

# تحلیل آیزوژئومتریکی ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با صفحات گرافن بر اساس یک تئوری شبه سه بعدی بهبود یافته

حسن محمدی<sup>۱</sup>  
استادیار

در این مقاله، بر مبنای یک تئوری تیر شبه سه بعدی بهبود یافته و استفاده از روش آیزوژئومتریکی، ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با صفحات گرافن مطالعه شده است. تیر مورد بررسی به صورت لایه ای فرض شده که کسر حجمی گرافن در این لایه ها می تواند متفاوت باشد و منجر به یک سازه هدفمند تابعی شود. مدول الاستیسیته معادل این تیرها به کمک مدل هالپین-سای محاسبه شده است. ابتدا در قالب چندین مثال، دقت فرمول بندی پیشنهادی بررسی گردیده است. نتایج نشان می دهد که تئوری اتخاذ شده به خوبی می تواند رفتار ارتعاشات آزاد تیرهای نانوکامپوزیتی با ضخامت دلخواه را پیش بینی کند.

واژه‌های راهنما: تحلیل آیزوژئومتریکی، تئوری شبه سه بعدی، ارتعاشات آزاد، تیرهای کامپوزیتی، صفحات گرافن

## ۱- مقدمه

نانولوله‌های کربنی و گرافن دو ساختار بر پایه کربن در مقیاس نانو با خواص خارق‌العاده مکانیکی، حرارتی و الکتریکی هستند. به همین دلیل این دو ساختار به طور گسترده‌ای به عنوان فاز تقویت‌کننده در مواد مرکب پلیمری استفاده می‌شوند [۱-۷]. علاوه بر این خواص حیرت‌انگیز، خواص مکانیکی نانوکامپوزیت‌ها به طرز قابل ملاحظه‌ای به سطح تماس و شدت نیروهای بین مولکولی بین تقویت‌کننده و ماتریس بستگی دارد. در مقایسه با نانولوله‌های کربنی، صفحات گرافن سطح تماس بیشتری داشته و در نتیجه برهم کنش قوی‌تری با فاز ماتریس دارند. به علاوه، صفحات گرافن هزینه ساخت کمتری داشته و در طبیعت بیشتر یافت می‌شوند [۸]. تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها المان‌های سازه‌ای اصلی در بسیاری از کاربردهای صنعتی و ماشین‌ها هستند و بنابراین درک ویژگی‌های ارتعاشی آنها برای مهندسیین برای پیش‌بینی ارتعاشات کل سازه‌ها از اهمیت بالایی

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد لامرد، دانشگاه آزاد اسلامی، لامرد، ایران، [ha.mohammadi@iau.ac.ir](mailto:ha.mohammadi@iau.ac.ir)

برخوردار است. در سال‌های اخیر، دسته جدیدی از کامپوزیت‌ها که به عنوان کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانوصفحات گرافن به صورت هدفمند تابعی شناخته می‌شوند، توجه ویژه‌ای را به خود جلب کرده‌اند. تاکنون تحقیقات زیادی در خصوص مکانیک این سازه‌ها صورت گرفته است [۹-۱۹]. در ادامه برخی از این تحقیقات به اختصار مرور می‌شود. لیانگ<sup>۱</sup> و همکاران [۹] با استفاده از روش آیزوژنومتریک، رفتار خطی و غیرخطی تیرهای منحنی کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوصفحات گرافن به صورت هدفمند تابعی محوری را بررسی نمودند. آنها در مطالعه خود از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم<sup>۲</sup> برای بیان میدان جابجایی استفاده کردند. هان<sup>۳</sup> و همکاران [۱۰] تغییر شکل‌های بزرگ ناشی از تغییرات دمایی را برای یک پنل استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوصفحات گرافن با دو شرط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار با استفاده از یک روش نیمه تحلیلی بررسی نمودند. ژانگ<sup>۴</sup> و شه<sup>۵</sup> [۱۱] پاسخ غیرخطی ضربه سرعت کم پوسته‌های استوانه‌ای پر شده با فوم فلزی و تقویت‌شده با گرافن را تحت حرکت محوری و در حالت وجود نقص هندسی بررسی کردند. چن<sup>۶</sup> و همکاران [۱۲] رفتار ارتعاشی تیرهای متخلخل کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوصفحات گرافن را در محیط حرارتی مطالعه کردند. آنها این کار را با استفاده از روش تابع منتقل شده<sup>۷</sup> انجام دادند. دای<sup>۸</sup> و کیانی [۱۳] با استفاده از یک روش نیمه تحلیلی، پایداری پوسته کامپوزیتی استوانه‌ای تقویت‌شده با نانوصفحات گرافن را بررسی نمودند. آنها در این کار معادلات حرکت را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم به دست آوردند. ملایی و همکاران [۱۴] مسئله کمانش پیچشی پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای تقویت‌شده با گرافن را مطالعه نمودند. آنها در مطالعه خود معادلات تعادل را بر مبنای تئوری الاستیسیته سه بعدی خطی به دست آوردند. بابایی و همکاران [۱۵] فرکانس‌های طبیعی پنل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوصفحات گرافن را برای چیدمان‌های مختلف گرافن و سایر ویژگی‌های این تقویت‌کننده محاسبه کردند. میرزایی و عباسی [۱۶] پاسخ دینامیکی پنل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوصفحات گرافن را تحت اثر یک بار در حال حرکت به دست آوردند. آنها نشان دادند که با افزودن مقدار کمی تقویت‌کننده گرافن، تغییر شکل دینامیکی پنل به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. تیان<sup>۹</sup> [۱۷] و همکاران یک تحلیل دینامیکی غیرخطی برای ورق‌های متخلخل کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوصفحات گرافن تحت یک جرم در حال حرکت انجام دادند. آنها کرنش‌های غیرخطی فون کارمن را در پژوهش خود در نظر گرفتند. عیوضیان و همکاران [۱۸] تحلیل کمانش و پساکمانش را برای یک میکروتیر چرخان تقویت‌شده با گرافن انجام دادند. آنها بیان نمودند که توزیع تقویت‌کننده به شکل  $X$  پایداری میکروتیر را بهبود می‌بخشد. وو<sup>۱۰</sup> و همکاران [۱۹] پساکمانش حرارتی متقارن محوری ورق‌های حلقوی کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوصفحات گرافن با نقص‌های هندسی مختلف را بررسی کردند. آنها از مدل سه بعدی

<sup>1</sup> Liang<sup>2</sup> Third-order shear deformation theory<sup>3</sup> Han<sup>4</sup> Zhang<sup>5</sup> She<sup>6</sup> Chen<sup>7</sup> Transfer function method<sup>8</sup> Dai<sup>9</sup> Tian<sup>10</sup> Wu

هالپین-سای<sup>۱</sup> برای تخمین خواص معادل ورق نانوکامپوزیت بهره بردند. گوئو<sup>۲</sup> و همکاران رفتار غیرخطی دینامیکی یک ورق نانوکامپوزیتی را بر اساس روش ریلی-ریتز گسترش یافته<sup>۳</sup> مطالعه نمودند. آنها اثر پارامترهای مختلف را در کار خود بر رفتار دینامیکی ورق بررسی نمودند. اکثر مطالعات صورت گرفته در زمینه تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با صفحات گرافن بر پایه تئوری‌های متداول یعنی تئوری تیر اویلر-برنولی<sup>۴</sup>، تئوری تیر تیموشنکو<sup>۵</sup> و تئوری‌های تیر مراتب بالاتر<sup>۶</sup> است. با این وجود، پژوهش‌های کمتری در زمینه مکانیک تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با گرافن بر مبنای تئوری شبه سه بعدی<sup>۷</sup> انجام شده است [۲۶-۲۰]. جعفری و کیانی [۲۳] با استفاده از یک تئوری شبه سه بعدی و روش ناویر<sup>۸</sup> پاسخ دینامیکی تیرهای نانوکامپوزیتی تقویت شده با گرافن را تحت بار در حال حرکت به دست آوردند. وانگ<sup>۹</sup> و کیانی [۲۴] بر اساس تئوری شبه سه بعدی و حل ناویر پاسخ دینامیکی تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با صفحات گرافن را با در نظر گرفتن نیروی محوری اولیه به دست آوردند. آنها اثر بستر الاستیک را در کار خود لحاظ نمودند. پریانکا<sup>۱۰</sup> و همکاران [۲۵] رفتار ارتعاشات آزاد و کمانش تیرهای متخلخل کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن را با استفاده از روش ریتز<sup>۱۱</sup> بررسی نمودند. ایشان فرض کردند که بار محوری وارد شده بر تیر متغیر است. کارامانلی<sup>۱۲</sup> و وو<sup>۱۳</sup> [۲۶] رفتار خمشی، ارتعاشات آزاد و کمانش تیرهای نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و گرافن را بر اساس یک تئوری شبه سه بعدی و روش المان محدود مطالعه نمودند.

همانطور که اشاره شد مطالعات اندکی در زمینه ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن بر اساس تئوری شبه سه بعدی وجود دارد. لذا نوآوری مقاله حاضر، استفاده از روش آیزوژنومتریک برای تحلیل ارتعاشات آزاد این تیرها بر اساس یک تئوری شبه سه بعدی اصلاح شده برای اولین بار است. نظر به کاربرد گسترده تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن، استفاده از تئوری شبه سه بعدی می‌تواند در پیش‌بینی دقیق رفتار ارتعاشی این المان‌های سازه‌ای با ضخامت دلخواه بسیار حائز اهمیت باشد. در این راستا، معادلات حاکم بر تیر با استفاده از اصل همپلتون به دست آمده و با روش آیزوژنومتریک حل می‌شوند. پس از آن، در قالب چندین مثال، کارایی و دقت روش عددی حاضر و فرمول‌بندی پیشنهادی بررسی می‌گردد. در نهایت، یک مجموعه نتایج جدید برای الگوهای مختلف توزیع گرافن، تعداد لایه‌ها، درصد‌های وزنی متفاوت صفحات گرافن و همچنین نسبت‌های طول به ضخامت و شرایط مرزی گوناگون ارائه می‌شود. جدید برای الگوهای مختلف توزیع گرافن، تعداد لایه‌ها، درصد‌های وزنی متفاوت صفحات گرافن و همچنین نسبت‌های طول به ضخامت و شرایط مرزی گوناگون ارائه می‌شود.

<sup>1</sup> Halpin-Tsai

<sup>2</sup> Guo

<sup>3</sup> Extended Rayleigh-Ritz method

<sup>4</sup> Euler-Bernoulli beam theory (EBT)

<sup>5</sup> Timoshenko beam theory (TBT)

<sup>6</sup> Higher-order beam theory (HBT)

<sup>7</sup> Quasi-3D theory

<sup>8</sup> Navier

<sup>9</sup> Wang

<sup>10</sup> Priyanka

<sup>11</sup> Ritz

<sup>12</sup> Karamanli

<sup>13</sup> Vo

## ۲- هندسه و خواص مکانیکی تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن

شکل (۱) یک تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن را نشان می دهد. این تیر با طول  $L$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  مشخص شده است. دستگاه مختصات کارتزین نیز در این شکل نشان داده شده است. این دستگاه به نحوی انتخاب شده که محور  $x$  راستای طولی تیر، محور  $y$  راستای عرضی و محور  $z$  راستای ضخامت را نشان می دهد. فرض می شود که این تیر از تعداد  $N_L$  لایه تشکیل شده است. هر لایه نیز از یک ماتریس پلیمری ساخته شده که با نانوصفحات گرافن تقویت شده است. به علاوه فرض می شود که کسر حجمی گرافن ها از لایه ای به لایه دیگر متفاوت است که منجر به ایجاد یک توزیع هدفمند می شود. در این تحقیق چهار الگوی مختلف توزیع برای نانوصفحات گرافن در نظر گرفته شده که به صورت O-GPLRC، X-GPLRC، U-GPLRC و GPLRC تعریف می شوند. این چهار الگو در شکل (۲) به صورت شماتیک نشان داده شده اند. کسر حجمی در لایه  $k$  ام از هر یکی از این الگوها به صورت زیر به دست می آید [۲۷]:

$$\begin{aligned} \text{U-GPLRC: } V_{\text{GPL}}^{(k)}(z) &= V_{\text{GPL}}^* \\ \text{X-GPLRC: } V_{\text{GPL}}^{(k)}(z) &= 2V_{\text{GPL}}^* \frac{|2k-N_L-1|}{N_L} \\ \text{O-GPLRC: } V_{\text{GPL}}^{(k)}(z) &= 2V_{\text{GPL}}^* \left(1 - \frac{|2k-N_L-1|}{N_L}\right) \\ \text{V-GPLRC: } V_{\text{GPL}}^{(k)}(z) &= V_{\text{GPL}}^* \left(\frac{2k-1}{N_L}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه فوق  $V_{\text{GPL}}^*$  کسر حجمی کل نانوصفحات گرافن را در کل مقطع تیر نشان می دهد. این مقدار برای هر چهار توزیع یاد شده یکسان بوده و از رابطه زیر به دست می آید [۲۷-۳۲]:

$$V_{\text{GPL}}^* = \frac{W_{\text{GPL}}}{W_{\text{GPL}} + \frac{\rho_{\text{GPL}}}{\rho_{\text{M}}}(1-W_{\text{GPL}})} \quad (2)$$

در این رابطه  $W_{\text{GPL}}$  کسر وزنی نانوصفحات گرافن است. همچنین  $\rho_{\text{GPL}}$  و  $\rho_{\text{M}}$  به ترتیب دانسیته جرمی گرافن و ماتریس را نشان می دهد. در این پژوهش به منظور یافتن مدول الاستیک معادل هر لایه از قاعده میکرومکانیکی هالپین-سای استفاده می شود [۲۷-۳۲]:

$$E_{\text{GPLRC}}^{(k)} = \frac{3}{8} \left( \frac{1 + \xi_L \eta_L V_{\text{GPL}}^{(k)}}{1 - \eta_L V_{\text{GPL}}^{(k)}} \right) E_{\text{M}} + \frac{5}{8} \left( \frac{1 + \xi_T \eta_T V_{\text{GPL}}^{(k)}}{1 - \eta_T V_{\text{GPL}}^{(k)}} \right) E_{\text{M}} \quad (3)$$

در رابطه (۳)،  $E_{\text{M}}$  مدول الاستیسیته ماتریس است. همچنین  $\eta_L$  و  $\eta_T$  دو ضریب طولی و عرضی هستند که با روابط زیر بیان می شوند:

$$\eta_L = \frac{E_{\text{GPL}} - E_{\text{M}}}{E_{\text{GPL}} + \xi_L E_{\text{M}}}; \quad \eta_T = \frac{E_{\text{GPL}} - E_{\text{M}}}{E_{\text{GPL}} + \xi_T E_{\text{M}}} \quad (4)$$

در رابطه (۴)، ضرایب  $\xi_L$  و  $\xi_T$  به منظور در نظر گرفتن اثرات اندازه لحاظ شده‌اند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

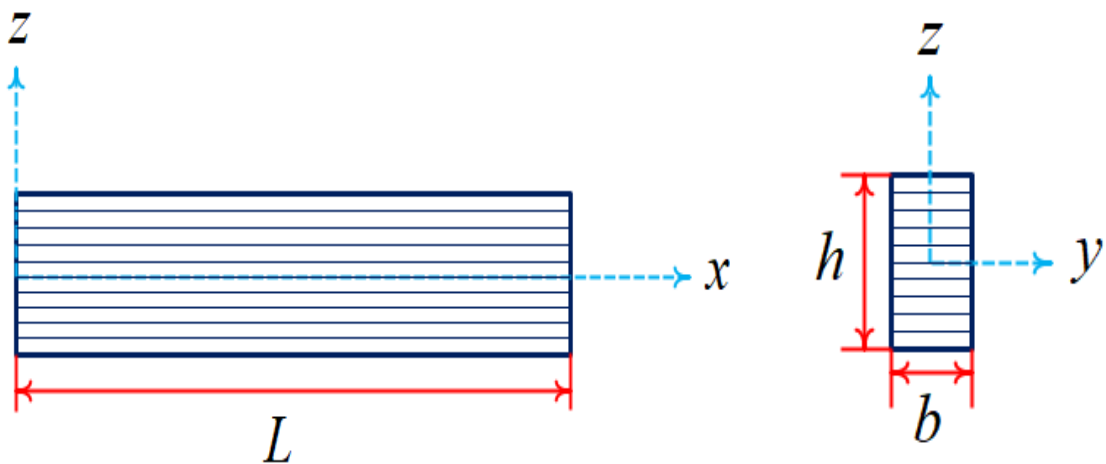
$$\xi_L = 2 \frac{a_{GPL}}{h_{GPL}}; \quad \xi_T = 2 \frac{b_{GPL}}{h_{GPL}} \quad (5)$$

که در آن  $a_{GPL}$ ،  $b_{GPL}$  و  $h_{GPL}$  به ترتیب طول، عرض و ضخامت نانوصفحات گرافن را نشان می‌دهند. این مقادیر عبارتند از:  $a_{GPL} = 2.5 \mu\text{m}$ ،  $b_{GPL} = 1.5 \mu\text{m}$  و  $h_{GPL} = 1.5 \text{nm}$ . برای یافتن دانسیته جرمی و ضریب پواسون تیر کامپوزیتی از قاعده مخلوط‌های متداول استفاده می‌شود [۲۷]:

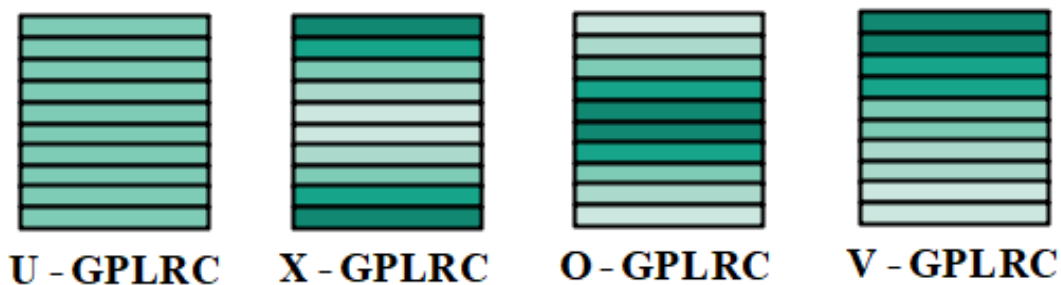
$$\rho_{GPLRC}^{(k)} = (\rho_{GPL} - \rho_M)V_{GPL}^{(k)} + \rho_M \quad (6)$$

$$\nu_{GPLRC}^{(k)} = (\nu_{GPL} - \nu_M)V_{GPL}^{(k)} + \nu_M \quad (7)$$

در این رابطه  $\nu_{GPL}$  و  $\nu_M$  معرف ضریب پواسون به ترتیب گرافن و ماتریس است.



شکل ۱- هندسه تیر چند لایه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانو صفحات گرافن



شکل ۲- توزیع‌های متداول نانوصفحات گرافن در امتداد ضخامت تیر

### ۳- فرمول بندی پایه مسئله

#### ۳-۱- تئوری تیر شبه سه بعدی

میدان جابجایی یک تیر را می توان در حالت کلی بر اساس تئوری تیر ردی-بیکفورد<sup>۱</sup> بهبود یافته به صورت زیر به دست آورد [۳۳]:

$$\begin{aligned} u_1(x, z, t) &= u(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + (f(z) - z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ u_3(x, z, t) &= w_b(x, t) + w_s(x, t) \end{aligned} \quad (۸)$$

در رابطه فوق  $u$ ،  $w_b$  و  $w_s$  به ترتیب جابجایی محوری، مؤلفه خمشی جابجایی عمودی و مؤلفه برشی جابجایی عمودی را نشان می دهد. به علاوه تابع  $f(z)$  برای تعیین توزیع کرنش برشی در امتداد ضخامت تیر به کار می رود. با توجه به انتخاب این توابع مطابق با جدول (۱)، می توان تئوری های مختلف را گسترش داد: در تئوری های شبه سه بعدی، میدان جابجایی توصیف شده با معادله (۱) با اضافه نمودن یک جمله مرتبه بالاتر به مؤلفه جابجایی عرضی به منظور لحاظ اثر کشش ضخامت اصلاح می شود [۳۳]:

$$\begin{aligned} u_1(x, z, t) &= u(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + (f(z) - z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ u_3(x, z, t) &= w_b(x, t) + w_s(x, t) + f'(z)w_z(x, t) \end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن  $f(z) = z - \frac{4z^3}{3h^3}$  و  $f'(z) = df(z)/dz$  میدان جابجایی را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \Lambda \mathbf{B}_m \mathbf{U} \quad (۱۰)$$

جدول ۱- تابع برشی  $f(z)$  متناظر با تئوری های مختلف

$f(z)$	تئوری
0	تئوری تیر کلاسیک (اویلر-برنولی)
$z$	تئوری تیر تیموشنکو
$z - \frac{4z^3}{3h^3}$	تئوری تیر مرتبه سوم ردی [۳۴]
$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	تئوری تیر سینوسی [۳۵]
$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	تئوری تیر هایپربولیک [۳۶]
$ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$	تئوری تیر نمایی [۳۷]

<sup>۱</sup> Refined Reddy-Bickford beam theory

که در آن:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & z & f(z) - z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & f'(z) \end{bmatrix}; \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u \\ w_b \\ w_s \\ w_z \end{Bmatrix} \quad (11)$$

با توجه به میدان جابجایی در نظر گرفته شده در رابطه (۹)، مؤلفه‌های غیرصفر تانسور کرنش در هر نقطه از تیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + (f(z) - z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_3}{\partial x} = f''(z) w_z \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = f'(z) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

رابطه (۱۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{ZB}_k \mathbf{U} \quad (13)$$

که در آن:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & z & f(z) - z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f''(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f'(z) \end{bmatrix}; \mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (14)$$

معادلات مشخصه برای لایه  $k$ ام به صورت زیر بیان می‌شود [۲۳]:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = \mathbf{Q}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (15)$$

که در آن:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xz}\}^T \quad (16)$$

همچنین:

$$\mathbf{Q}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{13}^{(k)} & 0 \\ Q_{13}^{(k)} & Q_{33}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

با:

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(k)} &= \frac{E_{GPLRC}^{(k)}}{1-\nu_{GPLRC}^{2(k)}}; & Q_{13}^{(k)} &= \frac{\nu_{GPLRC}^{(k)} E_{GPLRC}^{(k)}}{1-\nu_{GPLRC}^{2(k)}}; \\ Q_{33}^{(k)} &= \frac{E_{GPLRC}^{(k)}}{1-\nu_{GPLRC}^{2(k)}}; & Q_{55}^{(k)} &= \frac{E_{GPLRC}^{(k)}}{2(1+\nu_{GPLRC}^{(k)})} \end{aligned} \quad (18)$$

### ۳-۲- انرژی پتانسیل تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن

تغییرات انرژی پتانسیل کل ( $\Pi$ ) تیر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta \Pi = \delta U_b - \delta T \quad (19)$$

در معادله (۱۹)،  $U_b$  انرژی پتانسیل کرنشی و  $T$  انرژی جنبشی است. تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\delta U_b = \int_L \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^{(k)} dz dx \quad (20)$$

با استفاده از معادلات (۱۳) و (۱۵)، معادله (۲۰) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta U_b &= \int_L \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^{(k)} dz dx = \int_L \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{Q}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon} dz dx \\ &= \int_L \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \delta (\mathbf{ZB}_k \mathbf{U})^T \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{ZB}_k \mathbf{U} dz dx \\ &= \int_L \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \delta \mathbf{U}^T \mathbf{B}_k^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{ZB}_k \mathbf{U} dz dx \\ &= \int_L \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \delta \mathbf{U}^T \mathbf{B}_k^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_k \mathbf{U} dz dx \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن:

$$\mathbf{C}_b = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mathbf{z}^T \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{z} dz \quad (22)$$

با جایگزینی روابط (۱۴) و (۱۷) در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\mathbf{C}_b = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_1 & \tilde{\mathbf{D}}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \tilde{\mathbf{D}}_2^T & \mathbf{H}_1 & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

با:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}_1 &= \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} 1 & z & f-z \\ z & z^2 & z(f-z) \\ f-z & z(f-z) & (f-z)^2 \end{bmatrix} Q_{11}^{(k)} dz; \\ \tilde{\mathbf{D}}_2 &= \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} f'' \\ zf'' \\ (f-z)f'' \end{Bmatrix} Q_{13}^{(k)} dz \\ \mathbf{H}_1 &= \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f''^2 Q_{33}^{(k)} dz; \quad \mathbf{H}_2 = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f'^2 Q_{55}^{(k)} dz \end{aligned} \quad (24)$$

تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta T = \int_L \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \rho^{(k)} \dot{\mathbf{u}} dz dx \quad (25)$$

که در آن  $\dot{\mathbf{u}} = d\mathbf{u}/dt$ . پس از جایگزینی رابطه (۱۰) در رابطه فوق به این نتیجه می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_L \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \rho^{(k)} \dot{\mathbf{u}} dz dx = \\ &= \int_L \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \delta (\mathbf{\Lambda} \mathbf{B}_m \mathbf{U})^T \rho^{(k)} \mathbf{\Lambda} \mathbf{B}_m \mathbf{U} dz dx = \\ &= \int_L \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \delta \mathbf{U}^T \mathbf{B}_m^T \mathbf{\Lambda}^T \rho^{(k)} \mathbf{\Lambda} \mathbf{B}_m \mathbf{U} dz dx = \\ &= \int_L \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \delta \mathbf{U}^T \mathbf{B}_m^T \mathbf{\Theta} \mathbf{B}_m \mathbf{U} dz dx \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن:

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \hat{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

با:

$$\hat{\mathbf{I}}_1 = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} 1 & z & f-z \\ z & z^2 & z(f-z) \\ f-z & z(f-z) & (f-z)^2 \end{bmatrix} \rho^{(k)} dz \quad (28)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_2 = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} 1 & z & f' \\ z & z^2 & f' \\ f' & f' & f'^2 \end{bmatrix} \rho^{(k)} dz$$

#### ۴- روش آیزوژئومتریك

##### ۴-۱- مفاهیم پایه

در تکنیک نریز، یک بردار گرهی  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  مجموعه‌ای غیرنزولی از اعداد حقیقی است که در آن  $n$  تعداد توابع پایه و  $p$  نیز درجه چندجمله‌ای است. برای یک بردار گرهی معین  $\Xi$  و همچنین درجه معین چندجمله‌ای  $p$ ، توابع پایه بی‌اسپیلاین یک متغیره  $N_i^p$  با استفاده از فرمول بازگشتی مشهور کاکس-دی بور<sup>۱</sup> تعریف می‌شوند [۳۸-۴۱]:

$$N_i^0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{for } p = 0$$

$$N_i^p(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_i^{p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(\xi) \quad \text{for } p \geq 1 \quad (29)$$

همچنین توابع پایه نریز یک متغیره  $R_i^p$  با استفاده از توابع پایه بی‌اسپیلاین به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_i^p(\xi) \tilde{w}_i}{\sum_{i=1}^n N_i^p(\xi) \tilde{w}_i} \quad (30)$$

که در آن  $\tilde{w}_i$  ضرایب وزنی متناظر با نقطه کنترلی  $\xi_i$  است.

##### ۴-۲- شکل گسسته معادلات حاکم

با استفاده از توابع نریز، تقریب جابجایی در دامنه تیر را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$(u_I^h, w_{bI}^h, w_{sI}^h, w_{zI}^h) = \sum_{I=1}^n R_I (u_{0I}, w_{bI}, w_{sI}, w_{zI}) \text{ or } \mathbf{U}^h = \sum_{I=1}^n R_I \mathbf{q}_I \quad (31)$$

که در آن  $R_I$  تابع نریز  $I$ ام است که در رابطه (۳۰) تعریف شده است. همچنین  $\mathbf{q}_I = (u_{0I}, w_{bI}, w_{sI}, w_{zI})$  مؤلفه‌های جابجایی متناظر با نقطه کنترلی  $I$ ام است.

<sup>۱</sup>Cox-De boor

اصل همیلتون به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \Pi dt = 0 \quad (32)$$

که در آن  $t_1$  و  $t_2$  دو زمان دلخواه هستند. با جایگذاری معادله (31) در معادلات (21) و (26) و استفاده از اصل همیلتون، فرم گسسته معادلات ارتعاشات آزاد تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانو صفحات گرافن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (33)$$

که در آن  $\mathbf{K}$ ، ماتریس سفتی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{K} = \int_0^L \widehat{\mathbf{B}}_k^T \mathbf{C}_b \widehat{\mathbf{B}}_k dx \quad (34)$$

همچنین  $\mathbf{M}$  ماتریس جرم است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{M} = \int_0^L \widehat{\mathbf{B}}_m^T \Theta \widehat{\mathbf{B}}_m dx \quad (35)$$

که در آن:

$$\widehat{\mathbf{B}}_k^I = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_I}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2 R_I}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 R_I}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_I \\ 0 & 0 & \frac{\partial R_I}{\partial x} & \frac{\partial R_I}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \widehat{\mathbf{B}}_m^I = \begin{bmatrix} R_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial R_I}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial R_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & R_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_I \end{bmatrix} \quad (36)$$

## ۵- نتایج عددی

در این قسمت، با استفاده از فرمول بندی پیشنهادی بخش‌های قبل، نتایج تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانو صفحات گرافن ارائه می‌شود. در ابتدا همگرایی نتایج به دست آمده با استفاده از روش عددی آیزوژنومتریک بررسی می‌گردد. سپس این نتایج با نتایج موجود در منابع در دسترس مقایسه می‌شود. بعد از اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، اثر پارامترهای مختلف مرتبط با ماده و همچنین هندسه بر روی رفتار ارتعاش آزاد تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانو صفحات گرافن به صورت هدفمند تابعی بررسی شده و نتایج به دست آمده در قالب جدول یا نمودار ارائه می‌گردد.

در پژوهش حاضر چهار نوع شرط مرزی در نظر گرفته شده است. این شرایط عبارتند از: ساده-ساده یا S-S، گیردار-گیردار یا C-C، ساده-گیردار یا C-S و آزاد-گیردار یا C-F. نحوه اعمال این چهار شرط مرزی در جدول (۲) خلاصه شده است.

همانگونه که قبلاً گفته شد، تیر نانوکامپوزیتی مورد بررسی در این تحقیق از چند لایه تشکیل شده که با صفحات گرافن تقویت شده است. خواص مکانیکی اجزاء تقویت کننده (گرافن) و زمینه (اپوکسی) در جدول (۳) گزارش شده است.

جدول ۲- نحوه اعمال شرایط مرزی

نحوه اعمال		شرط مرزی
$x = 0$	$x = L$	
$u = w_b = w_s = w_z = 0$	$w_b = w_s = w_z = 0$	S-S
$u = w_b = w_s = w_z = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_z}{\partial x} = 0$	$u = w_b = w_s = w_z = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_z}{\partial x} = 0$	C-C
$u = w_b = w_s = w_z = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_z}{\partial x} = 0$	$w_b = w_s = w_z = 0$	C-S
$u = w_b = w_s = w_z = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_z}{\partial x} = 0$	----	C-F

جدول ۳- خواص مکانیکی اجزاء تشکیل دهنده تیر [۲۳]

جز زمینه (اپوکسی)	جز تقویت کننده (گرافن)	خاصیت
۳	۱۰۱۰	مدول الاستیسیته (گیگا پاسکال)
۱۲۰۰	۱۰۶۲/۵	چگالی (کیلوگرم بر متر مکعب)
۰/۳۴	۰/۱۸۶	ضریب پواسون

همچنین فرکانس‌های بی‌بعد استفاده شده در مثال‌های عددی به صورت زیر هستند:

$$\bar{\omega} = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho}{E}}$$

$$\tilde{\omega} = \omega L \sqrt{\rho_M(1 - \nu_M^2)/E_M}$$

$$\hat{\omega} = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_M}{E_M}}$$

## ۵-۱- مطالعه همگرایی روش عددی و اعتبارسنجی

در قدم اول همگرایی روش عددی بررسی می‌شود. این کار در قالب چندین مثال انجام شده و نتایج ارائه شده در این مثال‌ها با نتایج موجود در منابع مختلف مقایسه می‌گردد. در اولین مثال، سه فرکانس اول بی‌بعد ( $\bar{\omega}$ ) برای یک تیر آیزوتروپیک با شرط مرزی S-S محاسبه شده و در جدول (۴) فهرست شده است. به منظور بررسی همگرایی، نتایج حاضر برای المان‌های مختلف به دست آمده و این نتایج با نتایج منتشر شده توسط وانگ<sup>۱</sup> و کیانی [۲۴] و همچنین ماتسوناگا<sup>۲</sup> [۴۲] مقایسه شده‌اند. این نتایج به ترتیب بر مبنای تئوری شبه سه بعدی و تئوری الاستیسیته سه بعدی به دست آمده‌اند. همانطور که از داده‌های این جدول معلوم است، همگرایی روش عددی آیزوژئومتریکی بر پایه تئوری شبه سه بعدی عالی بوده و همچنین انطباق بسیار خوبی بین نتایج حاضر و نتایج گزارش شده در مراجع [۲۴] و [۴۲] وجود دارد.

در مثال دوم سه فرکانس اول بی‌بعد ( $\bar{\omega}$ ) برای یک تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن با شرط مرزی C-C به دست آمده و در جدول (۵) نمایش داده شده است.

**جدول ۴- مطالعه همگرایی و مقایسه سه فرکانس اول بی‌بعد ( $\bar{\omega} = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho}{E}}$ ) برای تیر آیزوتروپیک با شرط مرزی S-S، ( $L = 1 \text{ m}, \nu = 0.3$ )**

$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_1$	تعداد المان	روش	$L/h$
۱۰۹/۴۶۸۳	۴۶/۷۶۴۱	۹/۷۱۵۱	۱	حاضر (تئوری شبه سه بعدی)	۱۰
۷۸/۴۷۸۶	۳۷/۳۴۰۸	۹/۷۱۲۳	۳		
۷۸/۵۹۷۵	۳۷/۱۶۵۴	۹/۷۱۲۱	۵		
۷۸/۴۴۶۶	۳۷/۱۶۲۲	۹/۷۱۲۱	۷		
۷۸/۰۴۱۴	۳۷/۱۶۱۹	۹/۷۱۲۱	۹		
۷۸/۰۴۱۴	۳۷/۱۶۱۹	۹/۷۱۲۱	۱۱		
۷۸/۴۳۳۹	۳۷/۱۶۱۹	۹/۷۱۲۱		وانگ و کیانی (تئوری شبه سه بعدی) [۲۴]	
۷۸/۴۲۶۴	۳۷/۱۶۱۰	۹/۷۱۲۱		ماتسوناگا (تئوری الاستیسیته سه بعدی) [۴۲]	
۷۸/۹۰۶۸	۳۸/۹۴۷۵	۹/۲۹۳۱	۱	حاضر (تئوری شبه سه بعدی)	۵
۶۲/۰۹۵۴	۳۲/۴۷۷۰	۹/۲۹۰۶	۳		
۶۲/۱۶۶۱	۳۲/۳۴۹۹	۹/۲۹۰۵	۵		
۶۲/۰۷۶۵	۳۲/۳۴۷۷	۹/۲۹۰۵	۷		
۶۲/۰۷۰۴	۳۲/۳۴۷۴	۹/۲۹۰۵	۹		
۶۲/۰۶۹۵	۳۲/۳۴۷۴	۹/۲۹۰۵	۱۱		
۶۲/۰۶۹۳	۳۲/۳۴۷۴	۹/۲۹۰۵	۱۳		
۶۲/۰۶۹۲	۳۲/۳۴۷۴	۹/۲۹۰۵		وانگ و کیانی (تئوری شبه سه بعدی) [۲۴]	
۶۲/۰۱۲۶	۳۲/۳۳۹۱	۹/۲۹۰۳		ماتسوناگا (تئوری الاستیسیته سه بعدی) [۴۲]	

<sup>1</sup> Wang

<sup>2</sup> Matsunaga

این نتایج برای یک تیر با  $N_L = 10$  و درصد وزنی  $W_{GPL} = 0.3\%$ ، مشخصات هندسی  $L/h = 10$ ،  $L = 1m$  و همچنین الگوهای مختلف توزیع گرافن ارائه گردیده است. علاوه بر نتایج حاضر، نتایج به دست آمده توسط مطالعات قبلی نیز در این جدول ارائه گردیده است. این نتایج عبارتند از: نتایج وو<sup>۱</sup> و همکاران که با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی<sup>۲</sup> بر مبنای تئوری تیموشنکو به دست آمده است، نتایج کارامانلی و وو که با استفاده از روش المان محدود بر اساس دو تئوری تیموشنکو و شبه سه بعدی به دست آمده و نتایج گودرزی هفشجانی و کیانی که با استفاده از روش ریتز<sup>۳</sup> و تئوری تیموشنکو حاصل شده است. همانطور که معلوم است، نتایج حاضر بر اساس تئوری شبه سه بعدی با نتایج کارامانلی و وو که بر مبنای تئوری شبه سه بعدی به دست آمده، مطابقت بسیار خوبی دارد.

**جدول ۵-** مقایسه سه فرکانس اول بی بعد  $(\tilde{\omega} = \omega L \sqrt{\rho_M(1 - \nu_M^2)/E_M})$  برای تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن با شرط مرزی C-C. ( $L = 1m, L/h = 10, N_L = 10, W_{GPL} = 0.3\%$ )

$\tilde{\omega}_3$	$\tilde{\omega}_2$	$\tilde{\omega}_1$	روش	الگوی توزیع
۳/۷۶۵۴	۲/۱۱۲۳	۰/۸۱۰۵	حاضر (تئوری شبه سه بعدی)	U-GPLRC
۳/۸۶۶۲	۲/۱۵۴۶	۰/۸۴۷۵	وو و همکاران (تئوری تیموشنکو) [۸]	
۲/۸۹۲۱	۲/۲۰۰۰	۰/۸۴۸۸	کارامانلی و وو (تئوری تیموشنکو) [۲۶]	
۳/۷۶۵۰	۲/۱۱۲۲	۰/۸۱۰۴	کارامانلی و وو (تئوری شبه سه بعدی) [۲۶]	
۳/۸۶۶۳	۲/۱۵۴۸	۰/۸۴۷۴	گودرزی هفشجانی و کیانی (تئوری تیموشنکو) [۴۳]	
۳/۹۲۴۳	۲/۲۵۴۳	۰/۸۷۹۴	حاضر (تئوری شبه سه بعدی)	X-GPLRC
۴/۱۳۹۹	۲/۳۳۲۵	۰/۹۲۹۳	وو و همکاران (تئوری تیموشنکو) [۸]	
۴/۰۴۰۵	۲/۳۳۹۴	۰/۹۱۸۶	کارامانلی و وو (تئوری تیموشنکو) [۲۶]	
۳/۹۲۳۹	۲/۲۵۴۲	۰/۸۷۹۳	کارامانلی و وو (تئوری شبه سه بعدی) [۲۶]	
۴/۱۳۹۹	۲/۳۳۲۷	۰/۹۲۹۲	گودرزی هفشجانی و کیانی (تئوری تیموشنکو) [۴۳]	O-GPLRC
۳/۴۵۸۴	۱/۹۰۱۲	۰/۷۲۰۱	حاضر (تئوری شبه سه بعدی)	
۳/۵۱۷۱	۱/۹۳۵۵	۰/۷۵۰۸	وو و همکاران (تئوری تیموشنکو) [۸]	
۳/۵۸۶۶	۱/۹۸۵۷	۰/۷۵۵۷	کارامانلی و وو (تئوری تیموشنکو) [۲۶]	
۳/۴۵۸۱	۱/۹۰۱۱	۰/۷۲۰۱	کارامانلی و وو (تئوری شبه سه بعدی) [۲۶]	V-GPLRC
۳/۵۱۷۳	۱/۹۳۵۷	۰/۷۵۰۷	گودرزی هفشجانی و کیانی (تئوری تیموشنکو) [۴۳]	
۳/۶۵۹۷	۲/۰۴۵۴	۰/۷۸۳۱	حاضر (تئوری شبه سه بعدی)	
۳/۷۵۱۲	۲/۰۸۳۵	۰/۸۱۶۴	وو و همکاران (تئوری تیموشنکو) [۸]	
۳/۷۷۴۹	۲/۱۲۴۶	۰/۸۱۷۵	کارامانلی و وو (تئوری تیموشنکو) [۲۶]	V-GPLRC
۳/۶۵۹۳	۲/۰۴۵۳	۰/۷۸۳۱	کارامانلی و وو (تئوری شبه سه بعدی) [۲۶]	
۳/۷۵۱۴	۲/۰۸۳۷	۰/۸۱۶۳	گودرزی هفشجانی و کیانی (تئوری تیموشنکو) [۴۳]	

<sup>1</sup> Wu<sup>2</sup> Differential Quadrature Method (DQM)<sup>3</sup> Ritz method

در مثال بعد یک تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن با شرط مرزی S-S در نظر گرفته شده و نتایج حاصل از تحلیل حاضر برای چهار فرکانس اول بی بعد ( $\hat{\omega}$ ) در جدول (۶) لیست شده است. در این مثال الگوهای توزیع مختلف گرافن و چند نسبت طول به ضخامت در نظر گرفته شده است. این نتایج با آنچه توسط جعفری و کیانی [۲۳] توسط حل ناپیر و بر اساس تئوری شبه سه بعدی منتشر شده مقایسه گردیده است. از نتایج جدول مشخص است که این دو مجموعه نتایج کاملاً با هم همخوانی دارند.

پس از اطمینان از دقت و کارایی روش عددی حاضر در حل مساله ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن، در ادامه با ارائه یک مطالعه پارامتریک، اثر پارامترهای مختلف هندسی و مرتبط با ماده تیر، بر فرکانس‌های طبیعی تیر بررسی شده است. این پارامترها عبارتند از: تعداد لایه‌ها، الگوهای توزیع مختلف نانوصفحات گرافن، درصد وزنی گرافن، نسبت طول به ضخامت و شرط مرزی.

در اولین مطالعه اثر تعداد لایه‌ها بر فرکانس اصلی بی بعد ( $\hat{\omega}$ ) در جدول (۷) بررسی شده است. در این بررسی هفت تعداد لایه یعنی ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۸، ۲۲، ۲۶، ۳۰ و ۱۰۰۰۰ لحاظ گردیده است. بایستی توجه شود که تعداد لایه  $N_L = 10000$  بیانگر یک تیر پیوسته است. از نقطه نظر فرآیند ساخت تعداد لایه‌های کمتر به دلیل هزینه‌های کمتر ساخت و همچنین هزینه‌های محاسباتی کمتر بیشتر مورد توجه است. با مقایسه داده‌های جدول (۷) می‌توان به این نتیجه رسید که اختلاف بین نتایج متناظر با  $N_L = 14$  و  $N_L = 10000$  در بیشترین حالت ۰/۶ درصد است. از این رو، از این به بعد از تعداد لایه  $N_L = 14$  جهت ارائه نتایج استفاده می‌شود.

جدول ۶- مقایسه چهار فرکانس اول بی بعد ( $\hat{\omega} = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_M}{E_M}}$ ) برای تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن با شرط مرزی S-S ( $L = 1m, N_L = 10, W_{GPL} = 0.5\%$ )

$\hat{\omega}_4$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_1$	روش	$L/h$	الگوی توزیع
۲۱۰/۴۴۹۰	۱۲۷/۷۰۲۶	۶۰/۵۶۶۷	۱۵/۸۴۱۵	حاضر	۱۰	U-GPLRC
۲۱۰/۴۴۹۰	۱۲۷/۷۰۲۶	۶۰/۵۶۶۷	۱۵/۸۴۱۵	جعفری و کیانی [۲۳]		
۱۵۳/۳۷۳۱	۱۰۰/۷۷۴۱	۵۲/۶۱۲۲	۱۵/۱۴۱۷	حاضر	۵	
۱۵۳/۳۷۳۱	۱۰۰/۷۷۴۱	۵۲/۶۱۲۲	۱۵/۱۴۱۷	جعفری و کیانی [۲۳]		
۲۲۲/۴۷۳۵	۱۳۸/۲۵۷۴	۶۷/۱۸۲۶	۱۷/۹۲۰۶	حاضر	۱۰	X-GPLRC
۲۲۲/۴۷۳۴	۱۳۸/۲۵۷۴	۶۷/۱۸۲۶	۱۷/۹۲۰۶	جعفری و کیانی [۲۳]		
۱۵۱/۵۳۷۹	۱۰۲/۳۹۹۲	۵۵/۶۱۸۴	۱۶/۷۹۵۷	حاضر	۵	
۱۵۱/۵۳۷۹	۱۰۲/۳۹۹۲	۵۵/۶۱۸۴	۱۶/۷۹۵۷	جعفری و کیانی [۲۳]		
۱۸۵/۹۱۹۴	۱۱۰/۷۷۱۳	۵۱/۶۲۶۲	۱۳/۳۲۴۹	حاضر	۱۰	O-GPLRC
۱۸۵/۹۱۹۳	۱۱۰/۷۷۱۳	۵۱/۶۲۶۲	۱۳/۳۲۴۹	جعفری و کیانی [۲۳]		
۱۴۳/۶۴۷۳	۹۲/۰۰۰۹	۴۶/۴۷۹۸	۱۲/۹۰۶۶	حاضر	۵	
۱۴۳/۶۴۷۳	۹۲/۰۰۰۹	۴۶/۴۷۹۸	۱۲/۹۰۶۶	جعفری و کیانی [۲۳]		
۲۰۰/۱۰۸۸	۱۲۱/۶۸۴۳	۵۶/۹۶۳۸	۱۴/۹۱۲۸	حاضر	۱۰	V-GPLRC
۲۰۰/۲۱۷۸	۱۲۱/۰۴۵۵	۵۷/۲۱۱۸	۱۴/۹۲۵۲	جعفری و کیانی [۲۳]		
۱۴۹/۰۲۷۰	۹۶/۵۱۵۹	۵۱/۴۵۹۱	۱۴/۲۵۷۹	حاضر	۵	
۱۴۷/۸۶۸۶	۹۶/۵۵۶۷	۵۰/۰۵۴۵	۱۴/۳۰۳۰	جعفری و کیانی [۲۳]		

**جدول ۷-** تأثیر تعداد لایه‌ها بر فرکانس اصلی بی‌بعد ( $\tilde{\omega} = \omega L \sqrt{\rho_M(1 - \nu_M^2)/E_M}$ ) تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن با الگوهای توزیع مختلف، ( $L = 1\text{m}, L/h = 5, W_{GPL} = 1\%$ )

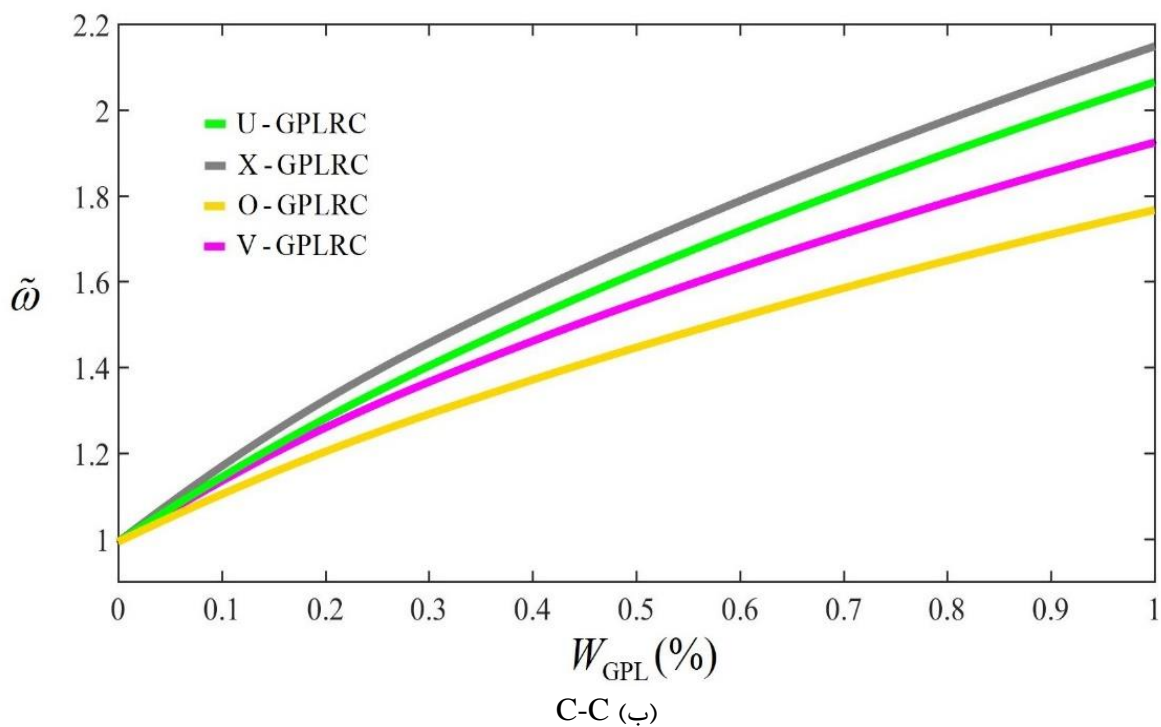
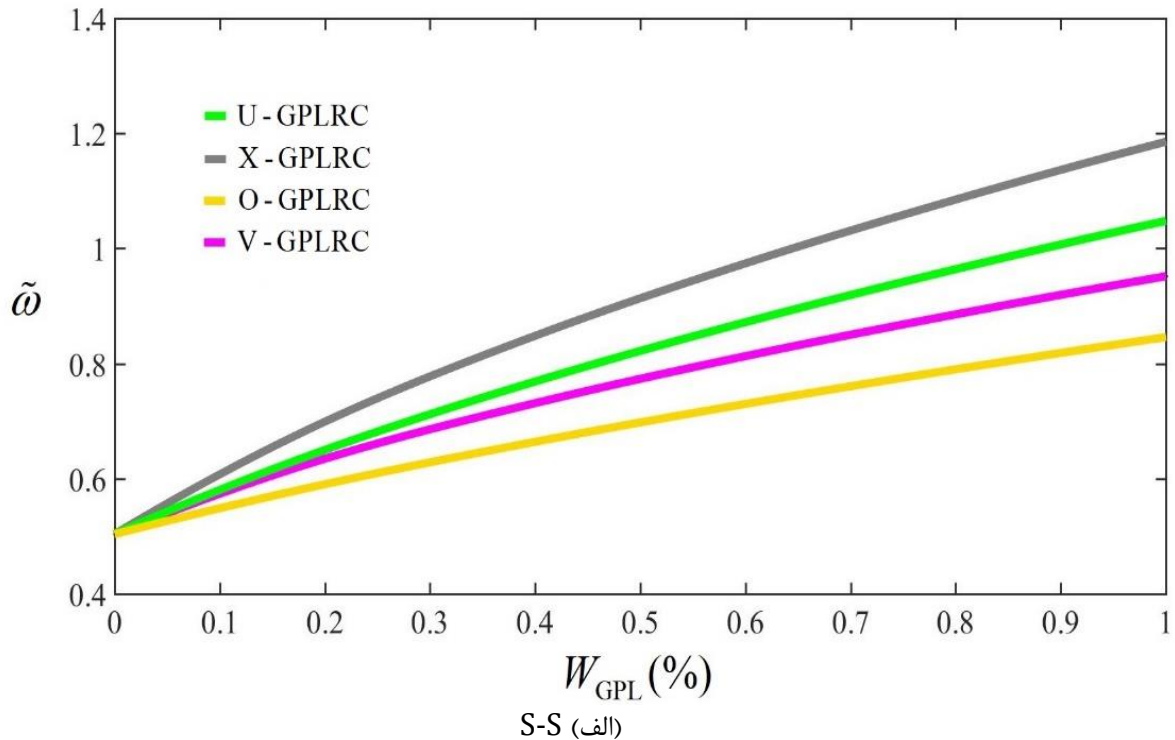
$N_L$								الگوی توزیع	شرط مرزی
۱۰۰۰۰	۳۰	۲۶	۲۲	۱۸	۱۴	۱۰	۶		
۱/۰۴۸۱	۱/۰۴۸۱	۱/۰۴۸۱	۱/۰۴۸۱	۱/۰۴۸۱	۱/۰۴۸۱	۱/۰۴۸۱	۱/۰۴۸۱	U-GPLRC	S-S
۱/۱۸۸۰	۱/۱۸۷۵	۱/۱۸۷۳	۱/۱۸۷۰	۱/۱۸۶۶	۱/۱۸۵۶	۱/۱۸۳۳	۱/۱۷۴۹	X-GPLRC	
۰/۸۴۱۰	۰/۸۴۲۱	۰/۸۴۲۵	۰/۸۴۳۱	۰/۸۴۴۱	۰/۸۴۶۱	۰/۸۵۰۹	۰/۸۶۸۱	O-GPLRC	
۰/۹۵۰۸	۰/۹۵۱۰	۰/۹۵۱۱	۰/۹۵۱۲	۰/۹۵۱۴	۰/۹۵۱۹	۰/۹۵۲۹	۰/۹۵۶۶	V-GPLRC	
۲/۰۶۴۸	۲/۰۶۴۸	۲/۰۶۴۸	۲/۰۶۴۸	۲/۰۶۴۸	۲/۰۶۴۸	۲/۰۶۴۸	۲/۰۶۴۸	U-GPLRC	C-C
۲/۱۴۸۷	۲/۱۴۸۵	۲/۱۴۸۴	۲/۱۴۸۴	۲/۱۴۸۲	۲/۱۴۷۹	۲/۱۴۷۱	۲/۱۴۴۱	X-GPLRC	
۱/۷۶۰۹	۱/۷۶۳۰	۱/۷۶۳۶	۱/۷۶۴۷	۱/۷۶۶۶	۱/۷۷۰۳	۱/۷۷۹۱	۱/۸۱۰۱	O-GPLRC	
۱/۹۲۲۳	۱/۹۲۲۷	۱/۹۲۲۸	۱/۹۲۳۰	۱/۹۲۳۳	۱/۹۲۴۰	۱/۹۲۵۷	۱/۹۳۱۶	V-GPLRC	

همچنین می‌توان گفت که در تمامی حالات بالاترین فرکانس طبیعی مربوط به توزیع X-GPLRC بوده و پایین‌ترین نیز مربوط به توزیع O-GPLRC است. دلیل این امر این است که در توزیع X-GPLRC لایه‌هایی که کسر حجمی بالاتر و در نتیجه سفتی خمشی بیشتری دارند در فاصله دورتری نسبت به محور خنثی قرار گرفته‌اند که باعث می‌شود سفتی خمشی کل تیر افزایش یابد. در مورد توزیع O-GPLRC دقیقاً عکس این مساله اتفاق می‌افتد. به‌عنوان یک نکته دیگر می‌توان گفت که در مورد توزیع X-GPLRC با افزایش تعداد لایه‌ها، فرکانس طبیعی به صورت جزئی افزایش می‌یابد. در حالیکه در توزیع O-GPLRC و V-GPLRC افزایش تعداد لایه‌ها باعث کاهش جزئی فرکانس طبیعی خواهد شد. در مورد توزیع U-GPLRC نیز افزایش تعداد لایه‌ها باعث تغییر فرکانس طبیعی نخواهد شد، به این دلیل که در این حالت کسر حجمی تمامی لایه‌ها یکسان و ثابت بوده و در نتیجه تمامی لایه‌ها مشابه‌اند.

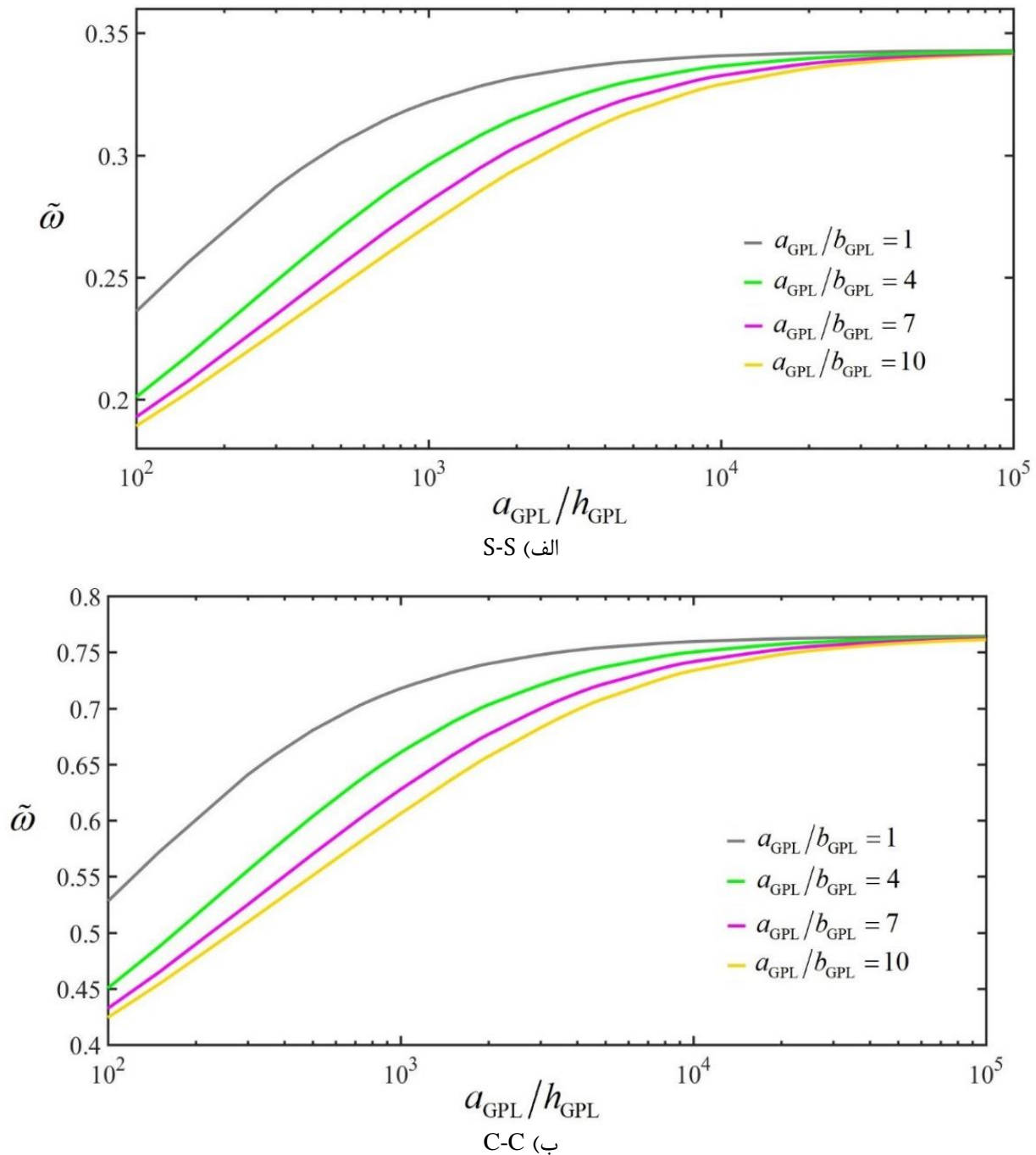
در شکل (۳)، اثر درصد وزنی گرافن بر فرکانس اصلی بی‌بعد ( $\tilde{\omega}$ ) تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن با الگوهای توزیع مختلف و دو شرط مرزی S-S و C-C بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش درصد وزنی گرافن فرکانس طبیعی تیر زیاد می‌شود. این امر بدین علت است که با افزایش درصد وزنی گرافن مدول الاستیسیته تیر افزایش یافته و فرکانس طبیعی نیز بیشتر می‌شود.

در شکل (۴)، اثر هندسه و اندازه نانوصفحات گرافن بر حسب دو پارامتر بی‌بعد  $a_{GPL}/h_{GPL}$  و  $a_{GPL}/b_{GPL}$  بر فرکانس اصلی بی‌بعد ( $\tilde{\omega}$ ) تیرهای نانو کامپوزیتی مطالعه شده است. همانطور که قبلاً گفته شد،  $a_{GPL}$ ،  $b_{GPL}$  و  $h_{GPL}$  به ترتیب بیانگر طول، عرض و ضخامت نانوصفحات گرافن می‌باشند. در این بررسی طول صفحات گرافن یعنی  $a_{GPL}$  ثابت در نظر گرفته شده است. همانطور که در این شکل دیده می‌شود، برای هر دو شرط مرزی، با افزایش نسبت  $a_{GPL}/h_{GPL}$  فرکانس اصلی تیر افزایش می‌یابد، بدین معنی که پلاکت‌های گرافنی با لایه‌های گرافن کمتر، تقویت کننده‌های بهتری بوده و استحکام سازه را به طور موثرتری افزایش می‌دهند.

به علاوه در یک نسبت مشخص  $a_{GPL}/h_{GPL}$ ، با افزایش  $a_{GPL}/b_{GPL}$  فرکانس اصلی تیر به علت کم شدن سطح تماس تقویت کننده گرافن با ماتریس کاهش می یابد. همچنین می توان گفت در نسبت های بالای  $a_{GPL}/h_{GPL}$ ، افزایش بیشتر  $a_{GPL}/b_{GPL}$  بر افزایش فرکانس اصلی تیر بی اثر است.



**شکل ۳-** تأثیر درصد وزنی گرافن بر فرکانس اصلی بی بعد  $\left(\tilde{\omega} = \omega L \sqrt{\rho_M(1 - \nu_M^2)/E_M}\right)$  تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفات گرافن با الگوهای توزیع مختلف و شرایط مرزی S-S و C-C،  $(L = 1m, L/h = 5, N_L = 14)$



**شکل ۴-** تاثیر طول به عرض ( $a_{GPL}/b_{GPL}$ ) و طول به ضخامت ( $a_{GPL}/h_{GPL}$ ) نانوصفحات گرافن بر فرکانس اصلی بی‌بعد  $\left(\tilde{\omega} = \omega L \sqrt{\rho_M(1 - \nu_M^2) / E_M}\right)$  تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن با الگوی توزیع X و شرایط مرزی S-S و C-C ( $L = 1m, L/h = 20, N_L = 14, W_{GPL} = 1\%$ )

در مطالعه‌های دیگر، اثر تغییر نسبت طول به ضخامت بر فرکانس اصلی بی‌بعد ( $\tilde{\omega}$ ) تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن با الگوهای توزیع مختلف و دو شرط مرزی S-S و C-C در جدول (۸) بررسی شده است. در این بررسی شش نسبت طول به ضخامت یعنی ۲۰، ۱۵، ۱۰، ۸، ۵ و ۴ در نظر گرفته شده است که متناظر با تیرهای نازک، نسبتاً ضخیم و ضخیم است. همانطور که مشخص است با افزایش نسبت  $L/h$  فرکانس طبیعی تیر به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد.

**جدول ۸-** تأثیر نسبت طول به ضخامت بر فرکانس اصلی بی‌بعد  $(\tilde{\omega} = \omega L \sqrt{\rho_M(1 - \nu_M^2)/E_M})$  تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن با الگوهای توزیع مختلف، ( $L = 1\text{m}, L/h = 5, N_L = 14, W_{GPL} = 1\%$ )

L/h						الگوی توزیع	شرط مرزی
۴	۵	۸	۱۰	۱۵	۲۰		
۱/۲۷۰۶	۱/۰۴۸۱	۰/۶۷۹۳	۰/۵۴۸۳	۰/۳۶۸۸	۰/۲۷۷۵	U-GPLRC	S-S
۱/۴۱۴۸	۱/۱۸۵۶	۰/۷۸۴۵	۰/۶۳۶۷	۰/۴۳۰۸	۰/۳۲۴۸	X-GPLRC	
۱/۰۳۶۳	۰/۸۴۶۱	۰/۵۴۱۴	۰/۴۳۵۵	۰/۲۹۲۰	۰/۲۱۹۵	O-GPLRC	
۱/۱۵۴۰	۰/۹۵۱۹	۰/۶۱۶۷	۰/۴۹۷۸	۰/۳۳۴۸	۰/۲۵۱۹	V-GPLRC	
۲/۳۷۱۷	۲/۰۶۴۸	۱/۴۴۵۸	۱/۱۹۲۹	۰/۸۲۲۱	۰/۶۲۴۳	U-GPLRC	C-C
۲/۳۹۲۷	۲/۱۴۷۹	۱/۵۹۰۷	۱/۳۳۸۰	۰/۹۴۳۵	۰/۷۲۳۲	X-GPLRC	
۲/۰۸۹۷	۱/۷۷۰۳	۱/۱۸۸۱	۰/۹۶۷۸	۰/۶۵۷۵	۰/۴۹۶۶	O-GPLRC	
۲/۲۳۰۱	۱/۹۲۴۰	۱/۳۲۸۶	۱/۰۹۱۷	۰/۷۴۸۸	۰/۵۶۷۶	V-GPLRC	

در مطالعه آخر اثر شرط مرزی بر شش فرکانس اول بی‌بعد  $(\tilde{\omega})$  تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن با الگوهای توزیع مختلف در جدول (۹) مورد بررسی گرفته است. همانطور که مشخص است و پیش از این نیز انتظار می‌رفت، هر چه در لبه‌های تیر قیود بیشتری اعمال شود، فرکانس طبیعی تیر نیز بیشتر خواهد شد. این بدین معنی است که در تمامی حالات تیر نانو کامپوزیتی با شرط مرزی C-C بیشترین و تیر با شرط مرزی C-F کمترین فرکانس را خواهد داشت.

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی پلیمری تقویت شده با نانوصفحات گرافن به صورت هدفمند تابعی با استفاده از روش آیزوژئومتریک مورد تحقیق قرار گرفت. خواص مکانیکی معادل این تیرها با استفاده از مدل هالپین-سای تخمین زده شد. معادلات حاکم بر تیر با استفاده از اصل همیلتون و بر مبنای تئوری شبه سه بعدی ارائه گردید. سپس این معادلات با استفاده از توابع نریز گسسته‌سازی شدند. در بخش نتایج، ابتدا رفتار همگرایی و دقت فرمول‌بندی پیشنهادی در قالب چندین مثال بررسی گردید. پس از اطمینان از کارایی و دقت روش عددی، اثرات تغییر پارامترهای مرتبط با ماده و هندسه تیر نانو کامپوزیتی بر رفتار ارتعاشی آن مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. با استفاده از نتایج ارائه شده می‌توان نتایج کلی زیر را گرفت:

- در میان الگوهای هدفمند در نظر گرفته شده با افزایش تعداد لایه‌ها، در مورد توزیع X، فرکانس طبیعی تیر افزایش می‌یابد. در حالیکه در مورد دو توزیع O و V فرکانس طبیعی تیر کاهش می‌یابد.
- یک تیر نانو کامپوزیتی هدفمند با  $N_L = 14$ ، تقریب بسیار خوبی برای یک تیر با تغییرات پیوسته خواص مکانیکی در راستای ضخامت آن است.
- در تمامی حالات، بالاترین فرکانس طبیعی مربوط به الگوی توزیع X و کمترین فرکانس طبیعی مربوط به الگوی توزیع O است. این امر بدین دلیل است که توزیع صفحات گرافن در لایه‌های بالایی و پایینی تیر، نسبت به توزیع این صفحات در لایه میانی بسیار موثرتر است.

- درصد وزنی گرافن اثر قابل توجهی بر فرکانس طبیعی دارد در تمامی حالات، با افزایش درصد وزنی تقویت کننده گرافن، سفتی تیر نانوکامپوزیتی و متعاقباً فرکانس تیر افزایش می‌یابد.
- با افزایش نسبت طول به ضخامت و طول به عرض نانوصفحات گرافن، فرکانس اصلی تیرهای کامپوزیتی پلیمری تقویت شده با نانوصفحات گرافن به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد.

جدول ۹- تاثیر شرط مرزی بر شش فرکانس اول بی بعد  $(\tilde{\omega} = \omega L \sqrt{\rho_M(1 - \nu_M^2)/E_M})$  تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحات گرافن با الگوهای توزیع مختلف،  $(L = 1\text{m}, L/h = 10, N_L = 14, W_{GPL} = 1\%)$ .

$\tilde{\omega}_6$	$\tilde{\omega}_5$	$\tilde{\omega}_4$	$\tilde{\omega}_3$	$\tilde{\omega}_2$	$\tilde{\omega}_1$	الگوی توزیع	شرط مرزی
۹/۷۹۵۵	۷/۲۸۴۰	۴/۴۱۹۹	۳/۲۶۵۲	۲/۰۹۶۲	۰/۵۴۸۳	U-GPLRC	S-S
۹/۷۹۵۵	۷/۷۳۶۱	۴/۸۴۲۳	۳/۲۶۵۲	۲/۳۷۱۲	۰/۶۳۶۷	X-GPLRC	
۹/۰۴۵۶	۶/۱۴۱۴	۳/۶۴۴۴	۳/۲۶۵۲	۱/۶۹۲۲	۰/۴۳۵۵	O-GPLRC	
۹/۳۹۳۴	۶/۷۱۷۴	۴/۰۹۳۹	۳/۱۶۷۸	۱/۹۰۰۵	۰/۴۹۷۸	V-GPLRC	
۱۱/۶۰۸۷	۸/۵۱۸۴	۶/۵۳۰۳	۵/۵۴۲۸	۳/۱۰۹۲	۱/۱۹۲۹	U-GPLRC	C-C
۱۱/۶۴۶۹	۸/۷۳۰۲	۶/۵۳۰۴	۵/۸۱۳۴	۳/۳۹۰۳	۱/۳۳۸۰	X-GPLRC	
۱۰/۳۰۲۸	۷/۴۰۰۸	۶/۵۳۰۴	۴/۷۲۵۲	۲/۵۷۱۰	۰/۹۶۷۸	O-GPLRC	
۱۰/۸۸۲۶	۷/۹۴۵۷	۶/۴۶۲۵	۵/۱۴۴۹	۲/۸۶۰۰	۱/۰۹۱۷	V-GPLRC	
۹/۷۹۵۵	۷/۸۸۶۵	۴/۹۹۹۲	۳/۲۶۵۲	۲/۵۸۰۲	۰/۸۴۴۹	U-GPLRC	C-S
۹/۷۹۵۵	۸/۲۱۷۰	۵/۳۶۰۸	۳/۲۶۵۲	۲/۸۶۰۴	۰/۹۶۸۵	X-GPLRC	
۹/۶۹۲۷	۶/۷۵۶۸	۴/۱۸۶۷	۳/۲۶۵۲	۲/۱۱۰۱	۰/۶۷۶۳	O-GPLRC	
۹/۶۵۵۸	۷/۳۱۸۶	۴/۶۱۱۶	۳/۲۳۰۲	۲/۳۶۵۰	۰/۷۶۹۷	V-GPLRC	
۸/۶۴۱۳	۵/۶۶۷۳	۳/۲۶۵۲	۳/۱۲۰۰	۱/۱۸۵۱	۰/۱۹۷۷	U-GPLRC	C-F
۹/۰۱۳۱	۶/۰۶۹۵	۳/۴۴۴۹	۳/۲۶۵۲	۱/۳۴۸۵	۰/۲۳۰۸	X-GPLRC	
۷/۴۰۱۱	۴/۷۵۳۱	۳/۲۶۵۲	۲/۵۵۹۱	۰/۹۵۲۹	۰/۱۵۶۵	O-GPLRC	
۷/۹۹۰۶	۵/۲۲۳۸	۳/۲۳۵۷	۲/۸۵۴۳	۱/۰۸۰۰	۰/۱۷۹۴	V-GPLRC	

## مراجع

[1] R. Shokri-Oojghaz, R. Moradi-Dastjerdi, H. Mohammadi, and K. Behdian, "Stress Distributions in Nanocomposite Sandwich Cylinders Reinforced by Aggregated Carbon Nanotube", *Polymer Composites*, Vol. 40, pp. 1918-1927, 2019/01/11/ 2019, <https://doi.org/10.1002/pc.25206>.

[2] H. Bisheh, and A. Alibeigloo, "Bending Behavior of Graphene Reinforced Composite Porous Circular and Annular Plates using Three Dimensional Elasticity", *Iranian Journal of*

*Mechanical Engineering Transactions of ISME*, Vol. 24, pp. 6-27, 2021/12/18/ 2021, <https://doi.org/10.30506/ijmep.2022.117060.1653>.

[3] F. Abbaspour, and H. Arvin Boroujeni, "Buckling Analysis of Micro-plates Reinforced with Graphene Platelets with Piezoelectric Face-sheets", *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of ISME*, Vol. 24, pp. 6-32, 2022/04/05/ 2022, <https://doi.org/10.30506/ijmep.2022.127796.1701>.

[4] H. Mohammadi, O. Weeger, and M. Shojaee, "Isogeometric Technique for Dynamic Instability Analysis of Nanocomposite Folded Plates Based on Higher-order Shear Deformation Theory", *Thin-Walled Structures*, Vol. 177, pp. 109467, 2022/05/19/ 2022, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109467>.

[5] H. Mohammadi, "On the Mechanical Buckling Analysis of FG-GRC Laminated Plates with Temperature-dependent Material Properties using Isogeometric Approach", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 23, pp. 2350092, 2022/10/12/ 2022, <https://doi.org/10.1142/S021945542350092X>, 2019/01/11/ 2019.

[6] H. Babaei, Y. Kiani, and K. K. Żur, "New Insights into Nonlinear Stability of Imperfect Nanocomposite Beams Resting on a Nonlinear Medium", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 118, pp. 106993, 2022/10/07/ 2022, <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106993>.

[7] H. Mohammadi, "Isogeometric Free Vibration Analysis of Trapezoidally Corrugated FG-GRC Laminated Panels using Higher-order Shear Deformation Theory", *Structures*, Vol. 48, pp. 642-656, 2023/01/01/ 2023, <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.01.001>.

[8] H. Wu, J. Yang, and S. Kitipornchai, "Dynamic Instability of Functionally Graded Multilayer Graphene Nanocomposite Beams in Thermal Environment", *Composite Structures*, Vol. 162, pp. 244-254, 2016/12/02/ 2016, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.001>.

[9] Y. Liang, S. Zheng, S. Wang, and D. Chen, "Nonlinear Isogeometric Analysis of Axially Functionally Graded Graphene Platelet-reinforced Composite Curved Beams", *Composite Structures*, Vol. 330, pp. 117871, 2023/12/30/ 2023, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117871>.

[10] P. Han, F. Tian, and H. Babaei, "Thermally Induced Large Deflection Analysis of Graphene Platelet Reinforced Nanocomposite Cylindrical Panels", *Structures*, Vol. 53, pp. 1046-1056, 2023/04/29/ 2023, <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.04.123>.

[11] Y. W. Zhang, and G. L. She, "Nonlinear Low-velocity Impact Response of Graphene Platelet-reinforced Metal Foam Cylindrical Shells under Axial Motion with Geometrical Imperfection", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 111, pp. 6317-6334, 2022/12/23/ 2022, <https://doi.org/10.1007/s11071-022-08186-9>.

[12] C. Chen, D. Li, X. Zhou, and L. Zhou, "Thermal Vibration Analysis of Functionally Graded Graphene Platelets-reinforced Porous Beams using the Transfer Function Method", *Engineering Structures*, Vol. 284, pp. 115963, 2023/03/05/ 2023, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.115963>.

- [13] Z. Dai, and Y. Kiani, “Stability of Higher-order Lattice Composite Cylindrical Shell Reinforced with Graphene Platelets by Means of a Chebyshev Collocation-based Semi-analytical Approach”, *Engineering Structures*, Vol. 296, pp. 116952, 2023/09/22/ 2023, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116952>.
- [14] S. Mollaei, M. Babaei, and K. Asemi, “Torsional Buckling of Functionally Graded Graphene Reinforced Composite Laminated Cylindrical Panel”, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 93, pp. 427–435, 2022/11/15/ 2022, <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02132-2>.
- [15] M. Babaei, F. Kiarasi, M. Soltani Tehrani, A. Hamzei, E. Mohtarami, and K. Asemi, “Three Dimensional Free Vibration Analysis of Functionally Graded Graphene Reinforced Composite Laminated Cylindrical Panel”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, Vol. 12, pp. 3932, 2022/04/13/ 2022, <https://doi.org/10.1177/14644207211073445>.
- [16] M. Mirzaei, and M. Abbasi, “Dynamic Response of Moderately Thick Graphene Reinforced Composite Cylindrical Panels under the Action of Moving Load”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 146, pp. 292-305, 2022/10/27/ 2022, <https://doi.org/10.1016/j.enganbound.2022.10.032>.
- [17] Y. Tian, Q. Li, Y. Feng, Y. Yu, D. Wu, X. Chen, and W. Gao, “Nonlinear Dynamic Analysis of the Functionally Graded Graphene Platelets Reinforced Porous Plate under Moving Mass”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 183, pp. 110363, 2022/11/10/ 2022, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110363>.
- [18] A. Eyvazian, C. Zhang, M. Alkhedher, S. Muhsen, and M. A. Elkotb, “Thermal Buckling and Post-buckling Analyses of Rotating Timoshenko Microbeams Reinforced with Graphene Platelet”, *Composite Structures*, Vol. 304, pp. 116358, 2022/10/07/ 2022, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116358>.
- [19] H. Wu, Z. Zheng, J. Guo, L. Li, Y. Bao, and J. Yang, “Axisymmetric Thermal Postbuckling of Functionally Graded Graphene Nanocomposite Annular Plates with Various Geometric Imperfections”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 185, pp. 110594, 2023/01/31/ 2023, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110594>.
- [20] H. Zhang, W. Ye, S. Sahmani, and B. Safaei, “Quasi-3D Nonlinear Primary Resonance of Randomly Oriented CNT-reinforced Micro/Nano-beams Incorporating Nonlocal and Couple Stress Tensors”, *Acta Mechanica*, Vol. 234, pp. 3259–3285, 2023/03/18/ 2023, <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03554-x>.
- [21] M. Sobhy, M. A. Abazid, and F. H. H. Al Mukahal, “Electro-thermal Buckling of FG Graphene Platelets-strengthened Piezoelectric Beams under Humid Conditions”, *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 14, 2022/04/08/ 2022, <https://doi.org/10.1177/16878132221091005>.
- [22] M. Ganapathi, B. Anirudh, C. Anant, and O. Polit, “Dynamic Characteristics of Functionally Graded Graphene Reinforced Porous Nanocomposite Curved Beams Based on Trigonometric Shear Deformation Theory with Thickness Stretch Effect”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 28, pp. 741-752, 2019/02/18/ 2019, <https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1601310>.

- [23] P. Jafari, and Y. Kiani, “A Four-variable Shear and Normal Deformable Quasi-3D Beam Model to Analyze the Free and Forced Vibrations of FG-GPLRC Beams under Moving Load”, *Acta Mechanica*, Vol. 233, pp. 2797–2814, 2022/05/11/ 2022, <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03256-w>.
- [24] Y. Wang, and Y. Kiani, “Effects of Initial Compression/Tension, Foundation Damping and Pasternak Medium on the Dynamics of Shear and Normal Deformable GPLRC Beams under Moving Load”, *Materials Today Communications*, Vol. 33, pp. 104938, 2022/11/13/ 2022, <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2022.104938>.
- [25] R. Priyanka, C. M. Twinkle, and J. Pitchaimani, “Stability and Dynamic Behavior of Porous FGM Beam: Influence of Graded Porosity, Graphene Platelets, and Axially Varying Loads”, *Engineering with Computers*, Vol. 38, pp. 4347–4366, 2021/08/02/ 2021, <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01478-5>.
- [26] A. Karamanli, and T. P. Vo, “Finite Element Model for Carbon Nanotube-reinforced and Graphene Nanoplatelet-reinforced Composite Beams”, *Composite Structures*, Vol. 264, pp. 113739, 2021/02/14/ 2021, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113739>.
- [27] H. Mohammadi, M. Shojaee, and Y. Kiani, “A Simplified Isogeometric Approach for Vibrational Analysis of Nanocomposite Panels with a Free-form Curve”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 183, pp. 110426, 2022/11/26/ 2022, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110426>.
- [28] H. Mohammadi, “Isogeometric Thermal Buckling Analysis of GPL Reinforced Composite Laminated Folded Plates”, *Engineering Structures*, Vol. 255, pp. 113905, 2022/01/13/ 2022, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.113905>.
- [29] H. Mohammadi, “Isogeometric Approach for Thermal Buckling Analysis of FG Graphene Platelet Reinforced Composite Trapezoidally Corrugated Laminated Panels”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 151, pp. 244-254, 2023/03/08/ 2023, <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.03.007>.
- [30] H. Mohammadi, and M. Shojaee, “Application of Isogeometric Method for Shear Buckling Study of Graded Porous Nanocomposite Folded Plates”, *Archive of Applied Mechanics*, 2023/12/30/ 2023, <https://doi.org/10.1007/s00419-023-02522-0>.
- [31] M. Babaei, F. Kiarasi, K. Asemi, R. Dimitri, and F. Tornabene, “Transient Thermal Stresses in FG Porous Rotating Truncated Cones Reinforced by Graphene Platelets”, *Applied Sciences*, Vol. 12, pp. 3932, 2022/04/13/ 2022, <https://doi.org/10.3390/app12083932>.
- [32] M. Khatoonabadi, M. Jafari, F. Kiarasi, M. Hosseini, M. Babaei, and K. Asemi, “Shear Buckling Response of FG Porous Annular Sector Plate Reinforced by Graphene Platelet Subjected to Different Shear Loads”, *Journal of Computational Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 68-86, 2023/03/1/ 2023, <https://doi.org/10.22059/jcamech.2023.352182.784>.
- [33] W. Fang, T. Yu, L. Van Lich, and T. Q. Bui, “Analysis of Thick Porous Beams By a Quasi-3D Theory and Isogeometric Analysis”, *Composite Structures*, Vol. 221, pp. 110890, 2019/04/12/ 2019, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.04.062>.

- [34] J. N. Reddy, “A Simple Higher-order Theory for Laminated Composite Plates”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 745-752, 1984/12/01/ 1984, <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
- [35] M. Touratier, “An Efficient Standard Plate Theory”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 29, pp. 901-916, 1990/10/15/ 1990, [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90165-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90165-Y).
- [36] K. P. Soldatos, “A Transverse Shear Deformation Theory for Homogeneous Monoclinic Plates”, *Acta Mechanica*, Vol. 94, pp. 195-220, 1992/09/01/ 1992, <https://doi.org/10.1007/BF01176650>.
- [37] M. Karama, K. S. Afaq, and S. Mistou, “Mechanical Behaviour of Laminated Composite Beam by the New Multi-layered Laminated Composite Structures Model with Transverse Shear Stress Continuity”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 1525-1546, 2003/01/29/ 2003, [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00647-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00647-9).
- [38] H. Mohammadi, and A. R. Setoodeh, “Free Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotubes Reinforced Composite Skew Folded Plates using the Isogeometric Approach”, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 53, pp. 2239-2260, 2020/03/10/ 2020, <https://doi.org/10.22060/mej.2020.17298.6569>.
- [39] H. Mohammadi, “Isogeometric Free and Forced Vibration Analyses of FG-CNTs Plates Based on a Logarithmic Higher-order Shear Deformation Theory”, *Mechanics of Advanced Composite Structures*, Vol. 8, pp. 435-453, 2021/11/18/ 2021, <https://doi.org/10.22075/mac.2021.23147.1334>.
- [40] H. Mohammadi, and A. R. Setoodeh, “FSDT-based Isogeometric Analysis for Free Vibration Behavior of Functionally Graded Skew Folded Plates”, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, Vol. 44, pp. 841-863, 2019/09/25/ 2019, <https://doi.org/10.1007/s40997-019-00320-0>.
- [41] H. Mohammadi, A. R. Setoodeh, and A. P. Vassilopoulos, “Isogeometric Kirchhoff-love Shell Patches in Free and Forced Vibration of Sinusoidally Corrugated FG Carbon Nanotube-reinforced Composite Panels”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 171, pp. 108707, 2021/11/19/ 2021, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.108707>.
- [42] H. Matsunaga, “Vibration and Buckling of Deep Beam-columns on Two-parameter Elastic Foundations”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, pp. 359-376, 1999/05/26/ 1999, <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2415>.
- [43] S. Goudarzi Hafshejani, and Y. Kiani, “Free Vibration Analysis of Twisted Composite Beam Reinforced with Graphene Platelets”, *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of ISME*, Vol. 25, pp. 128-167, 2023/04/11/ 2023, <https://doi.org/10.30506/ijmep.2023.1972041.1902>.

## Isogeometric Analysis of Free Vibration of Composite Beams Reinforced with Graphene Platelets Based on a Refined Quasi-3D Theory

\*Corresponding author: **Hassan Mohammadi**

Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Lamerd Branch, Islamic Azad University, Lamerd, Iran

### Abstract

In this paper, based on a refined quasi-3D beam theory and using the isogeometric method, the free vibration behavior of composite beams reinforced by graphene platelets is studied. The quasi-3D beam theory takes into account both shear deformation and thickness stretching effects. The beam under consideration is assumed to be a laminated beam where the volume fraction of graphene may be different in each layer which leads to a functionally graded structure. The equivalent modulus of the beams is obtained by means of the Halpin-Tsai model. Besides, the equivalent mass density and Poisson's ratio are evaluated using the conventional rule of mixture. The results demonstrate that the isogeometric analysis (IGA) based on the refined quasi-3D beam theory can precisely predict the natural frequencies of the composite beams reinforced by graphene platelets with low computational cost. Moreover, a set of new results are presented for different parameters related to the beam material and geometrical characteristics of the functionally graded graphene platelet-reinforced composite (FG-GPLRC) beams.

*Keywords:* Isogeometric analysis, Quasi-3D beam theory, Free vibration, Composite beams, Graphene platelets