

تحلیل ارتعاشات میکرو ورق کیرششف گرا دیان کرنشی با استفاده از روش المان محدود با پیوستگی C^2

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری یک میکروورق مبتنی بر تئوری کیرششف گرا دیان کرنشی با شرایط مرزی دوسرگیردار با استفاده از فرمول بندی المان محدود با داشتن پیوستگی C^2 ارائه می شود. با توجه به وجود مشتقات مرتبه بالا، از توابع درونیابی با پیوستگی C^2 برای ارائه یک فرمول بندی استاندارد استفاده می شود. سپس، ماتریس سفتی و جرم المان میکروورق با استفاده از اصل همپیتون استخراج می شود و فرمول بندی روی یک المان چهارضلعی با ۴ گره و ۳۶ درجه آزادی اعمال می شود. فرکانس های طبیعی میکروورق مورد نظر با استفاده از المان محدود به دست می آیند و با نتایج تحلیلی مقایسه می شوند و با ریز نمودن ابعاد المان ها (مطالعه مش)، دقت این روش با مقایسه فرکانس های به دست آمده با روش المان محدود و نتایج تحلیلی مورد نظر مقایسه می شود. علاوه بر این، فرکانس های طبیعی برای میکروورق ها با شرایط مرزی مختلف ارائه می شوند و تأثیر نسبت h/l بر فرکانس های طبیعی میکروورق با شرایط مرزی مختلف بررسی می شود. در ادامه، نمودارهای ارتعاش اجباری میکروورق با شرایط اولیه و نیروی وارده مشخص و تأثیر شرایط مرزی و نسبت h/l بر پارامترهای مختلف میکروورق مورد بررسی و ارائه قرار می گیرند.

زهرة ملك حسينى^۱

دانشجوی دکتری

علی نجفی اردکانی^{۲،۳}

استادیار

واژه های راهنما: المان غیرکلاسیک میکروورق، نظریه الاستیسیته گرا دیان کرنشی، روش المان محدود، ارتعاشات اجباری

۱- مقدمه

امروزه از سیستم های میکروالکترومکانیکی به دلیل ویژگی هایی نظیر اندازه و وزن کم، قیمت ارزان و مصرف انرژی پایین، به صورت گسترده در زمینه های صنعتی و پژوهشی استفاده می شود.

^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
z.malekhoseini@email.kntu.ac.ir

^۲ نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
najafi@kntu.ac.ir

^۳ پژوهشگر، شرکت تأمین و انتقال آب خلیج فارس، تهران، ایران

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی (MEMS)^۱، حسگرها، محرک‌ها و میکروسکوپ‌های نیروی اتمی اغلب از اجزایی در مقیاس کوچک مانند تیرها، صفحات و پوسته‌ها به عنوان عناصر ساختاری استفاده می‌کنند [۵-۱]. مطالعات تجربی متعددی نشان داده‌اند که رفتار مکانیکی میکروالمان‌های سازنده‌ی این سیستم‌ها به دلیل ابعاد کوچک با تئوری کلاسیک مکانیک محیط پیوسته قابل پیش‌بینی نیست. از این رو برای تحلیل رفتار میکروالمان‌ها بایستی از تئوری‌های غیرکلاسیک مکانیک محیط پیوسته که قابلیت لحاظ کردن اثرات اندازه را دارند، استفاده کرد. با کم شدن ضخامت سازه‌های مهندسی از قبیل ورق‌ها، پوسته‌ها و تیرها تا ابعاد میکرون، اثر اندازه، تأثیر قابل توجهی در آنالیز رفتار مکانیکی این نوع سازه‌ها دارد [۶]. آزمایش بر روی میکروساختارها نشان می‌دهد که رفتار آن‌ها وابسته به اندازه‌ی آن‌ها است. در واقع اثرات اندازه بر نوسان^۲ و خیز^۳ میکروساختارهای پیوسته، در ابتدا به صورت آزمایشگاهی مشاهده شد. تمامی این آزمایش‌ها نشان داد که رفتار ذاتی بعضی از مواد کاملاً وابسته به اندازه است و تئوری کلاسیک قادر به پیش‌بینی نتایج قابل اتکا برای پارامترهای وابسته به مقیاس طول ماده در ساختارهای میکرونی نیست. در نتیجه، تئوری‌های مرتبه بالاتر به منظور در نظر گرفتن اثرات اندازه معرفی شد که از معادلات تشکیل دهنده، شامل پارامترهای مقیاس طول به علاوه‌ی ثوابت کلاسیک لامه ساخته شده است.

یکی از تئوری‌های مرتبه بالاتر، تئوری تنش کوپل است که توسط توپین (۱۹۶۲) [۷]، میندیلین و تیرستن (۱۹۶۲) [۸] و کوپتر (۱۹۶۴) [۹] بررسی شده است. این تئوری دو پارامتر مقیاس طول برای ماده الاستیک همگن معرفی می‌کند.

یانگ و همکاران در سال (۲۰۰۲) تئوری تنش کوپل اصلاح شده را پیشنهاد داده‌اند که در آن معادلات تعادل مرتبه بالاتر مانند معادلات تعادل کوپل گشتاورها در نظر گرفته شده است [۱۰]. طبق نتایج، تانسور تنش کوپل باید متقارن بوده و تنها بخش متقارن تانسور گرادیان چرخش در ذخیره انرژی الاستیک مشارکت دارد. بنابراین، یک پارامتر مقیاس طول ماده به همراه تانسور گرادیان چرخش متقارن فقط شامل معادلات پیوسته به علاوه دو ثابت کلاسیک است. پارک و گائو در سال (۲۰۰۶) معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر یک میکرو تیر اوپلر - برنولی [۱۱]، ما و همکارانش در سال (۲۰۰۸) معادلات حاکم بر تیر تیموشنکو، شرایط مرزی عمومی و آنالیز ارتعاشی میکرو تیر [۱۲]، کونگ در سال (۲۰۰۸) فرکانس‌های طبیعی یک تیر اوپلر-برنولی [۱۳] و اصغری و همکاران در سال (۲۰۱۰) و (۲۰۱۱) فرمول‌بندی یک تیر تیموشنکو [۱۴] و یک تیر تیموشنکوی FG^۴ [۱۵] را با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده، به دست آورده‌اند.

مطالعات جدید بر روی میکرو تیرها بر اساس تئوری تنش کوپل به سمت میکرو تیرهایی با خواص ویژه و یا تحت بارگذاری و شرایط خاص می‌رود. برای مثال قدیری و شفیع‌ی در سال (۲۰۱۶) به بررسی ارتعاشات گرمایی یک میکرو تیر تیموشنکو بر اساس تئوری تنش کوپل و با در نظر گرفتن تغییرات دمایی در ۴ مدل مختلف از توزیع دمایی پرداخته‌اند [۱۶]. داس و همکاران در سال (۲۰۱۹) ارتعاشات آزاد یک میکروتیر چرخان

^۱ Micro Electro Mechanical System

^۲ Oscillation

^۳ Deflection

^۴ Functionally Graded

FG دو جهته را بررسی کرده‌اند. یک مدل پیشرفته ریاضی براساس تیرتیموشنکو و تئوری تنش کوپل که شامل غیرخطی هندسی، شتاب کوریولیس^۱، دمای عملیاتی بالا است را ارائه داده‌اند [۱۷]. مطالعاتی که بر روی ورق‌ها با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده انجام شده است بدین شرح است. سیاتاس در سال (۲۰۰۹) معادلات حاکم و شرایط مرزی حاکم بر ورق کیرششف را به دست آورده است [۱۸]. همچنین جمعه زاده و همکاران در سال (۲۰۱۱) مطالعه‌ای بر روی تحلیل ارتعاشات آزاد میکروورق کیرششف مستطیلی و دایروی انجام داده‌اند [۱۹]. کی و همکاران در سال (۲۰۱۲) یک مدل میکرو ورق وابسته به اندازه برای تحلیل ارتعاشات آزاد، اثرات تغییر شکل برشی عرضی، اثر اندازه و اینرسی چرخشی بر پایه تئوری میکرو ورق میندلین و تئوری تنش کوپل اصلاح شده ارائه داده‌اند و برای تعیین فرکانس‌های طبیعی از روش ریتز^۲ استفاده کرده‌اند [۲۰]. روکه و همکاران در سال (۲۰۱۳) با استفاده از تئوری تنش کوپل برشی و روش مش لس (Meshless) به حل خمش میکرو ورق میندلین همگن با تکیه‌گاه ساده و گیردار پرداخته‌اند [۲۱]. لی و پان در سال (۲۰۱۵) مدلی برای میکروورق FG پیزوالکتریک براساس تئوری‌های تنش کوپل اصلاح شده و ورق سینوسی ارائه داده‌اند [۲۲]. اصلی‌ترین مزیت تئوری تنش کوپل اصلاح شده نسبت به تئوری تنش کوپل کلاسیک معرفی تانسور تنش کوپل متقارن و دارا بودن تنها یک پارامتر مقیاس طول ماده است. یکی دیگر از تئوری‌های مرتبه بالاتر توسط میندلین در سال (۱۹۶۵) ارائه شده است که در آن انرژی کرنشی به‌عنوان تابعی از گرادیان‌های مرتبه اول و دوم تانسور کرنش در نظر گرفته شده است [۲۳]. در یک مورد نرمال، میندلین و اشل در سال (۱۹۶۸) در این تئوری که شامل گرادیان مرتبه اول از تانسور کرنش است، پنج ثابت جدید علاوه بر ثوابت لامه^۳ برای یک ماده همگن الاستیک خطی معرفی کرده‌اند [۲۴]. آلتان و آیفانس در سال (۱۹۹۲) یک تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده که تنها شامل یک ثابت جدید است معرفی کرده‌اند [۲۵]. فلک و هاتچینسون در سال (۱۹۹۴) تئوری میندلین را دوباره فرمول‌بندی و آن را تئوری گرادیان کرنشی^۴ نام‌گذاری کرده‌اند [۲۶]. همچنین این دو نفر در سال (۲۰۰۱) تئوری گرادیان کرنشی را دوباره فرمول‌بندی کرده‌اند [۲۷]. لیم و همکارانش در سال (۲۰۰۳) با استفاده از معادلات تعادلی مرتبه بالاتر پیشنهاد شده توسط یانگ، تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده را ارائه کرده‌اند [۲۸]. این تئوری شامل سه پارامتر مقیاس طول متناسب با تانسورهای گرادیان اتساع^۵، برش^۶ و تانسور گرادیان متقارن چرخش است. تنش‌های مرتبه بالاتر به عنوان مزدوج^۷ ماتریس‌های مرتبه بالاتر کرنش تعریف می‌شوند.

باید خاطر نشان شود که تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش اصلاح شده با صفر در نظر گرفتن دو تا از سه پارامتر مقیاس طول می‌تواند به تئوری تنش کوپل اصلاح شده تبدیل شود. به عبارت دیگر تئوری تنش کوپل اصلاح شده مورد خاصی از تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش است. این دو تئوری نوین که بسیار پیچیده‌تر

^۱ Coriolis acceleration

^۲ Ritz method

^۳ Lamé's constants

^۴ Strain gradient theory

^۵ Dilatation

^۶ Deviatoric

^۷ Work-conjugate

از تئوری‌های مطرح شده‌ی پیشین هستند، در بچه‌ای جدید به منظور بررسی‌های گوناگون در حوزه‌ی سیستم-های میکرو و نانو، پیش روی محققان گشودند. هرچند، تحقیقات بر روی میکرو/نانو ساختارهای دوبعدی (ورق‌ها، پوسته‌ها و ...) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش بسیار محدود بوده است. تئوری گرادیان کرنش توسط کونگ و همکاران در سال (۲۰۰۹) و وانگ و همکاران در سال (۲۰۱۰) به ترتیب برای تحلیل رفتار استاتیکی و دینامیکی تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو به کار گرفته شده است [۲۹-۳۰].

کمانش میکروتیرها تحت بارگذاری محوری بر اساس دو تئوری تنش کوپل اصلاح شده و تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش توسط سیوالک و همکاران در سال (۲۰۱۱) مورد مطالعه قرار گرفته است [۳۱]. آروین در سال (۲۰۱۷) یک فرمول‌بندی برای میکروتیر چرخان اویلر-برنولی و تیموشنکو براساس تئوری گرادیان کرنش انجام داده است. با معرفی شکل پیش‌تنش ناشی از نیروهای گریز از مرکز به خطی‌سازی این معادلات پرداخته است و با روش تبدیل دیفرانسیل، فرکانس‌های طبیعی را به‌دست آورده است [۳۲]. برای بررسی اثرات برش و اندازه بر روی میکروتیرها، ژائو و همکاران در سال (۲۰۱۹)، مدلی برای تیر تیموشنکو براساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده با استفاده از اصل حساب تغییرات ارائه داده‌اند. برای حل این مدل از روش تفاضل محدود مرکزی با نقاط مجازی استفاده کرده‌اند [۳۳].

لازاپولوس در سال (۲۰۰۴) یک ورق وابسته به سایز دارای غیرخطی هندسی را بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنشی فرمول‌بندی کرده است [۳۴]. وانگ و همکارانش در سال (۲۰۰۹) یک فرمول‌بندی جدید براساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی برای میکروورق‌هایی با تکیه‌گاه ساده ارائه داده‌اند. معادلات حاکم بر این میکروورق استخراج شده و سختی نرمال شده، بار بحرانی و فرکانس‌های طبیعی برای ورق با تکیه‌گاه ساده به‌دست آمده است [۳۵]. آشوری و محمودی در سال (۲۰۱۳) یک میکروورق را براساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش مدل کرده‌اند. هدف آن‌ها در این تحقیق، ارائه حلی برای تحلیل خمشی یک میکرو ورق کیرشلف با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش است و برای حل معادلات از روش تعمیم یافته کانتروویچ^۱ استفاده کرده‌اند [۳۶]. رضانی در سال (۲۰۱۳) به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروورق کیرشلف که براساس تئوری گرادیان کرنشی مدل شده، پرداخته است. معادلات حرکت و شرایط مرزی با حساب تغییرات محاسبه شده‌اند. با استفاده از روش گلرکین برای استخراج معادلات دیفرانسیل معمولی مربوط به اولین مود ارتعاشات غیرخطی برای یک میکروورق با تکیه‌گاه ساده استفاده شده است. روش تحلیلی هموتوپی^۲ نیز به منظور دستیابی به فرکانس‌های طبیعی غیرخطی ارتعاشات به کار گرفته شده است [۳۷].

سهمانی و انصاری در سال (۲۰۱۳) ارتعاشات آزاد میکرو ورق‌های ساخته شده از مواد FG را بررسی کرده‌اند. معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و فرم بسته‌ی ناویه^۳ برای حل این معادلات به کار گرفته شده است [۳۸]. انصاری و همکاران در سال (۲۰۱۵) مدلی به منظور پیش‌بینی دقیق ویژگی‌های خمش، کمانش و ارتعاشات آزاد یک میکرو ورق میندلین دایروی/حلقوی FG براساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده توسعه داده‌اند. مشخصات FG ورق در طول ضخامت آن تغییر می‌کند. معادلات حرکت و شرایط

^۱ Extended Kantorovich method

^۲ Homotopy

^۳ Navier closed form

مرزی مرتبط با آن با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و روش یک چهارم دیفرانسیل تعمیم یافته (Generailized Differential Quadrature) به منظور گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم با شرایط مرزی مختلف در لبه‌ها به کار گرفته شده است [۳۹]. سیوالک و همکاران در سال (۲۰۱۵) مدلی براساس تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده برای یک میکروورق غیرکلاسیک سینوسی ارائه داده‌اند. این مدل اثرات تغییر شکل برشی را بدون هیچ‌گونه فاکتور اصلاح برشی در نظر می‌گیرد و همچنین می‌تواند اثرات اندازه وابسته به پارامترهای مقیاس طول ماده را بدست آورد. معادلات حاکم و شرایط مرزی با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و برای حل آن‌ها از سری فوریه استفاده شده است [۴۰].

تای و همکاران در سال (۲۰۱۹) یک مدل محاسباتی بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر برای تحلیل ارتعاشات آزاد میکرو ورق چندلایه کامپوزیتی FG تقویت شده با گرافن (FG GPLRC) معرفی کرده‌اند. برای استخراج معادلات گسسته حاکم بر حرکت از کار مجازی استفاده شده و سپس از تحلیل ایزومتریک برای حل معادلات استفاده شده است [۴۱].

یکی از روش‌های کاهش معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به معادلات دیفرانسیل معمولی، روش المان محدود^۲ است. برای استفاده از این روش، دامنه‌ی سیستم به چندین زیر دامنه تقسیم می‌شود و با استفاده از شرایط مرزی هر دامنه و ساختاری که برای تابع پایه انتخاب گردیده است، این توابع تعیین می‌شوند.

این روش، مقادیر تخمینی پارامترهای مجهول را برای تعدادی از نقاط مجزا در محدوده‌ی تعریف مسئله به دست می‌آورد. راه‌حل روش المان محدود، تقسیم مسائل بزرگ به بخش‌های کوچک‌تر و ساده‌تری به نام المان‌های محدود (Finite Elements) است. در مرحله‌ی بعد، معادلات ساده‌ای که معرف این المان‌های محدود هستند، در یک دستگاه معادلات بزرگ‌تر در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند و فرم کلی مسئله‌ی اصلی را تشکیل می‌دهند.

در کاربردهای ارتعاشی که از روش المان محدود برای کاهش معادلات پاره‌ای به معمولی استفاده شده است، می‌بایست برای هر زیر دامنه‌ی سیستم، طراحی کنترلر و نصب سنسور صورت گیرد. مهم‌ترین برتری این روش قابلیت بالای آن برای مدل کردن هندسه‌های پیچیده است.

کهرباپیان و همکاران در سال (۲۰۱۴) یک المان تیر توسعه داده‌اند که براساس تئوری گرادیان تنش عمل می‌کند و توانایی مدل‌سازی ساختارهای میکرو/نانو-مقیاس را با دقت بالاتری دارد. آن‌ها نشان داده‌اند که این المان نسبت به عناصر تیر کلاسیک بهتر عمل می‌کند و می‌تواند تغییرات وابسته به اندازه را به خوبی در ساختارها ثبت کند. نتایج نشان می‌دهند که تطابق خوبی بین نتایج نظری و تجربی وجود دارد و این عنصر می‌تواند به تحلیل دقیق‌تر و پیشرفت فناوری‌های میکرو/نانو کمک کند [۴۲].

دادگر راد و بهشتی در سال (۲۰۱۷) به توسعه یک روش تحلیلی برای مطالعه انحنای غیرخطی در میکروتیرها و میکروقاب‌ها پرداخته‌اند و از تئوری الاستیسیته کرنش اول گرادیان میندیلین برای در نظر گرفتن اثرات ابعادی در مقیاس میکرو استفاده کرده‌اند. همچنین، اثرات غیرخطی هندسی با استفاده از تانسور کرنش فون کارمان و گرادیان فضایی آن مد نظر قرار گرفته است. از توابع تخمینی معمولی برای متغیرهای گسترش و خمش

^۱ Functionally Graded Graphene Platelet-Reinforced Composite (FG GPLRC)

^۲ Finite element method

استفاده شده و یک عنصر میکروتیر با گرادیان تنش دو گرهی ارائه شده است. این روش امکان تحلیل انحنای میکروتیرها با جهت‌های مختلف در صفحه میسر می‌سازد و میکروقاب‌های صفحه‌ای ترکیبی از میکروتیرها با جهت‌های مختلف را تجزیه و تحلیل می‌کند. برای حل معادلات غیرخطی از روش المان محدود استفاده می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که این روش می‌تواند با موفقیت اثرات ابعادی و غیرخطیت هندسی را در انحنای میکروتیرها و میکروقاب‌ها در مقیاس میکرو را ثبت کند [۴۳].

دامغانیان و همکاران در سال (۲۰۲۲) یک عنصر جدید برای تیر بر اساس تئوری تیر سومین درجه Reddy و تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای تحلیل استاتیک و دینامیک تیرهای میکرو معرفی کرده‌اند. تیر بر روی پایه ویسکوالاستیک نوع Kelvin-Voigt قرار دارد. معادلات تعادل با استفاده از اصل هامیلتون به دست آمده‌اند. روش المان محدود گلرکین به معادلات حاکم اعمال شده است و توابع شکل عنصر تیر جدید به دست آمده است. به عبارت دیگر، اعمال شدن تنها شش عنصر مناسب برای ارزیابی رفتار تیر مناسب و دقیق است و این موجب کاهش زمان محاسباتی می‌شود. عنصر پیشنهادی یک عنصر دو گرهی با ۴ درجه آزادی در هر گره است. تأثیر انواع مختلف سختی و کاهش پایه ویسکوالاستیک، شرایط مرزی و پارامترهای طولی بر فرکانس طبیعی و پاسخ گذرا تیر میکرو مورد بررسی قرار گرفته است [۴۴].

مشخصه‌های کمانش حرارتی برای میکرو ورق مستطیلی خمشی تحت دمای یکنواخت با استفاده از مدل p از روش المان محدود با پیوستگی مرتبه بالاتر توسط فرهمند و همکاران در سال (۲۰۱۱) بررسی شده است [۴۵]. شکل ثابت معادلات حرکت برای میکروورق با اثرات غیرمحملی بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای تحلیل کمانش حرارتی میکروورق مستطیلی خمشی با در نظر گرفتن اثرات گرادیان کرنشی محاسبه شده است. معادلات تشکیل دهنده برای مدل گرادیان کرنشی بر اساس یک ثابت است. فرم ضعیف گلرکین معادلات حاکم استخراج شده و سپس از آن برای انواع شرایط مرزی با استفاده از مدل p المان محدود با پیوستگی مرتبه بالاتر به منظور استخراج بارهای بحرانی کمانش حرارتی استفاده شده است. روش محاسباتی با مقایسه‌ی پیش‌بینی‌های حاصل از تئوری کلاسیک و مطالعات تحلیلی میکروورق که هر دو بر پایه مدل گرادیان کرنش هستند، تأیید شده است. بررسی‌ها نشان می‌دهد که پارامتر مقیاس طول بر روی سختی خمشی محاسبه شده تأثیر می‌گذارد و این اثر به طور مستقیم با مقدار ضریب گرادیان در نظر گرفته شده برای ورق متناسب است. از این رو پارامتر مقیاس طول تأثیر قابل توجهی بر میزان بار کمانش حرارتی دارد. بسته به شرایط مرزی و پارامتر مقیاس طول به کار رفته در آزمایش‌ها، مدل ورق کلاسیک برای بار بحرانی کمانش حرارتی میکروورق تا ۹۰٪ تخمین اشتباه دارد. بنابراین توصیه شده است که از تئوری کلاسیک ورق به منظور پیش‌بینی پاسخ ساختاری میکروورق‌ها استفاده نشود.

کاظمی و همکاران در مقاله‌ای در سال (۲۰۱۷) به بررسی اثرات لایه‌های پیزوالکتریک، تنش باقی‌مانده و غیرخطی ون کارمن بر ناپایداری فرو کشیدگی^۱ یک میکرو ورق با در نظر گرفتن اثر اندازه پرداخته‌اند [۴۶]. انرژی کرنشی با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و مجموعه‌ی معادلات غیرخطی حرکت با استفاده از اصل همیلتون و المان محدود بر پایه‌ی تئوری کلاسیک ورق به دست آمده است. روش نیوتن-رافسون برای حل معادلات غیرخطی و مدل ارائه شده به منظور مطالعه‌ی ولتاژ توقف، جابجایی فروکشیدگی و دامنه‌ی

^۱ Pull-in instability

کوچک ارتعاشات حول نقطه‌ی تعادل برای یک میکروورق با لایه‌های پیزوالکتریک، استفاده شده است. اعتبار سنجی مدل با داده‌های آزمایشی و تئوری انجام شده است. مطالعات نشان داده است که ولتاژ توقف تحت تاثیر پارامتر مقیاس طول ماده قرار دارد، اما این اثر هنگامی که نسبت ضخامت ورق به پارامتر مقیاس طول ماده بیشتر از ۱۰ باشد، کاملاً نادیده گرفته می‌شود. یافته‌ها نشان می‌دهد که نتایج بدست آمده از تئوری غیرخطی بزرگتر از نتایج حاصل از تئوری خطی است و تفاوت آن‌ها با افزایش نرخ فاصله‌ی اولیه با ضخامت ورق، افزایش می‌یابد. علاوه بر این، مشاهده شده است که اعمال یک ولتاژ مثبت به لایه‌های پیزوالکتریک باعث کاهش در حداکثر ولتاژ توقف می‌گردد.

دادگر راد یک فرمول‌بندی المان محدود برای مدل میکرو ورق در سال (۲۰۱۷) بررسی نموده است. او فرمول‌بندی المان محدود میکرو ورق میندلین - رایسنر بر اساس نظریه الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش ارائه داده است. جهت ارائه‌ی یک فرمول‌بندی المان محدود استاندارد، از توابع درون‌یابی با پیوستگی C^0 استفاده نموده است. تغییر شکل ورق‌های مستطیلی میندلین - رایسنر گرادینی تحت فشار یکنواخت با سه دسته شرایط مرزی مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. ابتدا میکرو ورق با لبه‌های ساده بررسی شده و حل المان محدود گرادینی به دست آمده با حل دقیق میکرو ورق بر اساس این نظریه مقایسه شده است که تطابق بسیار نزدیکی بین پاسخ‌های این دو روش مشاهده شد. سپس میکرو ورق با چهار لبه گیردار و نیز سه لبه ساده و یک لبه آزاد بررسی شده است. در هر دو مورد، پاسخی همگرا با ریز نمودن اندازه المان‌ها به دست می‌آید [۴۷].

کارمانلی و آیدوگدو در سال (۲۰۲۰) به بررسی ارتعاشات شکل‌پذیری نرمال میکروورق متخلخل FG با استفاده از روش المان محدود پرداخته‌اند [۴۸]. فرکانس‌های طبیعی و شکل‌پذیری نرمال و برشی میکروورق مربعی بدست آمده است. با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده، مدل المان محدود براساس تغییر شکل برشی و نرمال تئوری ورق و فرمول‌بندی حساب تغییرات، بسط داده شده است. پارامتر مقیاس طول ماده یک متغیر در نظر گرفته شده است. تاثیر نسبت ابعاد، شاخص شیب، متغیر پارامتر مقیاس طول ماده، شرایط مرزی، نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول ماده و کسر حجم تخلخل بر روی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد محاسبه شده است. نتایج نشان می‌دهد که تفاوت میان محاسبات عددی با استفاده از پارامتر مقیاس طول ثابت و متغیر قابل توجه است. همچنین مشخص شده است که با افزایش نسبت ابعاد، اثر پارامتر مقیاس طول ماده در میکروورق-های ضخیم چشمگیر است.

در مقالات ذکر شده، مطالعات محدود به حل ناویر ورق‌های مستطیلی تحت شرایط مرزی ساده هستند. روش‌های حل ارائه شده، قادر به تعیین تغییر شکل میکروورق‌ها، با هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی مختلف نمی‌باشند. لذا لزوم استفاده از روش‌های عددی قدرتمند مانند المان محدود ضروری به نظر می‌رسد. نوآوری این مقاله، فرمول‌بندی المان محدود استاندارد C^2 جهت بررسی رفتار ارتعاشی میکروورق گرادیان کرنشی است. از آنجایی که فرمول‌بندی المان محدود استاندارد میکروورق گرادیان کرنشی نیاز به توابع درونیابی با پیوستگی C^2 دارد، یعنی مشتقات مرتبه اول و دوم خیز باید در نقاط گرهی پیوسته باشند. لذا بر اساس فرمول‌بندی مقاله حاضر، شرایط پیوستگی مشتقات مرتبه اول و دوم بدون هیچ تقریبی ارضا می‌گردند و توابع درونیابی C^2 به صورت صریح ارائه می‌گردند.

۲- معادلات حاکم بر میکروورق گرادیان کرنشی

برای یک ماده همگن الاستیک در ناحیه V ، انرژی کرنشی U به صورت زیر محاسبه می شود [۵۰].

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij} \chi_{ij}^S) dV \quad (۱)$$

که اجزای U را به صورت زیر داریم [۵۰].

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (۲)$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \quad (۳)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \eta_{ijk}^S - \frac{1}{5} (\delta_{ij} \eta_{mmk}^S + \delta_{jk} \eta_{mmi}^S + \delta_{ki} \eta_{mmj}^S) \quad (۴)$$

$$\chi_{ij}^S = \frac{1}{4} (e_{imn} u_{n,mj} + e_{jmn} u_{n,mi}) \quad (۵)$$

در معادلات بالا، $(,)$ نشان دهنده مشتقات پاره‌ای و u_i نشان دهنده بردار جابه‌جایی می باشد. همچنین، $\varepsilon_{ij}, \gamma_i, \eta_{ijk}^{(1)}$ و χ_{ij}^S اجزاء تانسور کرنش ε هستند که بردار گرادیان اتساع، η تانسور گرادیان کششی انحرافی، χ تانسور متقارن گرادیان چرخشی هستند. بخش متقارن از تانسور گرادیان مرتبه‌ی دوم جابه‌جایی است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۵۱].

$$\eta_{ijk}^S = \frac{1}{3} (u_{i,jk} + u_{j,ki} + u_{k,ij}) \quad (۶)$$

هر دو تانسور $\eta_{ijk}^{(1)}$ و χ_{ij}^S نسبت به همه زیرنویس‌ها متقارن هستند.

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \eta_{jik}^{(1)} = \eta_{ikj}^{(1)} \quad , \quad \chi_{ij}^S = \chi_{ji}^S \quad (۷)$$

تنش کلاسیک σ_{ij} و تنش‌های مرتبه بالاتر p_i ، $\tau_{ijk}^{(1)}$ و m_{ij} به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۵۱].

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (8)$$

$$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i \quad (9)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (10)$$

$$m_{ij}^s = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^s \quad (11)$$

μ , λ به ترتیب مدول بالک و برشی هستند. همچنین l_0 و l_1 و l_2 پارامترهای مستقل مقیاس طول ماده به ترتیب برای گرادیان اتساع، گرادیان کششی انحرافی و گرادیان چرخش هستند. طبق تئوری کلاسیک ورق برای میدان جابه‌جایی داریم:

$$u_x(x, y, z) = -zw_x(x, y) \quad , \quad u_y(x, y, z) = -zw_y(x, y) \quad , \quad u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (12)$$

u_x و u_y و u_z به ترتیب اجزا بردار جابه‌جایی در جهت x و y و z را نشان می‌دهد. انرژی جنبشی T و انرژی کرنشی U به صورت زیر خواهند بود [۵۱].

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b \int_0^a \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy dz; \quad I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{h^3}{12} \quad (13)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b \int_0^a \bar{u} dx dy dz$$

و \bar{u} به صورت زیر تعریف خواهد شد [۵۱].

$$\begin{aligned} \bar{u} = & (c_1 + c_2 z^2) \left((w_{xx})^2 + (w_{yy})^2 \right) + (c_3 + c_4 z^2) (w_{xx} w_{yy}) \\ & + (c_5 + c_6 z^2) (w_{xy}) + c_7 z^2 \left((w_{xxx})^2 + (w_{yyy})^2 \right) \\ & + c_8 z^2 \left((w_{xyy})^2 + (w_{yxx})^2 \right) + c_9 z^2 (w_{xxx} w_{xyy} + w_{yyy} w_{yxx}) \end{aligned} \quad (14)$$

همچنین ثوابت $c_1 - c_9$ به صورت زیر خواهند بود [۵۱].

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \mu \left(2l_0^2 + \frac{8}{15}l_1^2 + l_2^2 \right) & c_6 &= (4\mu) \\
 c_2 &= \left(\lambda + \frac{4}{3}\mu \right) & c_7 &= \mu \left(2l_0^2 + \frac{4}{5}l_1^2 \right) \\
 c_3 &= \mu \left(4l_0^2 - \frac{4}{15}l_1^2 - 2l_2^2 \right) & c_8 &= \mu \left(2l_0^2 + \frac{24}{5}l_1^2 \right) \\
 c_4 &= \left(2\lambda - \frac{4}{3}\mu \right) & c_9 &= \mu \left(4l_0^2 - \frac{12}{5}l_1^2 \right) \\
 c_5 &= \mu \left(\frac{4}{3}l_1^2 + 4l_2^2 \right) & &
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

طبق روابط بالا و با استفاده از اصل همیلتون، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حرکت ورق و شرایط مرزی برای ورق با شرایط گیردار-آزاد-گیردار-آزاد (C-F-C-F) را به صورت زیر محاسبه خواهد شد [۵۲].

$$\rho h \ddot{w} + P_1 \nabla^6 w - P_4 \nabla^4 w = 0 \tag{۱۶}$$

که در آن P_1 و P_4 به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}
 P_4 &= I\mu \left(2l_0^2 + \frac{4}{5}l_1^2 \right) \\
 P_1 &= \mu h \left(2l_0^2 + \frac{8}{15}l_1^2 + l_2^2 \right) + \left(\lambda + \frac{4}{3}\mu \right) I
 \end{aligned} \tag{۱۷}$$

و ممان اینرسی قطبی و مشتقات درجه ۴ و ۶ را به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{h^3}{12} \tag{۱۸}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla^6 w &= w_{xxxxxx} + 3w_{xxxxyy} + 3w_{xxyyyy} + w_{yyyyyy} \\
 \nabla^4 w &= w_{xxxx} + 2w_{xxyy} + w_{yyyy}
 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

در نهایت شرایط مرزی برای یک میکروورق دوسرگیردار و دوسر آزاد با استفاده از اصل همیلتون به صورت زیر استخراج می‌شوند.

$$\begin{aligned} \text{at the } x=0, \quad (\text{Free}), \quad \int_0^b B_{x1} dy = F_X, \quad \int_0^b B_{x2} dy = M^c_X, \\ \int_0^b B_{x3} dy = M^{n.c}_X \\ \text{at the } x=a, \quad (\text{Clamped}), \quad w(x,y) = 0 \quad \partial w(x,y)/\partial x = 0 \\ \int_0^a B_{x3} dx = M^{n.c}_Y \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \text{at the } y=0, \quad (\text{Free}), \quad \int_0^a B_{y1} dx = F_Y \quad \int_0^a B_{y2} dx = M^c_Y \\ \int_0^a B_{y3} dx = M^{n.c}_Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{at the } y=b, \quad (\text{Clamped}), \quad w(x,y) = 0 \quad \partial w(x,y)/\partial y = 0 \\ \int_0^a B_{y3} dx = M^{n.c}_Y \end{aligned}$$

9

$$\left\{ \begin{aligned} B_{x1} &= -2P_1 w_{xxx} - (P_2 + 2P_3) w_{xyy} + 2P_4 w_{xxxxx} \\ &\quad + (2P_5 + 2P_6) w_{xxxxy} + (2P_5 + P_6) w_{xyyy} \\ B_{x2} &= 2P_1 w_{xx} + P_2 w_{yy} - 2P_4 w_{xxx} \\ &\quad + (2P_5 + P_6) w_{xxy} - P_6 w_{yyy} \\ B_{x3} &= 2P_4 w_{xxx} + P_6 w_{xyy} \end{aligned} \right. \tag{21}$$

$$\left\{ \begin{aligned} B_{y1} &= -2P_1 w_{yyy} - (P_2 + 2P_3) w_{yxx} + 2P_4 w_{yyyyy} \\ &\quad + (2P_5 + 2P_6) w_{yyyxx} + (2P_5 + P_6) w_{yxxxx} \\ B_{y2} &= 2P_1 w_{yy} + P_2 w_{xx} - 2P_4 w_{yyy} \\ &\quad + (2P_5 + P_6) w_{yyxx} - P_6 w_{xxx} \\ B_{y3} &= 2P_4 w_{yyy} + P_6 w_{yxx} \end{aligned} \right. \tag{22}$$

در روابط بالا $P_1 - P_6$ را به صورت زیر محاسبه شده است.

$$\begin{aligned} P_1 &= c_1 h + c_2 I & P_4 &= c_7 I \\ P_2 &= c_3 h + c_4 I & P_5 &= c_8 I \\ P_3 &= c_5 h + c_6 I & P_6 &= c_9 I \end{aligned} \tag{23}$$

۳- فرمول بندى المان محدود برای میکروورق

در این بخش فرمول بندى المان محدود برای یک میکروورق کیرششف گرادیان کرنشی با پیوستگی C^2 ارائه می‌گردد. المان مستطیلی با ۴ گره بدین منظور در نظر گرفته شده است. در فرمول بندى تابع انرژی کرنشی U ، مولفه‌های گرادیان کرنش ظاهر می‌شود که این مؤلفه‌ها با مشتقات درجه دوم جابجایی بیان می‌شوند. با توجه به این موضوع و براساس یک اصل کلی، درجه‌ی پیوستگی توابع درونیابی باید یک درجه کمتر از حداکثر درجه مشتقی باشد که در تابع انرژی کرنشی وجود دارد. بنابراین در فرمول بندى المان محدود برای میکروورق کیرششف گرادیان کرنشی، باید پیوستگی C^2 در نظر گرفته شود. در فرمول بندى این مقاله، هر گره شامل مولفه‌های خیز، دوران و مشتقات دوران هستند. حال به منظور استخراج روابط المان محدود برای میکروورق مذکور به روش زیر عمل خواهد شد. در این بخش، روابط سینماتیک براساس تئوری ورق کیرششف به صورت ریاضی فرمول بندى شده است. با در نظر گرفتن میدان جابجایی (۱۲) و روابط هندسی ون-کارمن (۲)، بردار کرنش به صورت زیر خواهد بود.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = -z\varepsilon_1 \quad \text{that} \quad \varepsilon_1 = \begin{Bmatrix} w_{xx} \\ w_{yy} \\ w_{xy} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

طبق روابط (۴) و (۶) بردار گرادیان کششی انحرافی به صورت زیر و به شکل برداری بازنویسی می‌شوند.

$$\eta^1 = \begin{Bmatrix} \eta_{xxx} \\ \eta_{xxy} \\ \eta_{xyy} \\ \eta_{yyy} \\ \eta_{xzz} \\ \eta_{yzz} \\ \eta_{xxz} \\ \eta_{xyz} \\ \eta_{yyz} \\ \eta_{zzz} \end{Bmatrix} = \eta_0 + z\eta_1 \quad (25)$$

$$\eta_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{15}(w_{yy} - 4w_{xx}) \\ -\frac{1}{3}(w_{xy}) \\ \frac{1}{15}(w_{xx} - 4w_{yy}) \\ \frac{1}{5}(w_{xx} + w_{yy}) \end{Bmatrix}, \quad \eta_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{5}(-2w_{xxx} + 3w_{xyy}) \\ \frac{1}{5}(w_{yyy} - 4w_{yxx}) \\ \frac{1}{5}(w_{xxx} - 4w_{xyy}) \\ \frac{1}{5}(-2w_{yyy} + 3w_{yxx}) \\ \frac{1}{5}(w_{xxx} + w_{xyy}) \\ \frac{1}{5}(w_{yyy} + w_{yxx}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

به طريق مشابه، بردار گراديان چرخش طبق رابطه‌ی (۵) نیز به صورت زیر خواهد بود.

$$\chi^S = \begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \chi_0 \quad \text{that} \quad \chi_0 = \begin{Bmatrix} w_{xy} \\ -w_{xy} \\ \frac{1}{2}(w_{yy} - w_{xx}) \end{Bmatrix} \quad (27)$$

هم‌چنين، طبق رابطه‌ی (۳)، بردار گراديان اتساع به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_x \end{Bmatrix} = \gamma_0 + z\gamma_1 \quad (28)$$

$$\gamma_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(w_{yy} + w_{xx}) \end{Bmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{Bmatrix} -(w_{xxx} + w_{xyy}) \\ -(w_{yyy} + w_{yxx}) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

به منظور محاسبه‌ی ماتریس‌های سفتی و جرم این المان (المان مستطیلی ۴ نقطه‌ای)، در هر نقطه از المان، متغیرهای خیز، شیب در دو جهت x و y و انحنای به صورت زیر معرفی شده‌اند (شکل ۱).

$$w, \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{and} \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (30)$$

و جابه‌جایی نقطه‌ای به صورت زیر به دست می‌آید.

$$d_i = [w_i \quad \theta_{x_i} \quad \theta_{y_i} \quad \kappa_{xy_i}] \quad (31)$$

توابع شکل هرمیتی^۱ به عنوان توابع درونیابی به صورت زیر محاسبه شده‌اند.

$$H_1(x_i, y_i) = \frac{1}{16} (4 + 6x_i + 6y_i + 9x_i y_i - 2x_i^3 - 2y_i^3 - 3x_i^3 y_i - 3x_i y_i^3 + x_i^3 y_i^3) \quad (32)$$

$$H_2(x_i, y_i) = \frac{l_x}{16} (2 + 2x_i + 3y_i - 2x_i^2 + 3x_i y_i - 2x_i^3 - y_i^3 - 3x_i^2 y_i - 3x_i^3 y_i - x_i y_i^3 + x_i^2 y_i^3 + x_i^3 y_i^3)$$

^۱ Hermitian shape function

$$H_3(x_i, y_i) = \frac{l_y}{16} (2 + 2y_i + 3x_i - 2y_i^2 + 3x_i y_i - 2y_i^3 - x_i^3 - 3x_i y_i^2 - 3x_i y_i^3 - x_i^3 y_i + x_i^3 y_i^2 + x_i^3 y_i^3)$$

$$H_4(x_i, y_i) = \frac{l_x l_y}{16} (1 + x_i + y_i - x_i^2 - y_i^2 + x_i y_i - x_i^3 - y_i^3 - x_i^2 y_i - x_i y_i^2 - x_i^3 y_i - x_i y_i^3 + x_i^2 y_i^2 + x_i^2 y_i^3 + x_i^3 y_i^2 + x_i^3 y_i^3)$$

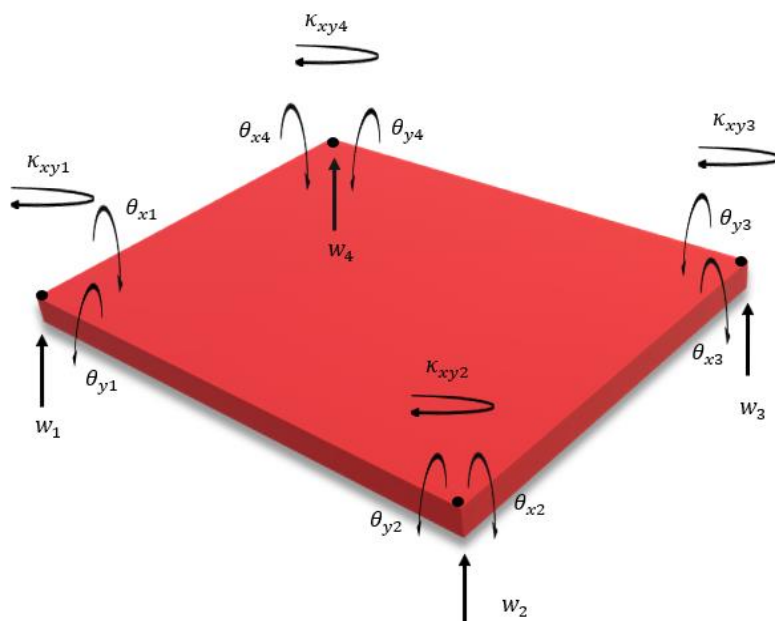
l_x و l_y به ترتیب مقادیر المان مستطیلی میکروورق در جهت x و y را نشان می‌دهد. توابع شکل هرمیتی از نوع C^2 هستند که شامل متغیرهای نقطه‌ای پیوسته $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ و κ_{xy} بین دو نقطه در همسایگی هم هستند. تابع شکل برای هر نقطه به صورت زیر است [۵۳].

$$N_i = [H_1(x_i, y_i) \quad H_2(x_i, y_i) \quad H_3(x_i, y_i) \quad H_4(x_i, y_i)] \quad (33)$$

$(i = 1, 2, 3, 4)$

طبق روابط بیان شده، بردار جابجایی $u = [w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \kappa_{xy}]^T$ را می‌توان براساس توابع شکل به صورت زیر نوشت [۵۳].

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i d_i \quad (34)$$



شکل ۱- درجات آزادی در هر نقطه از المان

این توابع شکل، ماتریس توابع شکل N به صورت زیر تشکیل خواهد بود.

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (35)$$

طبق معادلات (۲۴) تا (۲۹) روابط کرنش، بردارگرادیان اتساع، تانسور گرادیان کششی انحرافی و تانسور متقارن گرادیان چرخشی را برحسب ماتریس توابع شکل می توان نوشت. در مرحله بعد بر اساس اصل همیلتونی و استفاده از فرمول بندی بیان شده، انرژی جنبشی T و انرژی کرنشی U را می توان به صورت زیر نوشت.

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij} \delta \chi_{ij}^S) dV \quad (36)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{w})^2 dV$$

در نهایت با جایگزین کردن توابع شکل N در معادلات (۲۴) تا (۲۹) و (۳۶) ماتریس سفتی را به صورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$K = K_\varepsilon + K_\eta + K_\gamma + K_\chi \quad (37)$$

که هرکدام از عبارات بالا به صورت زیر تعریف می شود.

$$K_\varepsilon = \int_V (B^\varepsilon)^T D^c B^\varepsilon dV, \quad K_\eta = \int_V (B^\eta)^T D^\eta \Upsilon^\eta B^\eta dV \quad (38)$$

$$K_\gamma = \int_V (B^\gamma)^T D^\gamma B^\gamma dV, \quad K_\chi = \int_V (B^\chi)^T D^\chi \Upsilon^\chi B^\chi dV$$

و ماتریس جرم براساس انرژی جنبشی به صورت زیر خواهد بود.

$$M = \int_\Omega \rho h N^T N d\Omega \quad (39)$$

برای جزئیات بیشتر به پیوست الف مراجعه شود.

۴- نتایج عددی

به منظور بررسی رفتار میکروورق غیرکلاسیک گرادیان کرنشی براساس فرمول بندی المان محدود ارائه شده در بخش قبل، فرکانس های طبیعی ورق ها با شرایط مرزی مختلف و رفتار ارتعاشی میکروورق با شرایط مرزی

دوسر آزاد - دوسر گیردار (C-F-F-C) (شکل (۲)) ارائه خواهد شد. به منظور محاسبه فرکانس‌های طبیعی در ارتعاشات آزاد میکروورق گرادیان کرنشی باید معادلات مقادیر ویژه به دست آمده از روابط زیر حل شود.

$$([K] - \omega^2[M]) \{d\} = 0 \quad (40)$$

که ω فرکانس طبیعی و $[K]$ ماتریس سختی جرم بدست آمده از رابطه (۳۷) و $[M]$ ماتریس جرم بدست آمده از رابطه (۳۹) می باشند. در ابتدا با استفاده از روش تحلیلی، فرکانس طبیعی برای این میکروورق از رابطه (۴۱) محاسبه خواهد شد [۵۲]. سپس فرکانس‌های بدست آمده از روش المان محدود با فرکانس‌های به دست آمده از روش تحلیلی با هم مقایسه خواهند شد. رابطه زیر فرکانس طبیعی برای شرایط مرزی ساده در حل تحلیلی را بیان می کند.

$$\omega_{mn}^2 = \frac{C_1 P_1 + C_2 P_2}{\rho h} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (41)$$

که در آن $C_1 = \left(\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_y} \right)^2 \right)^2$ و $C_2 = \left(\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_y} \right)^2 \right)^3$ خواهد بود.

مشخصات مکانیکی و هندسی میکروورق اپوکسی در جدول ۱ (۱) ذکر شده است [۵۱]. حال به محاسبه فرکانس طبیعی به روش المان محدود با استفاده از رابطه (۴۰) پرداخته و نتایج را با هم مقایسه می کنیم. در جدول (۲) سه فرکانس طبیعی اول بدست آمده از روش المان محدود و روش تحلیلی در مرجع [۵۱] برای شرایط مرزی ساده با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که در این جدول نشان داده شده است، اندازه این مقادیر بسیار به هم نزدیک است.

جدول ۱- مشخصات مکانیکی و هندسی میکروورق اپوکسی

عرض (2b)	طول (2a)	ضخامت (h)	$l_0 = l_1 = l_2 = l$	چگالی (ρ)	نسبت پواسون (v)	مدول الاستیسیته (E)
20h	20h	2l	17.6 μ m	1220 kg/m ³	0.3	1.44 GPa

جدول ۲- مقایسه فرکانس‌های طبیعی از روش المان محدود برای میکروورق (S-S-S) و روش تحلیلی در مرجع [۵۱]

$$\hat{\omega}_i = \frac{\omega_i}{10^6}$$

	تعداد المان ها	مود اول ($\hat{\omega}_1$)	مود دوم ($\hat{\omega}_2$)	مود سوم ($\hat{\omega}_3$)
المان محدود	2 × 2	1.0542	2.8356	4.4923
المان محدود	4 × 4	1.0523	2.6508	4.2482
المان محدود	6 × 6	1.0520	2.6356	4.2235
حل تحلیلی	-----	1.0515	2.6233	4.2183

نتایج موجود در جدول (۲) به خوبی نشان می‌دهد که نتایج بدست آمده از روش المان محدود و روش تحلیلی بسیار نزدیک هستند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس‌های سختی و جرم برای میکروورق گرادیان کرنشی به درستی محاسبه شده است و نتایج بدست آمده از روش المان محدود با استفاده از ماتریس‌های سختی و جرم بدست آمده از روابط (۳۷) و (۳۹) قابل استناد هستند. همچنین نتایج ارائه شده در جدول (۲) به خوبی نشان می‌دهد که با ریزتر شدن مش‌ها، نتایج المان محدود به نتایج حل تحلیلی نزدیک‌تر خواهد بود. بعد از راستی‌آزمایی ماتریس‌های سختی و جرم بدست آمده، با استفاده از این روابط به بررسی اثر شرایط مرزی مختلف بر روی فرکانس‌های طبیعی میکروورق گرادیان کرنشی پرداخته می‌شود. نتایج ارائه شده در جداول (۳)، (۴) و (۵) به ترتیب فرکانس‌های طبیعی میکروورق چهارسرگردار (C-C-C-C)، یک‌سرگردار (C-F-F-F) و دوسرگردار-دوسر آزاد (C-F-F-C) را نشان می‌دهد. هنگامی که شرایط مرزی میکروورق از حالت چهارسرگردار به سمت یک سرگردار بودن پیش می‌رود، فرکانس‌های طبیعی کمتر می‌شود. همچنین نتایج ارائه شده در جداول (۳) تا (۵)، همانند نتایج ارائه شده در جدول (۲) نشان می‌دهد که با ریزتر شدن مش‌ها، نتایج بهبود چشمگیری خواهند داشت.

در ادامه به بررسی اثر پارامتر طول بر فرکانس‌های طبیعی برای میکروورق با شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. جداول ۲ الی ۵، فرکانس‌های طبیعی مربوط به میکروورق گرادیان کرنشی با شرایط مرزی مختلف در نسبت $\frac{h}{l} = 2$ را نشان می‌دهد. در جدول زیر نتایج حاصل از اثر تغییر نسبت $\frac{h}{l}$ در میکروورق با شرایط مرزی مختلف بر روی فرکانس طبیعی نشان داده شده است.

جدول ۳- فرکانس‌های طبیعی برای میکروورق چهارسرگردار (C-C-C-C)

	تعداد المان ها	مود اول ($\hat{\omega}_1$)	مود دوم ($\hat{\omega}_2$)	مود سوم ($\hat{\omega}_3$)
المان محدود	2×2	1.8403	4.1196	4.4800
المان محدود	4×4	1.8905	3.8769	5.6269
المان محدود	6×6	1.9141	3.9118	5.7331

جدول ۴- فرکانس‌های طبیعی برای میکروورق دوسر گردار- دوسر آزاد (C-F-F-C)

	تعداد المان ها	مود اول ($\hat{\omega}_1$)	مود دوم ($\hat{\omega}_2$)	مود سوم ($\hat{\omega}_3$)
المان محدود	2×2	0.2561	0.8327	2.2893
المان محدود	4×4	0.2738	0.8251	2.3532
المان محدود	6×6	0.2894	0.8164	2.4084

جدول ۵- فرکانس‌های طبیعی برای میکروورق یک‌سرگردار (C-F-F-F)

	تعداد المان ها	مود اول ($\hat{\omega}_1$)	مود دوم ($\hat{\omega}_2$)	مود سوم ($\hat{\omega}_3$)
المان محدود	2×2	0.1647	0.4085	1.0311
المان محدود	4×4	0.1798	0.4219	1.0785
المان محدود	6×6	0.1823	0.4295	1.0956

جدول ۶- فرکانس‌های طبیعی برای میکروورق با شرایط مرزی مختلف در نسبت‌های مختلف $\frac{h}{l}$

شرایط مرزی	$\frac{h}{l} = 1$			$\frac{h}{l} = 3$		
	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_3$
S-S-S-S	1.6632	4.1668	6.677	0.7437	1.8634	2.9860
C-C-C-C	3.0262	6.1845	9.0640	1.3533	2.7656	4.0533
C-F-F-F	0.2882	0.6790	1.7321	0.1288	0.3037	0.7746
C-F-F-C	0.4575	1.2907	3.8076	0.2046	0.5771	1.7027

همان‌طور که نتایج موجود در جدول (۶) نشان می‌دهد، اگر نسبت $\frac{h}{l}$ در میکروورق گرادیان کرنشی کاهش یابد، فرکانس‌های طبیعی در شرایط مرزی مختلف افزایش می‌یابد و اگر این نسبت افزایش یابد، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند.

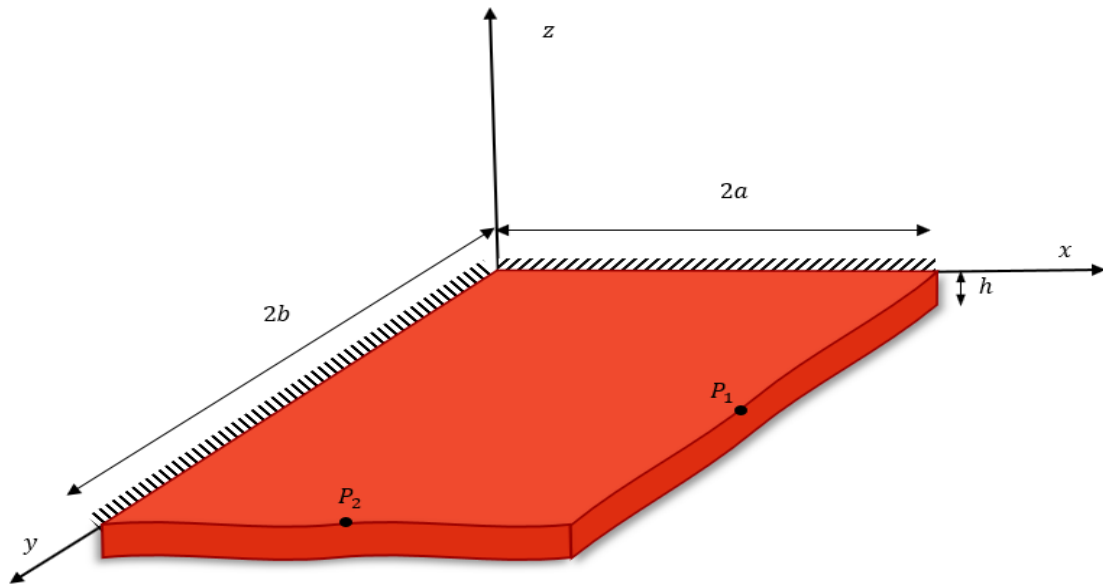
۴-۱- ارتعاشات اجباری میکروورق

در این قسمت بعد از محاسبه ماتریس جرم و سختی به منظور بررسی رفتار ارتعاشی میکروورق براساس فرمول‌بندی المان محدود ارائه شده در بخش قبل، به بررسی رفتار ارتعاشی میکروورق غیرکلاسیک گرادیان کرنشی در ارتعاشات آزاد و اجباری در دو نقطه $P_1 = (2a, b)$ و $P_2 = (a, 2b)$ در لبه‌های آزاد ورق می‌پردازیم. بدین منظور در ابتدا باید به بی‌بعد کردن پارامترهای معادلات بپردازیم. پارامترهای بی‌بعد در این نوع از میکروورق به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

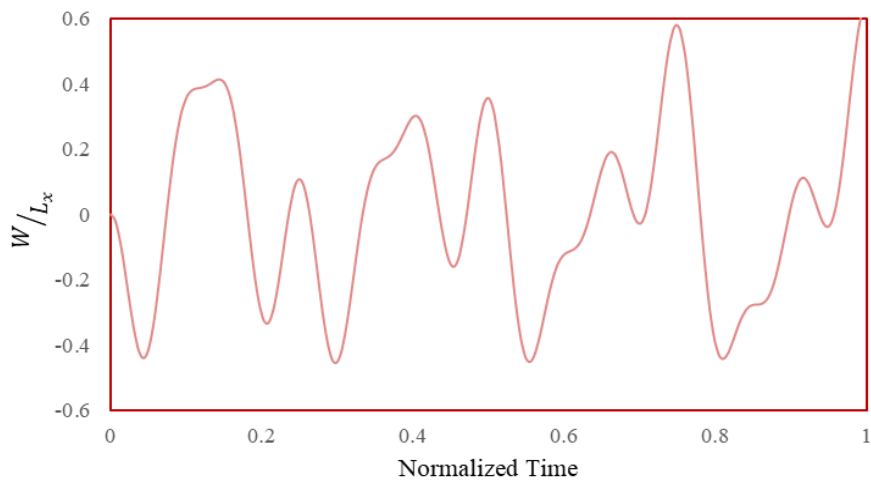
$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \frac{w}{L_x} & \tilde{t} &= \frac{t}{(l_x)^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} & \tilde{W} &= \dot{w} l_x \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \\ \tilde{\theta} &= \dot{\theta} (l_x)^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} & \tilde{F} &= F \frac{(l_x)^2}{EI} \end{aligned} \quad (42)$$

اندیس " \sim " در بالای هر متغیر، بی‌بعد شده آن متغیر را نشان می‌دهد. شرایط اولیه داده شده برای خیز میکروورق در رابطه (۴۳) آورده شده است. به طور طبیعی شیب اولیه به صورت مشتق مکانی خیز و انحنای اولیه ورق نیز از مشتق مکانی شیب به دست می‌آید. سرعت اولیه نقاط مختلف ورق نیز برابر صفر در نظر گرفته شده است. به منظور نمونه تغییرات خیز بی‌بعد شده، شیب بی‌بعد شده در جهات x و y و همچنین انحنا در نقطه P_1 در نمودارهای ارائه شده در شکل (۳) نشان داده شده است.

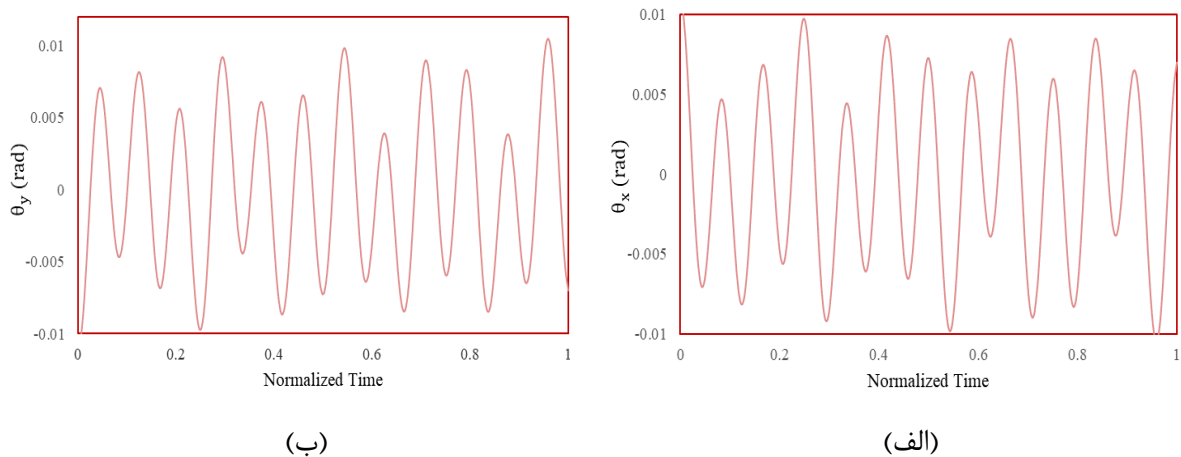
$$w(x, y, t = 0) = 10^3 x^3 y^3, \quad \dot{w}(x, y, t) = 0 \quad (43)$$



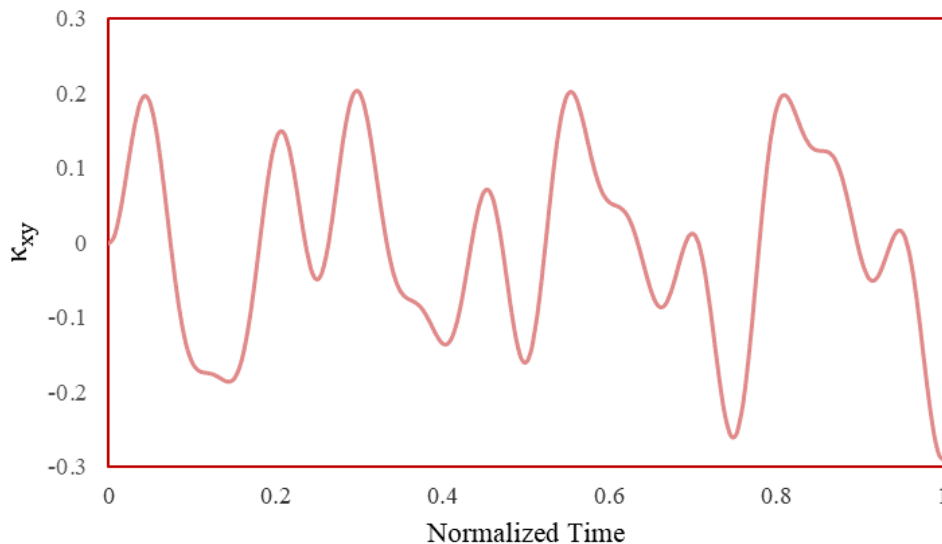
شکل ۲- محل قرارگیری نقاط P_1 و P_2



شکل ۳- تغییرات خیز بی بعد شده میکروورق در نقطه P_1



شکل ۴- (الف) تغییرات شیب بی بعد شده در جهت x و (ب) تغییرات شیب بی بعد شده در جهت y در نقطه P_1



شکل ۵- تغییرات انحنا در نقطه P_1

به منظور بررسی ارتعاشات اجباری، نتایج حاصل از معادله $[M]\{\ddot{d}\} + [K]\{d\} = \{F\}$ به نمایش گذاشته شده است که در این معادله $[M]$ ماتریس جرم، $[K]$ ماتریس سختی، $\{d\}$ بردار جابجایی و $\{F\}$ بردار نیروی وارد شده به ورق در بخش‌های آزاد ورق هستند. طبق شرایط مرزی در معادله (۲۰)، $w(x, y) = 0$ ، $\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = 0$ و $\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = 0$ است. ارتعاشات برای دو نقطه $P_1 = (2a, b)$ و $P_2 = (a, 2b)$ در دوسر آزاد ورق نشان داده شده است. شرایط اولیه به منظور بررسی ارتعاشات آزاد به صورت زیر است.

$$w(x, y, t = 0) = 10^3 x^3 y^3, \quad \dot{w}(x, y, t) = 0 \quad (44)$$

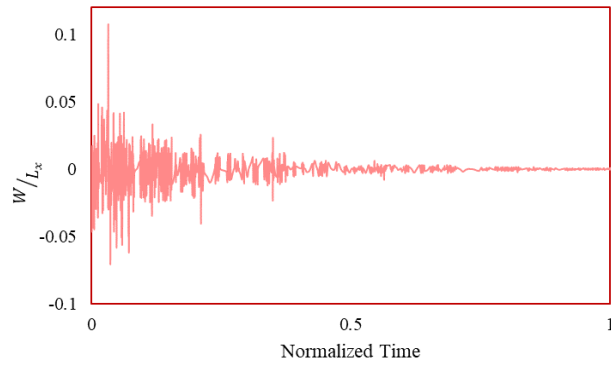
$$0 \leq x \leq 2a, \quad 0 \leq y \leq 2b$$

همچنین نیروی $\{F\}$ به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

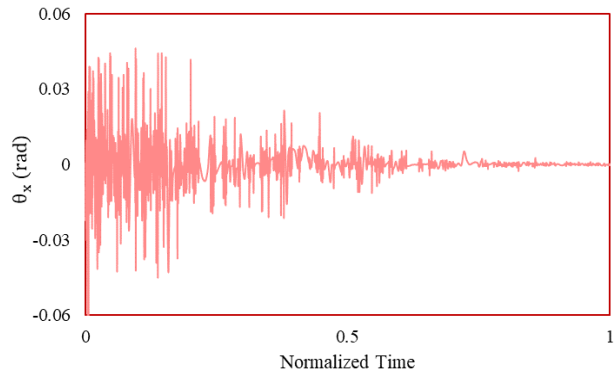
$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots -G_1 \dot{w} - G_2 \dot{w}_x \ 0 \ 0 \ \dots -G_3 \dot{w} \ 0 - G_4 \dot{w}_y \ 0 \ \dots 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (45)$$

که $G_3 = G_4 = 6N \cdot s/m$ و $G_1 = G_2 = 6N/rad$ در نظر گرفته شده است. نمودارهای (الف تا د) شکل (۶) و شکل (۷) رفتار ارتعاشات اجباری میکروورق در حضور نیروی $\{F\}$ نشان داده شده است.

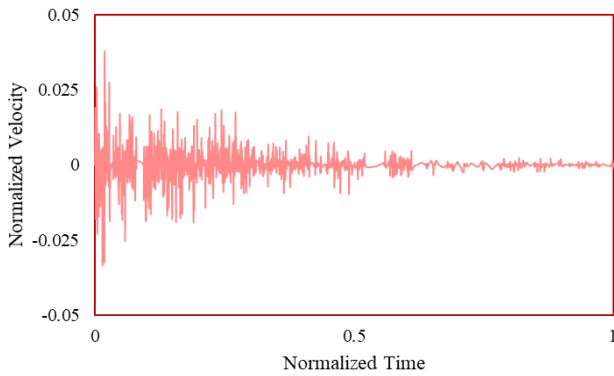
در این نمودارها رفتار ارتعاش اجباری برای خیز، شیب، سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در حضور نیروی $\{F\}$ دامنه نوسانات برای پارامترهای مذکور در بازه زمانی مشخص در دو نقطه P_1 و P_2 در مدت زمان کوتاهی کم شده و تغییرات در دامنه بسیار سریع اتفاق افتاده و در نهایت منجر به دمپ ارتعاشات می‌شود.



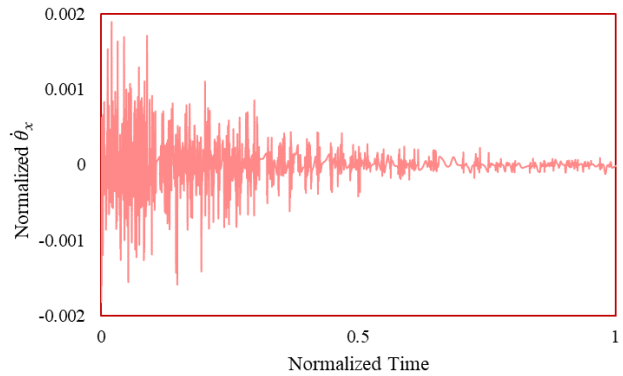
(الف)



(ب)

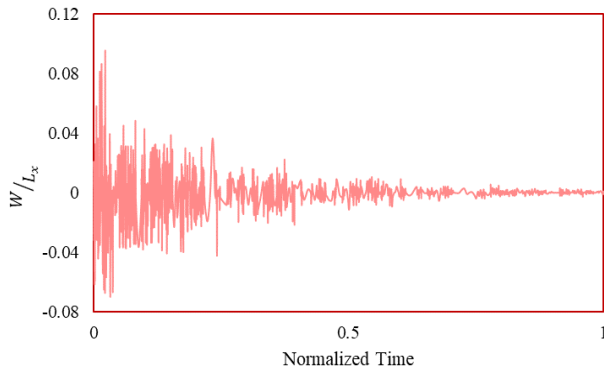


(ج)

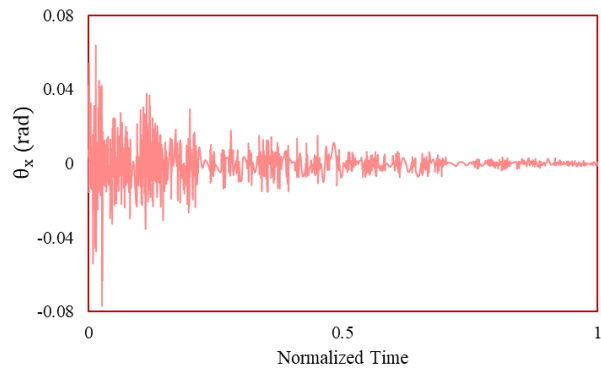


(د)

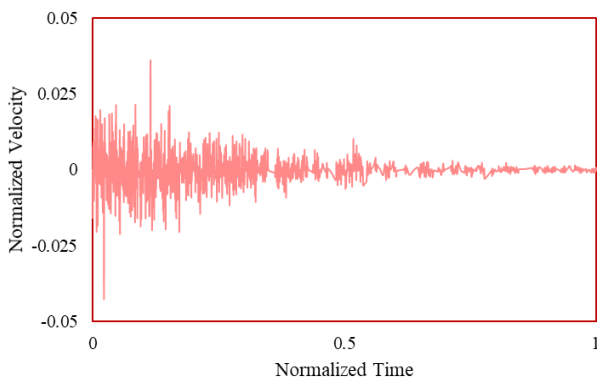
شکل ۶- پارامترهای نقطه P_1 در ارتعاشات اجباری؛ الف) خیز، ب) شیب، ج) سرعت خطی و د) سرعت زاویه‌ای



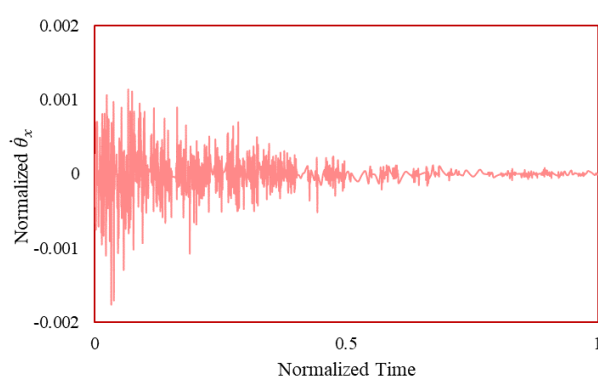
(الف)



(ب)

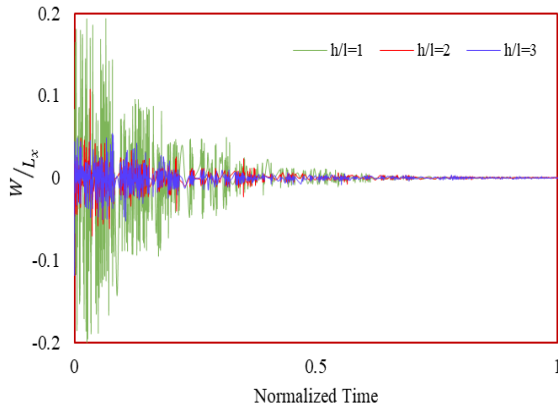


(ج)

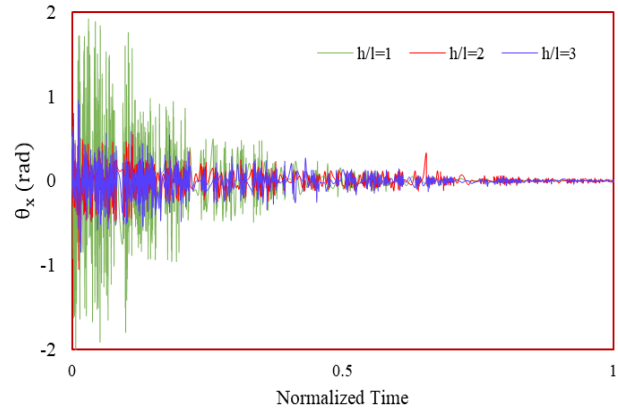


(د)

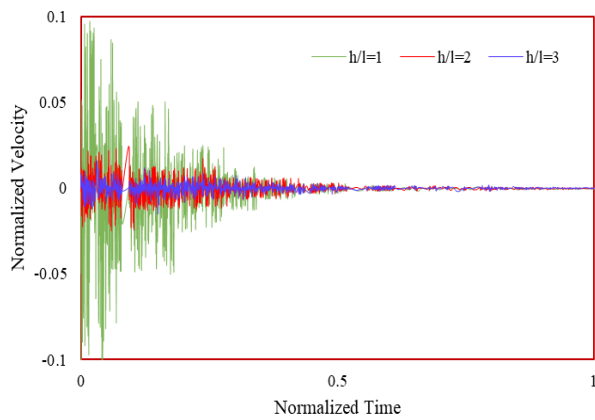
شکل ۷- پارامترهای نقطه P_2 در ارتعاشات اجباری؛ الف) خیز، ب) شیب، ج) سرعت خطی و د) سرعت زاویه‌ای



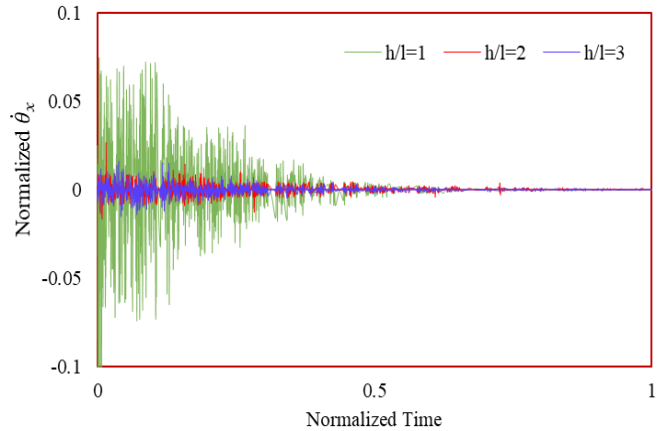
(الف)



(ب)



(ج)



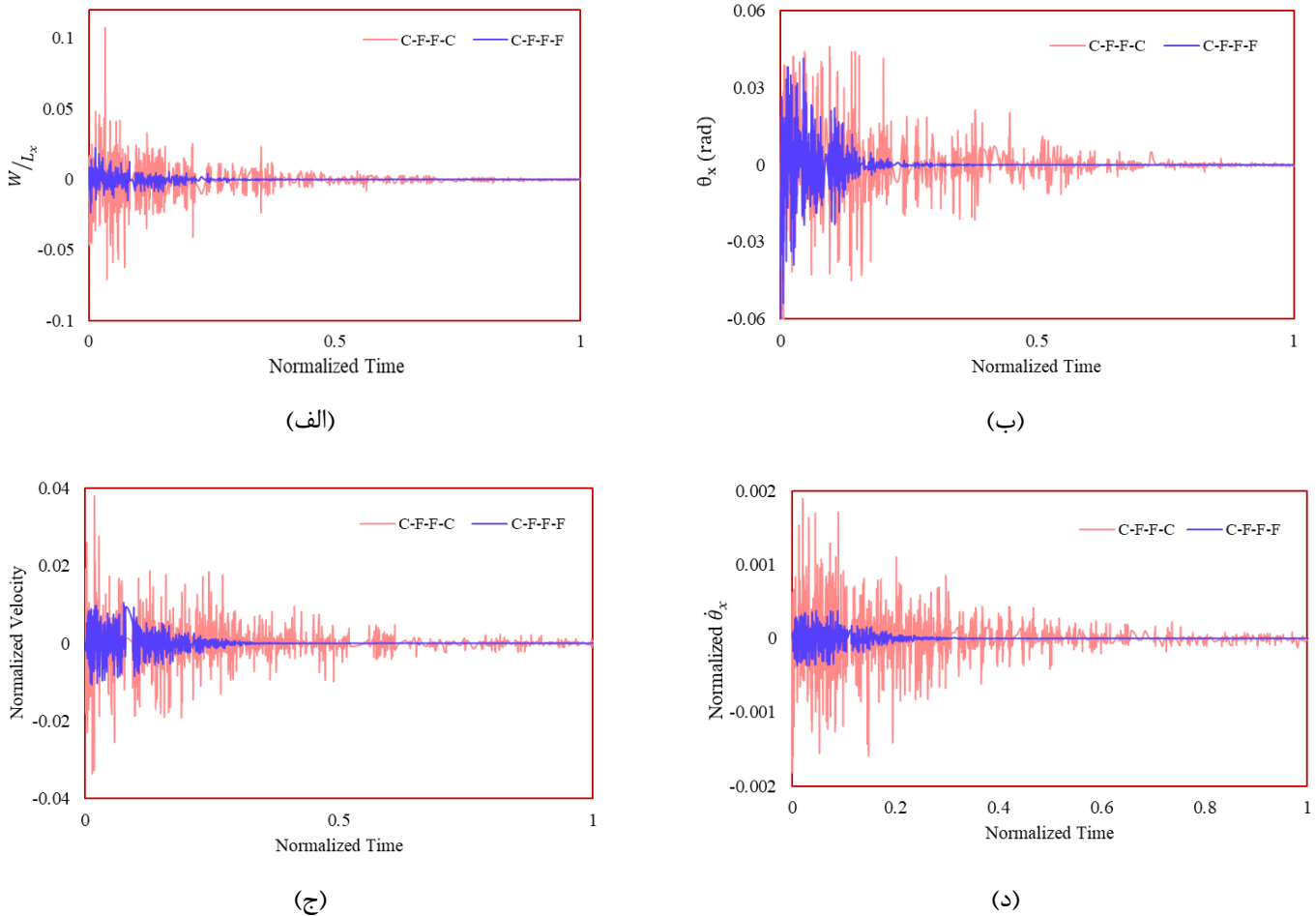
(د)

شکل ۸- مقایسه پارامترهای نقطه P_1 در ارتعاشات اجباری؛ (الف) خیز، (ب) شیب، (ج) سرعت خطی و (د) سرعت زاویه‌ای در نسبت‌های مختلف $\frac{h}{l}$

بعد از بررسی ارتعاشات اجباری در میکروورق گرادیان کرنشی، به بررسی تأثیر تغییر ضخامت بر روی ورق موردنظر می‌پردازیم. در شکل (۶)، نمودارهای (الف تا د) پارامترهای مرتبط با میکروورق در شرایط $h/l = 2$ نمایش داده شده‌اند. در شکل (۸) نیز مقایسه‌ای بین تأثیر تغییرات نسبت h/l بر روی پارامترهای مختلف میکروورق در نقطه P_1 آورده شده است.

این نمودارهای مقایسه‌ای برای $\frac{h}{l} = 1$ و $\frac{h}{l} = 3$ نسبت به حالت معیار $\frac{h}{l} = 2$ گزارش شده‌اند. همانطور که دیده می‌شود، با کاهش این نسبت ($h/l=1$)، تمامی پارامترها نسبت به حالت معیار $\frac{h}{l} = 2$ افزایش چشمگیری داشته و با افزایش این نسبت $\frac{h}{l} = 3$ ، تمامی پارامترها کاهش یافته‌اند.

در این بخش، به بررسی تأثیر تغییرات در شرایط مرزی بر پارامترهای مختلف یک میکروورق گرادیان کرنشی می‌پردازیم. دو حالت (C-F-F-F) و (C-F-F-C) را در نقطه P_1 با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که از نتایج نمودارها مشخص است، با تغییر از حالت (C-F-F-C) به (C-F-F-F) در شرایط مرزی، تمامی پارامترها کاهش پیدا کرده‌اند.



شکل ۹- مقایسه پارامترهای نقطه P_1 در ارتعاشات اجباری؛ (الف) خیز، (ب) شیب، (ج) سرعت خطی و (د) سرعت زاویه‌ای در شرایط مرزی مختلف

۵- نتیجه‌گیری

از آنجایی که میکروورق‌ها در ادوات مختلفی مانند میکروپمپ‌ها، میکروسوئیچ‌ها، میکروآئینه‌ها، میکرواسکرها و میکروژيروسکوپ‌ها به کار می‌روند، بررسی رفتار دینامیکی و ارتعاشی آن‌ها از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است. این بررسی امکان می‌دهد تا بهترین عملکرد و عمر مفید از این میکروسیستم‌ها فراهم آورده شود. رفتار ارتعاشی میکروورق‌ها می‌تواند تحت تأثیر عوامل مختلفی مانند تغییرات دما، فشار، و تنش‌های مکانیکی قرار گیرد. برای بهبود عملکرد این اجزا و پیش‌بینی رفتار آن‌ها در شرایط مختلف، نیاز به تحلیل و مدل‌سازی دقیق رفتار ارتعاشی و پاسخ آن‌ها به اثرات محیطی داریم. این تحلیل‌ها و مدل‌سازی‌ها به طراحان و مهندسان امکان می‌دهند تا میکروورق‌ها را بهبود دهند و از آن‌ها در ادوات میکروالکترومکانیکی با بهترین عملکرد بهره‌برند. در این مقاله، در ابتدا معادلات حاکم بر میکروورق غیرکلاسیک گرادیان کرنشی با استفاده از اصل همیلتون محاسبه می‌شوند. از آنجایی که روش‌های حل ارائه شده در منابع ذکر شده در این مقاله، قادر به تعیین تغییر شکل میکروورق‌ها، با هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی مختلف نیستند و از آنجایی که فرمول‌بندی المان محدود استاندارد میکروورق گرادیان کرنشی نیاز به توابع درونیابی با پیوستگی C^2 دارد، یعنی مشتقات مرتبه اول و دوم خیز باید در نقاط گرهی پیوسته باشند. لذا براساس فرمول‌بندی مقاله حاضر، شرایط پیوستگی

مشتقات مرتبه اول و دوم بدون هیچ تقریبی ارضا می گردند و توابع درونیابی C^2 به صورت صریح ارائه می گردند. بنابراین، در این مقاله با استفاده از روش المان محدود و توابع شکل هرمیتین ماتریس جرم و سختی میکروورق غیرکلاسیک گرادیان کرنشی محاسبه می شود. مقایسه نتایج بدست آمده از این روش و روش تحلیلی، نزدیکی این نتایج به یکدیگر و قابل استناد بودن نتایج حاصل از روش المان محدود را به خوبی نشان می دهد. سپس با استفاده از المان جرم و سختی به دست آمده، فرکانس های طبیعی میکروورق غیرکلاسیک گرادیان کرنشی با شرایط مرزی مختلف بیان می شود و همان طور که در بخش مربوطه ذکر شده است، با ریزتر شدن مش ها، نتایج المان محدود به نتایج حل تحلیلی نزدیک تر می شود و نتایج مطلوب تری ارائه می شود. همچنین تاثیر نسبت $\frac{h}{l}$ بر فرکانس های طبیعی میکروورق در شرایط مرزی مختلف نشان داده شده است که هر قدر نسبت $\frac{h}{l}$ کاهش یابد، فرکانس های طبیعی افزایش یافته و اگر این نسبت افزایش یابد، فرکانس های طبیعی کاهش می یابند.

در ادامه با استفاده از نتایج بدست آمده از روش المان محدود به بررسی رفتار ارتعاش اجباری میکروورق گرادیان کرنشی با شرایط اولیه مشخص و نیروی مشخص در نقاطی در قسمت آزاد میکروورق P_1 و P_2 پرداخته شده است و پارامترهای بی بعد خیز:، شیب، سرعت خطی و سرعت زاویه ای در این دو نقطه نشان داده شده است. درانتها بر پارامترهای مذکور در نقطه P_1 برای دو حالت مرزی (C-F-F-C) و (C-F-F-F) با یکدیگر مقایسه شده اند. نمودارها نشان می دهد که با تغییر شرایط مرزی از (C-F-F-C) به (C-F-F-F)، تمامی پارامترهای خیز:، شیب، سرعت خطی و سرعت زاویه ای در نمودارها، کاهش یافته است.

مراجع

- [1] M. Baghani, "Analytical Study on Size-dependent Static Pull-in Voltage of Microcantilevers using the Modified Couple Stress Theory," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 54, pp. 99-105, 2012, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.01.001>.
- [2] M. H. Ghayesh, M. Amabili, and H. Farokhi, "Nonlinear Forced Vibrations of a Microbeam Based on the Strain Gradient Elasticity Theory," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 63, pp. 52–60, Feb. 2013, doi: 10.1016/J.IJENGSCI.2012.12.001.
- [3] M. H. Ghayesh, and H. Farokhi, "Chaotic Motion of a Parametrically Excited Microbeam," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 96, pp. 34–45, Nov. 2015, doi: 10.1016/J.IJENGSCI.2015.07.004.
- [4] P.-F. Indermühle, G. Schürmann, G.-A. Racine, and N. F. de Rooij, "Atomic Force Microscopy using Cantilevers with Integrated Tips and Piezoelectric Layers for Actuation and Detection," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 7, No. 3, p. 218, 1997, doi: 10.1088/0960-1317/7/3/036.
- [5] W.-M. Zhang, and G. Meng, "Nonlinear Dynamic Analysis of Electrostatically Actuated Resonant MEMS Sensors under Parametric Excitation," *IEEE Sensors Journal*, Vol. 7, No. 3, pp. 370–380, 2007, doi: 10.1109/JSEN.2006.890158.

- [6] L. Yin, Q. Qian, L. Wang, and W. Xia, "Vibration Analysis of Microscale Plates Based on Modified Couple Stress Theory," *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 23, No. 5, pp. 386–393, Oct. 2010, doi: 10.1016/S0894-9166(10)60040-7.
- [7] R. A. Toupin, "Elastic Materials with Couple-stresses," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 385–414, 1962, doi: 10.1007/BF00253945.
- [8] R. D. Mindlin, and H. F. Tiersten, "Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 415–448, 1962, doi: 10.1007/BF00253946.
- [9] W. T. Koiter, "Couple-stresses in the Theory of Elasticity, I & II," 1969. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123837588>.
- [10] F. Yang, A. C. M. Chong, D. C. C. Lam, and P. Tong, "Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731–2743, May 2002, doi: 10.1016/S0020-7683(02)00152-X.
- [11] S. K. Park, and X.-L. Gao, "Bernoulli–Euler Beam Model Based on a Modified Couple Stress Theory," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, No. 11, p. 2355, 2006, doi: 10.1088/0960-1317/16/11/015.
- [12] H. M. Ma, X. L. Gao, and J. N. Reddy, "A Microstructure-dependent Timoshenko Beam Model Based on a Modified Couple Stress Theory," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 56, No. 12, pp. 3379–3391, Dec. 2008, doi: 10.1016/J.JMPS.2008.09.007.
- [13] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, and K. Wang, "The Size-dependent Natural Frequency of Bernoulli–Euler Micro-beams," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 46, No. 5, pp. 427–437, May 2008, doi: 10.1016/J.IJENGSCI.2007.10.002.
- [14] M. Asghari, M. H. Kahrobaian, and M. T. Ahmadian, "A Nonlinear Timoshenko Beam Formulation Based on the Modified Couple Stress Theory," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 12, pp. 1749–1761, Dec. 2010, doi: 10.1016/J.IJENGSCI.2010.09.025.
- [15] M. Asghari, M. Rahaeifard, M. H. Kahrobaian, and M. T. Ahmadian, "The Modified Couple Stress Functionally Graded Timoshenko Beam Formulation," *Materials & Design*, Vol. 32, No. 3, pp. 1435–1443, Mar. 2011, doi: 10.1016/J.MATDES.2010.08.046.
- [16] M. Ghadiri, and N. Shafiei, "Vibration Analysis of Rotating Functionally Graded Timoshenko Microbeam Based on Modified Couple Stress Theory under Different Temperature Distributions," *Acta Astronautica*, Vol. 121, pp. 221–240, Apr. 2016, doi: 10.1016/J.ACTAASTRO.2016.01.003.
- [17] S. Bhattacharya, and D. Das, "Free Vibration Analysis of Bidirectional-functionally Graded and Double-tapered Rotating Micro-beam in Thermal Environment using Modified Couple Stress Theory," *Composite Structures*, Vol. 215, pp. 471–492, May 2019, doi: 10.1016/J.COMPSTRUCT.2019.01.080.

- [18] G. C. Tsiatas, "A New Kirchhoff Plate Model Based on a Modified Couple Stress Theory," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, No. 13, pp. 2757–2764, Jun. 2009, doi: 10.1016/J.IJSOLSTR.2009.03.004.
- [19] E. Jomehzadeh, H. R. Noori, and A. R. Saidi, "The Size-dependent Vibration Analysis of Micro-plates Based on a Modified Couple Stress Theory," *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 43, No. 4, pp. 877–883, Feb. 2011, doi: 10.1016/J.PHYSE.2010.11.005.
- [20] L. L. Ke, Y. S. Wang, J. Yang, and S. Kitipornchai, "Free Vibration of Size-dependent Mindlin Microplates Based on the Modified Couple Stress Theory," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 1, pp. 94–106, Jan. 2012, doi: 10.1016/J.JSV.2011.08.020.
- [21] C. M. C. Roque, A. J. M. Ferreira, and J. N. Reddy, "Analysis of Mindlin Micro Plates with a Modified Couple Stress Theory and a Meshless Method," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 7, pp. 4626–4633, Apr. 2013, doi: 10.1016/J.APM.2012.09.063.
- [22] Y. S. Li, and E. Pan, "Static Bending and Free Vibration of a Functionally Graded Piezoelectric Microplate Based on the Modified Couple-stress Theory," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 97, pp. 40–59, Dec. 2015, doi: 10.1016/J.IJENGSCI.2015.08.009.
- [23] R. D. Mindlin, "Second Gradient of Strain and Surface-tension in Linear Elasticity," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 1, No. 4, pp. 417–438, Nov. 1965, doi: 10.1016/0020-7683(65)90006-5.
- [24] R. D. Mindlin, and N. N. Eshel, "On First Strain-gradient Theories in Linear Elasticity," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, No. 1, pp. 109–124, Jan. 1968, doi: 10.1016/0020-7683(68)90036-X.
- [25] B.S. Altan, and E.C. Aifantis, "On Some Aspects in the Special Theory of Gradient Elasticity," *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, Vol. 8, No. 3, pp. 231–282, 1997, doi: doi:10.1515/JMBM.1997.8.3.231.
- [26] N. A. Fleck, G. M. Muller, M. F. Ashby, and J. W. Hutchinson, "Strain Gradient Plasticity: Theory and Experiment," *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 42, No. 2, pp. 475–487, Feb. 1994, doi: 10.1016/0956-7151(94)90502-9.
- [27] N. A. Fleck, and J. W. Hutchinson, "A Reformulation of Strain Gradient Plasticity," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 49, No. 10, pp. 2245–2271, Oct. 2001, doi: 10.1016/S0022-5096(01)00049-7.
- [28] D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong, J. Wang, and P. Tong, "Experiments and Theory in Strain Gradient Elasticity," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1477–1508, Aug. 2003, doi: 10.1016/S0022-5096(03)00053-X.
- [29] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, and K. Wang, "Static and Dynamic Analysis of Micro Beams Based on Strain Gradient Elasticity Theory," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, No. 4, pp. 487–498, Apr. 2009, doi: 10.1016/J.IJENGSCI.2008.08.008.

- [30] B. Wang, J. Zhao, and S. Zhou, "A Micro Scale Timoshenko Beam Model Based on Strain Gradient Elasticity Theory," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 29, No. 4, pp. 591–599, Jul. 2010, doi: 10.1016/J.EUROMECHSOL.2009.12.005.
- [31] B. Akgöz, and Ö. Civalek, "Strain Gradient Elasticity and Modified Couple Stress Models for Buckling Analysis of Axially Loaded Micro-scaled Beams," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, No. 11, pp. 1268–1280, Nov. 2011, doi: 10.1016/J.IJENGSCI.2010.12.009.
- [32] H. Arvin, "Free Vibration Analysis of Micro Rotating Beams Based on the Strain Gradient Theory using the Differential Transform Method: Timoshenko Versus Euler-Bernoulli Beam Models," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 65, pp. 336–348, Sep. 2017, doi: 10.1016/J.EUROMECHSOL.2017.05.006.
- [33] B. Zhao, J. Chen, T. Liu, W. Song, and J. Zhang, "A New Timoshenko Beam Model Based on Modified Gradient Elasticity: Shearing Effect and Size Effect of Micro-beam," *Composite Structures*, Vol. 223, p. 110946, Sep. 2019, doi: 10.1016/J.COMPSTRUCT.2019.110946.
- [34] K. A. Lazopoulos, "On the Gradient Strain Elasticity Theory of Plates," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 23, No. 5, pp. 843–852, Sep. 2004, doi: 10.1016/J.EUROMECHSOL.2004.04.005.
- [35] B. Wang, S. Zhou, J. Zhao, and X. Chen, "A Size-dependent Kirchhoff Micro-plate Model Based on Strain Gradient Elasticity Theory," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 30, No. 4, pp. 517–524, Jul. 2011, doi: 10.1016/J.EUROMECHSOL.2011.04.001.
- [36] A. Ashoori Movassagh, and M. J. Mahmoodi, "A Micro-scale Modeling of Kirchhoff Plate Based on Modified Strain-gradient Elasticity Theory," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 40, pp. 50–59, Jul. 2013, doi: 10.1016/J.EUROMECHSOL.2012.12.008.
- [37] S. Ramezani, "Nonlinear Vibration Analysis of Micro-plates Based on Strain Gradient Elasticity Theory," *Nonlinear Dynamics*, Vol. 73, No. 3, pp. 1399–1421, 2013, doi: 10.1007/s11071-013-0872-1.
- [38] S. Sahmani, and R. Ansari, "On the Free Vibration Response of Functionally Graded Higher-order Shear Deformable Microplates Based on the Strain Gradient Elasticity Theory," *Composite Structures*, Vol. 95, pp. 430–442, Jan. 2013, doi: 10.1016/J.COMPSTRUCT.2012.07.025.
- [39] R. Ansari, R. Gholami, M. Faghih Shojaei, V. Mohammadi, and S. Sahmani, "Bending, Buckling and Free Vibration Analysis of Size-dependent Functionally Graded Circular/Annular Microplates Based on the Modified Strain Gradient Elasticity Theory," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 49, pp. 251–267, Jan. 2015, doi: 10.1016/J.EUROMECHSOL.2014.07.014.
- [40] B. Akgöz, and Ö. Civalek, "A Microstructure-dependent Sinusoidal Plate Model Based on the Strain Gradient Elasticity Theory," *Acta Mechanica*, Vol. 226, No. 7, pp. 2277–2294, 2015, doi: 10.1007/s00707-015-1308-4.

- [41] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, and P. Phung-Van, "Size Dependent Free Vibration Analysis of Multilayer Functionally Graded GPLRC Microplates Based on Modified Strain Gradient Theory," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 169, pp. 174–188, Jul. 2019, doi: 10.1016/J.COMPOSITESB.2019.02.048.
- [42] M. H. Kahrobaiyan, M. Asghari, and M. T. Ahmadian, "A Timoshenko Beam Element Based on the Modified Couple Stress Theory," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 79, pp. 75–83, Feb. 2014, doi: 10.1016/J.IJMECSCI.2013.11.014.
- [43] R. Damghanian, K. Asemi, and M. Babaei, "A New Beam Element for Static, Free and Forced Vibration Responses of Microbeams Resting on Viscoelastic Foundation Based on Modified Couple Stress and Third-order Beam Theories," *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, Vol. 46, No. 1, pp. 131–147, 2022, doi: 10.1007/s40997-020-00407-z.
- [44] F. Dadgar-Rad, and A. Beheshti, "A Nonlinear Strain Gradient Finite Element for Microbeams and Microframes," *Acta Mechanica*, Vol. 228, No. 5, pp. 1941–1964, 2017, doi: 10.1007/s00707-017-1798-3.
- [45] H. Farahmand, A. R. Ahmadi, and S. Arabnejad, "Thermal Buckling Analysis of Rectangular Microplates using Higher Continuity P-version Finite Element Method," *Thin-Walled Structures*, Vol. 49, No. 12, pp. 1584–1591, Dec. 2011, doi: 10.1016/J.TWS.2011.08.006.
- [46] A. Kazemi, R. Vatankhah, and M. Farid, "Nonlinear Pull-in Instability of Microplates with Piezoelectric Layers using Modified Couple Stress Theory," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 130, pp. 90–98, Sep. 2017, doi: 10.1016/J.IJMECSCI.2017.05.044.
- [47] F. Dadgar-Rad, "Analysis of Strain Gradient Reissner–Mindlin Plates using a C0 Four-node Quadrilateral Element," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 122, pp. 79–94, Mar. 2017, doi: 10.1016/J.IJMECSCI.2017.01.005.
- [48] A. Karamanli, and M. Aydogdu, "Vibration of Functionally Graded Shear and Normal Deformable Porous Microplates via Finite Element Method," *Composite Structures*, Vol. 237, p. 111934, Apr. 2020, doi: 10.1016/J.COMPSTRUCT.2020.111934.
- [49] R. D. Mindlin, "Micro-structure in Linear Elasticity," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, No. 1, pp. 51–78, 1964, doi: 10.1007/BF00248490.
- [50] D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong, J. Wang, and P. Tong, "Experiments and Theory in Strain Gradient Elasticity," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1477–1508, Aug. 2003, doi: 10.1016/S0022-5096(03)00053-X.
- [51] B. Wang, S. Zhou, J. Zhao, and X. Chen, "A Size-dependent Kirchhoff Micro-plate Model Based on Strain Gradient Elasticity Theory," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 30, No. 4, pp. 517–524, Jul. 2011, doi: 10.1016/J.EUROMECHSOL.2011.04.001.
- [52] J. W. Yan, and W. Zhang, "An Atomistic-continuum Multiscale Approach to Determine the Exact Thickness and Bending Rigidity of Monolayer Graphene," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 514, p. 116464, Dec. 2021, doi: 10.1016/J.JSV.2021.116464.

[53] E. Oate, *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Beams, Plates and Shells* - V. 2, Springer Publishing Company, Incorporated, 2013, ISBN: 140208742X.

پیوست الف - اجزای ماتریس سختی

ماتریس سختی به دست آمده از معادله (۳۷) به شرح زیر است.

$$K = K_\varepsilon + K_\eta + K_\gamma + K_\chi \quad (\text{الف-۱})$$

که در آن

$$K_\varepsilon = \int_V (B^\varepsilon)^T D^c B^\varepsilon dV, \quad K_\eta = \int_V (B^\eta)^T D^\eta \Upsilon^\eta B^\eta dV \quad (\text{الف-۲})$$

$$K_\gamma = \int_V (B^\gamma)^T D^\gamma B^\gamma dV, \quad K_\chi = \int_V (B^\chi)^T D^\chi \Upsilon^\chi B^\chi dV$$

اجزای K_ε , K_η , K_γ و K_χ به صورت زیر است.

$$B^\varepsilon = -z \begin{bmatrix} N_{,xx} \\ N_{,yy} \\ N_{,xy} \end{bmatrix}, \quad D^c = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۳})$$

$$B^\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -N_{,xx} + N_{,yy} \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} N_{,xxx} + N_{,xyy} \\ N_{,yyy} + N_{,xxy} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D^\gamma = 2\mu l_0^2 z^2 \quad (\text{الف-۴})$$

Υ^η و Υ^χ ماتریس‌های قطری هستند.

$$B^\chi = \begin{bmatrix} N_{,xy} \\ -N_{,xy} \\ \frac{1}{2}(N_{,yy} - N_{,xx}) \end{bmatrix}, \quad D^\chi = 2\mu l_2^2 z^2, \quad \text{diag}(\Upsilon^\chi) = [1 \ 1 \ 2] \quad (\text{الف-۵})$$

$$B^\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{15}(N_{,yy} - 4N_{,xx}) \\ \frac{-1}{3}(N_{,xy}) \\ \frac{1}{15}(N_{,xx} - 4N_{,yy}) \\ \frac{1}{5}(N_{,xx} + N_{,yy}) \end{bmatrix} - \frac{z}{5} \begin{bmatrix} 3N_{,xyy} - 2N_{,xxx} \\ 3N_{,yyy} - 4N_{,xxy} \\ N_{,xxx} - 4N_{,xyy} \\ 3N_{,xxy} - 2N_{,yyy} \\ N_{,xxx} + N_{,xyy} \\ N_{,yyy} + N_{,xxy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D^\eta = 2\mu l_1^2 z^2 \quad (\text{الف-۶})$$

$$\text{diag}(\Upsilon^\eta) = [1 \ 3 \ 3 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 6 \ 3 \ 1]$$

Vibration Analysis of Kirchhoff Micro Plate with C^2 Continuity

Zohreh Malek hosseini

Ph.D. Student, Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

z.malekhoseini@email.kntu.ac.ir

*Corresponding author: **Ali Najafi Ardekany**

Assistant Professor, Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

Researcher, Water Supply and Transmission Company, Tehran, Iran

najafi@kntu.ac.ir

Abstract

In this article, the analysis of free and forced vibrations of a microplate based on the Kirchhoff gradient strain theory with clamped boundary conditions is presented using the finite element formulation with C^2 continuity. Due to the presence of higher-order derivatives, C^2 continuous interpolation functions are employed to provide a standard formulation. Subsequently, the stiffness and mass matrices of the microplate element are extracted using the Hamiltonian principle, and the formulation is applied to a four-noded quadrilateral element with 36 degrees of freedom. The natural frequencies of the desired microplate are obtained using the finite element method and compared with analytical results. Additionally, by refining the element dimensions (mesh refinement), the accuracy of this method is compared by examining the obtained frequencies with the finite element method and the desired analytical results. Furthermore, the natural frequencies for microplates with different boundary conditions are provided, and the influence of the h/l ratio on the natural frequencies of microplates with various boundary conditions is investigated.

Subsequently, vibration diagrams for the microplate with specified initial conditions and applied forces are presented. The effects of boundary conditions and the h/l ratio on various microplate parameters are examined and discussed.

Keywords: Non-classical element of micro-plate, Strain gradient elasticity theory, Finite element method, Forced vibration