac{3R^* z^* \psi_e^2 \psi_s}{2} + w_s^* \right) + \frac{h^{*2}}{24} (2\kappa\nu\psi_e + 2\kappa\nu + 2\nu\psi_e - \kappa\psi_e \right. \\
 & - \kappa + 4\nu) \left( \frac{d\varphi_s}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2}}{12} (\nu-1) \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) \left( \frac{dV_e^*}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2}}{12} (\nu-1) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) \left( \frac{dV_s^*}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2} R^* z^*}{24} (-\nu - \kappa + 2\kappa\nu) \psi_s \times \\
 & \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right)^2 + R^* z^* \nu V_s^* + \frac{h^{*2}}{12} \left( -R^* z^* (\nu + \kappa - 2\kappa\nu) (\psi_e + 1) \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + R^* z^* (\nu-1) \left( \frac{dV_s^*}{dX^*} \right) - \nu \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) \right) \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right) \\
 & + \frac{h^{*2}}{12} \left( R^* z^* (\nu-1) \left( \frac{dV_e^*}{dX^*} \right) - \nu \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) \right) \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \frac{R^* z^*}{2h^*} (2(m_1 - m_3)(w_s^* - R^* z^* \psi_s) - 3h^* \nu \psi_e \psi_s (\psi_e + 2)) \\
 & + R^* z^* \nu (\psi_e V_s^* + \psi_s V_e^*) + \frac{R^* z^*}{2} (\kappa + \nu - 2\kappa\nu) \psi_s \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right)^2 + R^* z^* ((\nu + \kappa - 2\kappa\nu)(1 + \psi_e) \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) + \frac{\kappa}{2} \times \\
 & (1 - 2\nu) \varphi_s) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) + \frac{\kappa R^* z^*}{2} (1 - 2\nu) \varphi_e \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) + \left( \frac{h^{*4}}{80} (\nu-1) \left( \frac{d\varphi_e}{dX^*} \right) + \frac{3h^{*4} R^* z^*}{160} (\nu-1) \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right)^2 + \frac{3h^{*4}}{80} \times \right. \\
 & (\nu-1) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2} R^* z^*}{8} (\nu-1) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right)^2 - \frac{h^{*2} R^* z^*}{24} ((\kappa + \nu - 2\kappa\nu)(2 + \psi_e) \psi_e + 2(1 - \nu) V_e^* + \kappa \times \\
 & (1 - 2\nu) + \frac{2}{R^* z^*} \nu w_e^*) \left( \frac{d^2 \psi_s}{dX^{*2}} \right) + \left( \frac{h^{*4}}{80} (\nu-1) \left( \frac{d\varphi_s}{dX^*} \right) + \left( \frac{3h^{*4} R^* z^*}{80} (\nu-1) \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \frac{3h^{*4}}{80} (\nu-1) \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) \right) \times \\
 & \left. \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right) + \frac{3h^{*4}}{80} (\nu-1) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2} R^* z^*}{4} (\nu-1) \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) - \frac{h^{*2}}{12} (\nu w_s^*) + R^* z^* \psi_s (\kappa + \nu - 2\kappa\nu) \times \right. \\
 & \left. (1 + \psi_e) + R^* z^* V_s^* (1 - \nu) \right) \left( \frac{d^2 \psi_e}{dX^{*2}} \right) + \frac{h^{*2} R^* z^*}{12} (\nu-1) \left( \frac{d\varphi_s}{dX^*} \right) + \left( \frac{3h^{*4}}{80} (\nu-1) \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2} R^* z^*}{4} (\nu-1) \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) \right) \\
 & + \frac{h^{*2}}{4} (\nu-1) \left( \left( R^* z^* \right) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) \right) - \frac{h^{*2}}{12} ((\kappa + \nu - 2\kappa\nu) \psi_s (1 + \psi_e) - \nu V_s^* + V_s^*) + (\nu-1) \times \\
 & \left( \frac{h^{*4}}{80} \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2} R^* z^*}{12} \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) \right) \left( \frac{d^2 \varphi_s}{dX^{*2}} \right) + (\nu-1) \left( \frac{h^{*4}}{80} \left( \frac{d\psi_s}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2} R^* z^*}{12} \left( \frac{dw_s^*}{dX^*} \right) \right) \left( \frac{d^2 \varphi_e}{dX^{*2}} \right) + \left( \frac{3h^{*4} (\nu-1)}{160} \times \right. \\
 & \left. \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right)^2 + \frac{h^{*2} R^* z^* (\nu-1)}{12} \left( \frac{d\varphi_e}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2} R^* z^* (\nu-1)}{4} \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right) \left( \frac{d\psi_e}{dX^*} \right) + \frac{h^{*2} (\nu-1)}{8} \left( \frac{dw_e^*}{dX^*} \right)^2 + \frac{h^{*2}}{24} (\psi_e (\psi_e (2\kappa\nu \right. \right. \\
 & \left. \left. - \kappa - \nu + 4\kappa\nu - 2\kappa - 4\nu) + 2V_e^* (\nu-1) + \kappa(2\nu-1)) \right) \left( \frac{d^2 w_s^*}{dX^{*2}} \right) + \frac{R^* z^* \nu}{h^*} (m_3 - \nu m_1) (w_s^* + R^* z^* \psi_s) + \frac{h^{*2}}{24} (2\kappa\nu \right. \\
 & \left. + 2\nu - \kappa) \psi_s \left( \frac{d\varphi_e}{dX^*} \right) \right]
 \end{aligned}$$

## Analytical Solution for Buckling Analysis of Axisymmetric Cylindrical Shell under Axial Load using Shear Deformation Theory

**Mohammad Reza Abbasi**

Ph.D. Student, Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

[mohammad.reza.abbasi.2011@gmail.com](mailto:mohammad.reza.abbasi.2011@gmail.com)

\*Corresponding author: **Mehdi Gannad**

Associate Professor, Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran, Postal code: 3619995161, P.O. Box 316

[mghannadk@shahroodut.ac.ir](mailto:mghannadk@shahroodut.ac.ir)

**Hamed Gharooni**

Ph.D., Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

[gharooni.hamed@gmail.com](mailto:gharooni.hamed@gmail.com)

### Abstract

This paper determines the buckling load of an axisymmetric cylindrical shell of homogeneous and isotropic materials analytically using the first-order shear deformation theory (FSDT). To describe the kinematics of the shell, the FSDT, and von Karman relations are used. The equilibrium equations, which are a system of nonlinear coupled differential equations, are determined from the principle of virtual work. The nonlinear equilibrium equations are solved analytically using the perturbation technique and then the stability equations are derived from them by employing the adjacent criterion method. The resulting equations are a system of coupled linear differential equations with variable coefficients that are solved analytically to find the buckling load of the structure. The effects of geometrical properties have been investigated by a parametric study on buckling load results. Also, the buckling load is determined using the finite element method (FEM) and classical theory (Lorenz) and compared with the analytical solution results.

*Keywords:* Buckling analysis, Cylindrical shell, Analytical solution, Shear deformation theory, Perturbation technique