

## مطالعه تأثیر فشار ستون سیال بر پاسخ دینامیکی قطاع دایروی توخالی با استفاده از روش تفاضلات مربعی

در این پژوهش به بررسی پاسخ دینامیکی قطاع دایروی توخالی در تماس با سیال تراکم ناپذیر تحت بار هارمونیک پرداخته شده است. معادلات حاکم ورق بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با به کارگیری اصل همپیتون استخراج شده است. همچنین معادله حاکم بر رفتار نوسانی سیال با حل معادله لاپلاس تابع پتانسیل سرعت و ارضای شرایط مرزی سیال به دست آمده است. از روش تفاضلات مربعی و نیومارک برای تعیین رفتار ارتعاشی ورق استفاده شده است. علاوه بر این با استفاده از روش تفاضلات مربعی فرکانس های طبیعی قطاع در حالت خشک و تر به منظور مقایسه با مراجع به دست آمده است. در پایان، پس از صحت گذاری بر روی پاسخ های به دست آمده از طریق نتایج سایر محققان و همچنین مدل سازی ورق در تماس با سیال در نرم افزار المان محدود آباکوس، تأثیر پارامترهای مختلف هندسی از قبیل نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق، زاویه قطاع، نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق، چگالی سیال و ارتفاع سیال به ضخامت ورق بر روی پاسخ دینامیکی قطاع دایروی توخالی در تماس با سیال بررسی شده است.

امیر حسین  
نصراله براتی<sup>۱</sup>  
استادیار

واژه های راهنما: ارتعاش اجباری، قطاع دایروی توخالی، پاسخ دینامیکی، روش تفاضلات مربعی

### ۱- مقدمه

ورق ها سازه های مقاومی هستند که به طور گسترده در صنایع مورد استفاده قرار می گیرند. مشکل ارتعاش ورق ها در تماس با سیال، توجه بسیاری از محققین را در گذشته و حال حاضر به خود جلب کرده است. این مشکل را می توان در انواع مختلف مهندسی از جمله هسته ای، مخازن ذخیره مایع، صفحات خورشیدی، صنایع دریایی و همچنین ساخت سازه های شناور مانند شهرها و پل های شناور مشاهده نمود. بنابراین بسیار مهم است که رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق هایی که در معرض شرایط بارگیری مختلف قرار می گیرند به وضوح قابل درک باشد تا بتوان از آنها در این کاربردهای صنعتی با خیال آسوده استفاده کرد. در سال (۲۰۱۳) تارپوردی لو و همکارانش [۱]، ارتعاشات آزاد یک ورق دایروی نامتقارن را در تماس با سیال قابل تراکم بررسی کردند. آنها از دو روش سری های بسل-فوریه و روش تغییرات برای به دست آوردن فرکانس های طبیعی و جرم اضافه شده<sup>۲</sup> مربوطه استفاده کردند. هر دو روش مورد استفاده نتایج نزدیک به هم داشتند.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد الیگودرز، الیگودرز، ایران  
[amir.barati@iau.ac.ir](mailto:amir.barati@iau.ac.ir) و [a.nasrolahbarati@gmail.com](mailto:a.nasrolahbarati@gmail.com)

<sup>۲</sup> Added mass

خورشیدی و همکارانش در سال (۲۰۱۷) [۲]، ارتعاش آزاد ورق مستطیلی در تماس با سیال را به طور تجربی مورد مطالعه قرار دادند. آنها صفحه مستطیل شکل را به‌عنوان یکی از دیواره‌های مخزن حاوی سیال در نظر گرفتند. همچنین برای به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی ورق از آزمایش مودال استفاده کردند.

در سال (۲۰۱۳) عسگری و همکارانش [۳]، ارتعاش یک ورق دایروی غوطه‌ور در سیال را بررسی کردند. آنها از روش نیمه تحلیلی برای حل معادلات ورق در دو حالت تکیه گاهی لبه ساده و لبه آزاد استفاده کردند و نتایج حاصل از این تحلیل را با نتایج آزمایش تجربی مورد مقایسه قرار دادند. در سال (۲۰۱۸) یوسف‌زاده و همکارانش [۴]، ارتعاش اجباری یک ورق دایروی از جنس مواد هدفمند را تحت بار هارمونیک بررسی کردند. آنها از روش چبیشف-ریتز برای تعیین رفتار ارتعاشی ورق استفاده کردند. آنها همچنین پارامترهای مختلف هندسی را بر پاسخ دینامیکی ورق مورد مطالعه قرار دادند که نتایج کار آنها حاکی از آن بود که خیز ورق در مرکز با وجود مایع کاهش می‌یابد. حسینی‌هاشمی و همکارانش در سال (۲۰۱۰) [۵] به تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های مستطیل شکل نسبتاً ضخیم که روی بستر الاستیک قرار داشت و به‌طور کامل یا جزئی در تماس با سیال بود پرداختند. آنها با استفاده از روش ریتز و بسط فوری سیال را مدل کردند و عبارت دقیقی برای حل حرکت سیال به فرم انتگرالی به‌دست آوردند. کوزولفسکی در سال (۲۰۰۹) [۶]، ارتعاش ورق در تماس با سیال ویسکوز را مورد مطالعه قرار داد. ایشان برای یافتن وابستگی کاهش فرکانس به ویسکوزیته سیال، یک محاسبه تحلیلی با استفاده از معادلات ناویر استوکس برای سیالات نیوتنی انجام دادند. نتایج کار نشان داد با اضافه کردن اثر ویسکوزیته به جرم مجازی اگر چه برای صفحات ماکروسکوپی ناچیز است، اما برای صفحات نازک مورد استفاده در میکروسنسورها اهمیت قابل توجهی دارد.

در سال (۲۰۱۶) ونگ و همکارانش [۷]، ارتعاش یک ورق مستطیلی متحرک عمودی غوطه‌ور در سیال را بررسی کردند. آنها از تئوری کلاسیک برای به‌دست آوردن معادلات حاکم استفاده کردند. همچنین با استفاده از تابع پتانسیل سرعت و معادله برنولی، فشار درجه حرارت وارد بر ورق متحرک را تعیین کردند. آنها همچنین اثر درجه حرارت روی ارتعاش ورق را معادل جرم اضافه‌شده بر ورق در نظر گرفتند و فرکانس‌های طبیعی و سرعت بحرانی را استخراج کردند. یوسف‌زاده و همکارانش در سال (۲۰۱۹) [۸]، ارتعاش اجباری ورق نسبتاً ضخیم مستطیلی از جنس مواد مدرج تابعی در تماس با سیال تراکم‌ناپذیر تحت بار متحرک را مطالعه نمودند. آنها با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و بکارگیری روش بسط شکل مودها معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی را استخراج کردند. همچنین تأثیر پارامترهای مختلف هندسی از قبیل نسبت طول به عرض ورق، ضخامت به طول ورق، چگالی سیال و ضریب توان کسر حجمی را روی پاسخ دینامیکی ورق بررسی کردند. یوسف‌زاده و همکارانش در سال (۲۰۱۹) [۹]، ارتعاش ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال محدود را مورد بررسی قرار دادند. آنها معادلات حاکم را با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و توابع هارمونیک چبیشف و معادله سیال را با استفاده از حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت استخراج کردند. در ادامه از روش ریتز برای تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق دایروی در تماس با سیال استفاده کردند. نتایج آنها نشان داد که با افزایش ارتفاع سیال درون مخزن مقادیر فرکانس طبیعی ورق به‌طور قابل توجهی کاهش پیدا می‌کند. جئونگ و کیم در سال (۲۰۰۵) [۱۰]، ارتعاش هیدرواستاتیک یک ورق دایروی غوطه‌ور در یک سیال تراکم‌ناپذیر را بررسی کردند. آنها با استفاده از روش ریلی ریتز و سری فوریه-بسل یک راه حل تحلیلی برای استخراج فرکانس‌های طبیعی ورق در تماس با سیال ارائه دادند. عاصمی و همکارانش در سال (۲۰۱۴) [۱۱]،

به تجزیه و تحلیل ارتعاش استاتیکی و دینامیکی سه بعدی قطاع دایروی از جنس مواد هدفمند دوبعدی پرداختند. آنها از روش نیومارک و اجزای محدود برای حل معادلات سه‌بعدی الاستیسیته نسبت به زمان و مکان استفاده کردند. نتایج حاصل کار آنها برتری استفاده از مواد هدفمند دوبعدی نسبت به یک‌بعدی را نشان داد.

رضا شهوه و همکارانش در سال (۲۰۲۰) [۱۲]، ارتعاش آزاد یک قطاع دایروی در تماس با سیال را بررسی کردند. آنها با استفاده از شکل مودها و روش گالرکین معادلات حاکم را بر اساس زمان به معادلات دیفرانسیل خطی تبدیل کردند. سپس با در نظر گرفتن پاسخ هارمونیک و حل معادله مشخصه فرکانس‌های طبیعی ورق را استخراج کردند. جمالزاده و سعیدی در سال (۲۰۰۹) [۱۳]، یک راه حل دقیق تحلیل مبتنی بر نظریه ورق میندلین برای ارتعاش آزاد قطاع همسانگر عرضی ارائه کردند. آنها با معرفی یک تابع لایه مرزی سه معادله کوپل شده حاکم را به دو معادله غیر کوپل شده تبدیل کردند. آنها با حل معادلات غیر کوپله و ارضای شرایط مرزی فرکانس طبیعی سیستم را به دست آوردند.

در سال (۲۰۱۴) خورشیدی و بخششی [۱۴]، ارتعاش آزاد ورق مستطیلی از جنس مواد هدفمند در تماس با سیال را بررسی کردند. آنها برای استخراج فرکانس‌های طبیعی ورق در تماس با سیال از روش ریلی ریتز بر مبنای انرژی پتانسیل کمینه استفاده کردند. در نهایت تأثیر پارامترهای مختلفی از جمله، نسبت طول، ضخامت ورق، ارتفاع سیال، عرض مخزن و شرایط مرزی را بر روی فرکانس ورق در تماس با سیال مورد مطالعه قرار دادند.

مایونگ مو جانگ و همکارانش در سال (۲۰۰۳) [۱۵]، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در تماس با سیال محدود را مورد بررسی قرار دادند. آنها از روش بسط سری‌های بسل-فوریه و روش ریلی ریتز برای به دست آوردن معادله حاکم استفاده کردند. در نهایت فرکانس‌های طبیعی دو ورق در تماس با سیال و بدون سیال را استخراج کردند و اثر فاصله دو ورق بر فرکانس طبیعی را مورد مطالعه قرار دادند.

نصراله براتی و همکارانش در سال (۲۰۲۱) [۱۶]، ارتعاشات آزاد قطاع دایروی توخالی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال را بررسی کردند. آنها معادلات حاکم بر حرکت ورق را با در نظر گرفتن انرژی‌های جنبشی و پتانسیل و استفاده از اصل همیلتون استخراج کردند. در نهایت با استفاده از روش نیمه تحلیلی تمامی حالت‌های شرایط مرزی را بررسی کرده و تأثیر پارامترهایی مانند زاویه قطاع، چگالی سیال و ارتفاع سیال را مورد مطالعه قرار دادند.

در سال (۲۰۱۷) آرشید و خورشیدوند [۱۷]، ارتعاشات خمشی ورق‌های دایروی متخلخل اشباع شده را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی مورد مطالعه قرار دادند. آنها معادلات حاکم و شرایط مرزی را برد اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها و با استفاده از اصل همیلتون به دست آوردند. همچنین با به کارگیری روش مربعات دیفرانسیلی فرکانس‌های طبیعی ورق را استخراج کردند. نتایج حاصل نشان داد که با افزایش تخلخل، فرکانس در توضع غیرخطی متقارن تخلخل افزایش و در توضع یکنواخت ثابت می‌ماند.

یوسف زاده و همکارانش در سال (۲۰۱۹) [۱۸]، فشار هیدرواستاتیک روی ارتعاشات آزاد ورق دایروی در تماس با سیال محدود بر روی بستر الاستیک را بررسی کردند. معادلات حاکم بر حرکت ورق را با در نظر گرفتن شرایط مرزی لبه‌گیردار، انرژی پتانسیل ورق روی بستر الاستیک به دست آورده و معادلات حاکم بر نوسان سیال را با بهره‌گیری از حل معادلات لاپلاس پتانسیل سرعت و ارضای شرایط مرزی به دست آوردند.

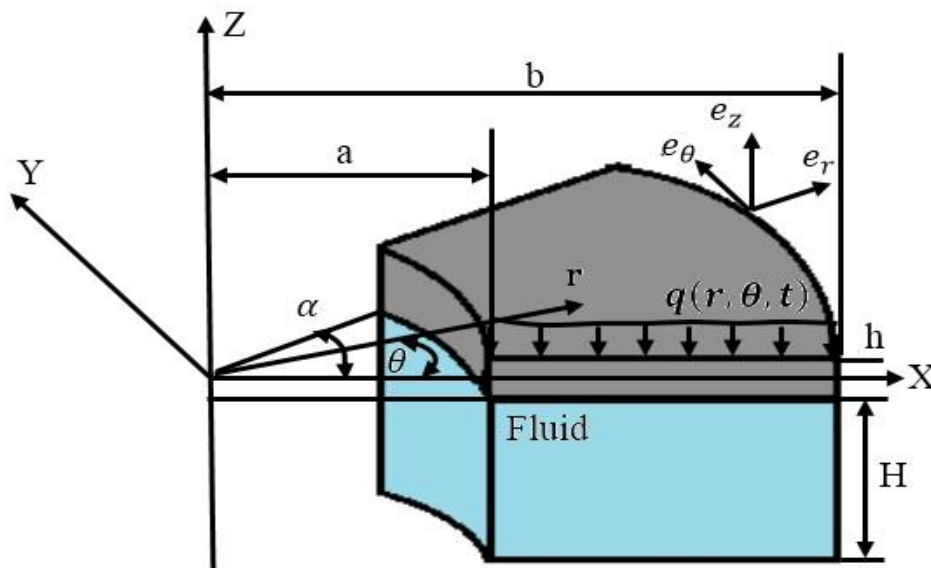
مرور کارهای گذشته توسط محققان که بخشی از آنها در بالا اشاره شد نشان می‌دهد که در زمینه ارتعاش اجباری قطاع دایروی در تماس با سیال محدود کاری انجام نشده است. به همین منظور در این پژوهش ارتعاش اجباری قطاع دایروی توخالی در تماس با سیال محدود مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. ابتدا معادلات حاکم بر حرکت ورق با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و استفاده از اصل همپلتون به دست آمده است. فشار دینامیکی ناشی از سیال بر ورق با استفاده از حل معادله لاپلاس و ارضای شرایط مرزی استخراج شد است. همچنین با استفاده از روش تفاضلات مربعی و نیومارک معادلات حاکم حل شده است. در نهایت به منظور حصول اطمینان از جواب‌ها، نتایج حاصل با پژوهش‌های پیشین و نرم‌افزار المان محدود آباکوس مورد مقایسه قرار گرفته است. نوآوری پژوهش حاضر نسبت به پژوهش‌ها گذشته در بررسی ارتعاش اجباری قطاع دایروی، وجود سیال در مجاورت قطاع، مدل‌سازی در نرم‌افزار و همچنین استفاده از روش تفاضلات مربعی و نیومارک برای تحلیل ورق می‌باشد.

نوآوری پژوهش حاضر نسبت به پژوهش‌های گذشته بررسی ارتعاشات اجباری قطاع در تماس با سیال می‌باشد که پاسخ‌های دینامیکی ورق برای پارامترهای مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین استفاده از یک روش عددی دقیق و سریع در تحلیل پاسخ‌ها و مدل‌سازی ورق در تماس با سیال در نرم‌افزار آباکوس می‌باشد.

## ۲- روابط حاکم

### ۲-۱- روابط حاکم بر قطاع دایروی

یک قطاع دایروی توخالی تحت نیروی هارمونیک به شعاع داخلی  $a$  و شعاع خارجی  $b$  و ضخامت  $h$  با زاویه مرکزی  $\alpha$  مطابق شکل (۱) فرض می‌شود. ورق در سطح  $z = -\frac{h}{2}$  در تماس با سیال قرار دارد. فرض می‌شود که سیال در امتداد ورق باشد و عمق ستون سیال  $H$  در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱- هندسه قطاع دایروی در تماس با سیال تحت نیروی هارمونیک و نحوه استقرار محورهای مختصات

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، جابه‌جایی‌ها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۹]:

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z) &= u_0 + z\phi_r(r, \theta) \\ u_\theta(r, \theta, z) &= v_0 + z\phi_\theta(r, \theta) \\ u_z(r, \theta, z) &= w(r, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

که  $u_r$ ،  $u_\theta$  و  $u_z$  به ترتیب جابه‌جایی یک نقطه دلخواه در امتداد محورهای  $r$ ،  $\theta$  و  $z$  و همچنین  $\phi_r$  و  $\phi_\theta$  بیانگر چرخش‌های محور قائم عرضی به ترتیب حول محورهای  $r$  و  $\theta$  است.  $u_0$  و  $v_0$  جابه‌جایی صفحه میانی ورق به ترتیب در راستاهای  $r$  و  $\theta$  است. روابط کرنش - تغییر مکان در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌گردد [۹]:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ e_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ e_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

با جایگذاری از روابط (۱) در روابط (۲) کرنش‌ها به صورت زیر تعیین خواهد شد:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_0}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{r} + \frac{z}{r} \left( \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \phi_r \right) \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} - \frac{\phi_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r} \right) \\ e_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ e_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left( \phi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

با استفاده از قانون هوک روابط تنش - کرنش به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1-\nu^2} (e_{rr} + \nu(e_{\theta\theta} + e_{zz})) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1-\nu^2} (e_{\theta\theta} + \nu(e_{rr} + e_{zz})) \\ \sigma_{r\theta} &= 2Ge_{r\theta} = \frac{E}{1+\nu} e_{r\theta} \\ \sigma_{rz} &= 2\kappa^2 Ge_{rz} = \frac{E}{1+\nu} e_{rz} \\ \sigma_{\theta z} &= 2\kappa^2 Ge_{\theta z} = \frac{E}{1+\nu} e_{\theta z} \end{aligned} \quad (4)$$

$\kappa^2$  ضریب تصحیح برشی می‌باشد که برای قطاع دایروی مقدار آن  $\pi^2/12$  در نظر گرفته می‌شود [۱۳]. برای تعیین معادلات حرکت حاکم از اصل همیلتون استفاده می‌شود. طبق این اصل [۱۹]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U + W_{n.c}) dt = 0 \quad (5)$$

که  $T$  انرژی جنبشی،  $U$  انرژی کرنشی و  $W_{n.c}$  کار نیروهای خارجی غیر پایستار می‌باشد. انرژی کرنشی ذخیره شده در ورق از رابطه زیر تعیین می‌شود [۱۹]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^a \int_a^b (\sigma_{rr} e_{rr} + \sigma_{\theta\theta} e_{\theta\theta} + 2\sigma_{r\theta} e_{r\theta} + 2\sigma_{rz} e_{rz} + 2\sigma_{\theta z} e_{\theta z}) r dr d\theta dz \quad (6)$$

با جایگذاری رابطه (۳) در رابطه (۶) انتگرال‌گیری در راستای ضخامت و اعمال عملگر  $\delta$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_0^{2\pi} \int_a^b \{ \delta \phi_r (-r M_{rr})_{,r} + M_{\theta\theta} - (M_{r\theta})_{,\theta} + r \phi_r \\ & + \delta U_0 (-r N_{rr})_{,r} - N_{\theta\theta} - (N_{r\theta})_{,\theta} \\ & + \delta V_0 (-N_{\theta\theta})_{,\theta} - (r N_{r\theta})_{,r} - N_{r\theta} + \delta W (-r Q_r)_{,r} - Q_{\theta,\theta} \\ & + \delta \phi_\theta (-r M_{r\theta})_{,r} - M_{r\theta} + r Q_\theta - M_{\theta\theta,\theta} \} dr d\theta \end{aligned} \quad (7)$$

که  $N$  نیروی منته،  $M$  گشتاور منته و  $Q$  نیروی برشی منته می‌باشد.

نیرو و ممان‌های منته به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} (N_{ij}, M_{ij}) = & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z) \sigma_{ij} dz \quad i, j = r, \theta \\ Q_i = & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{iz} dz \quad i = r, \theta \end{aligned} \quad (8)$$

انرژی جنبشی ورق از رابطه زیر تعیین می‌شود [۱۹]:

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho (\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2) dV \quad (9)$$

با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۹) و انتگرال‌گیری در راستای ضخامت انرژی جنبشی به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dT = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\alpha \int_a^b - (2\rho_0 \ddot{u}_0 \delta u_0 + 2\rho_2 \ddot{\phi}_r \delta \phi_r + 2\rho_1 \ddot{\phi}_r \delta u_0 + 2\rho_1 \ddot{u}_0 \delta \phi_r + 2\rho_0 \ddot{v}_0 \delta v_0 + 2\rho_2 \ddot{\phi}_\theta \delta \phi_\theta + 2\rho_1 \ddot{\phi}_\theta \delta v_0 + 2\rho_1 \ddot{v}_0 \delta \phi_\theta + 2\rho_0 \ddot{w} \delta w) r dr d\theta \quad (10)$$

که  $\rho_0, \rho_1, \rho_2$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(\rho_0, \rho_1, \rho_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho(r, \theta, z) dz \quad (11)$$

تغییرات کار نیروهای خارجی ناپایستار به صورت زیر خواهد شد:

$$\delta w_{n.c} = \int_0^{2\pi} \int_a^b (-q(r, \theta, t) - P(r, \theta, t)) \delta w r dr d\theta \quad (12)$$

که  $P(r, \theta, t)$  و  $q(r, \theta, t)$  به ترتیب فشار اعمالی ناشی از سیال به ورق و فشار هارمونیک اعمال شده به ورق می‌باشند. همچنین  $q(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q(t) = P_0 \sin(\omega t) \quad (13)$$

در رابطه فوق  $q(t)$  فشار وابسته به زمان  $P_0$  دامنه فشار و  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای می‌باشد. با جایگذاری از روابط (۷)، (۱۰) و (۱۲) در رابطه (۵) و استفاده از لم اساس حساب تغییرات، معادلات حاکم بر حرکت ورق مفروض به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (N_{rr} - N_{\theta\theta}) + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + N_{rr,r} &= \rho_0 \ddot{u}_0 + \rho_1 \ddot{\phi}_r \\ \frac{2}{r} N_{r\theta} + N_{r\theta,r} + \frac{1}{r} N_{\theta\theta,\theta} &= \rho_0 \ddot{v}_0 + \rho_1 \ddot{\phi}_\theta \\ \frac{1}{r} (M_{rr} - M_{\theta\theta}) + M_{rr,r} + \frac{1}{r} M_{r\theta,\theta} - Q_r &= \rho_2 \ddot{\phi}_r + \rho_1 \ddot{u}_0 \\ \frac{2}{r} M_{r\theta} + M_{r\theta,r} + \frac{1}{r} M_{\theta\theta,\theta} - Q_\theta &= \rho_2 \ddot{\phi}_\theta + \rho_1 \ddot{v}_0 \\ \frac{1}{r} Q_r + Q_{r,r} + \frac{1}{r} Q_{\theta,\theta} &= \rho_0 \ddot{w} - q - P \end{aligned} \quad (14)$$

### ۳- تعیین فشار دینامیکی سیال

در این قسمت برای رفتار مدل دینامیکی فشار سیال بر ورق فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود:

- جابجایی‌ها و سرعت سیال کوچک فرض می‌شوند (به همین دلیل می‌توان از اثر نیروهای درگ و لیفت سیال صرف‌نظر نمود). رفتار سیال به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود.
  - سیال ایده‌آل فرض می‌شود به نحوی که برای آن یک تابع پتانسیل می‌توان یافت.
  - شرایط اولیه سیال صفر در نظر گرفته می‌شوند.
  - فرمول‌بندی براساس تابع پتانسیل سرعت می‌باشد.
  - در نظر گرفتن دامنه محدود برای سیال.
  - صرف‌نظر کردن از اثر امواج.
  - سیال تراکم ناپذیر، غیر ویسکوز و غیر چرخشی در نظر گرفته شده است.
- با توجه به فرضیات گفته شده برای سیال در تماس با ورق، تابع پتانسیل سرعت  $\Phi$  باید معادله لاپلاس را در دامنه سیال ارضا کند. این معادله در مختصات استوانه‌ای به فرم زیر می‌باشد [۳ و ۱]:

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, z, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (15)$$

شرایط مرزی سیال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} (v_r)_{r=a,b} = 0 &\rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=b} = 0. \\ (v_\theta)_{\theta=0,\alpha} = 0 &\rightarrow \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)_{\theta=0} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)_{\theta=\alpha} = 0 \\ (v_z)_{z=-\frac{h}{2}-H} = 0 &\rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=-\frac{h}{2}-H} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

$$(v_z)_{fluid} = (v_z)_{plate} \text{ in contact surface} \rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=-\frac{h}{2}} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

همچنین با استفاده از معادله برنولی و صرف‌نظر از عبارات غیرچرخشی، فشار سیال در سطح تماس سیال-ورق به صورت زیر می‌باشد [۱]:

$$p = p|_{z=-\frac{h}{2}} = -\rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=-\frac{h}{2}} \quad (17)$$

که در آن چگالی سیال در حجم واحد است. با استفاده از روش جداسازی متغیرها و اعمال شرایط مرزی (۱۶) و جایگذاری تابع پتانسیل در رابطه (۱۷) فشار دینامیکی وارد از طرف سیال بر ورق به صورت زیر خواهد شد:

$$p(r, \theta, t) = -\rho_f \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth(\eta_{mn}H)}{\eta_{mn}} \dot{w}(r, \theta, t) \quad (18)$$

که  $\eta_{mn}$  از رابطه زیر تعیین خواهد شد:

$$J'_{\beta_m}(\eta a) Y'_{\beta_m}(\eta b) - J'_{\beta_m}(\eta b) Y'_{\beta_m}(\eta a) = 0 \quad (19)$$

همچنین  $J$  و  $Y$  توابع بسل قطبی نوع اول و دوم و  $\beta_m = \frac{n\pi}{\alpha}$  می‌باشد.  
با جایگذاری رابطه (۱۸) معادلات حرکت قطاع به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{u}_0 + \rho_1 \ddot{\phi}_r &= A_1 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{u_0}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_0}{\partial r \partial \theta} \right) \\ &+ A_2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_0}{\partial r \partial \theta} \right) \\ \rho_0 \ddot{v}_0 + \rho_1 \ddot{\phi}_\theta &= A_1 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r \partial \theta} \right) \\ &+ A_2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} - \frac{v_0}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) \\ \rho_2 \ddot{\phi}_r + \rho_1 \ddot{u}_0 &= A_3 \left( \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} - \frac{\phi_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial r \partial \theta} \right) \\ &+ A_4 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial r \partial \theta} \right) - k A_2 \left( \phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \rho_2 \ddot{\phi}_\theta + \rho_1 \ddot{v}_0 &= A_3 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial r \partial \theta} \right) \\ &+ A_4 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial r^2} - \frac{\phi_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} \right) \\ &- k A_2 \left( \phi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ \rho_0 \ddot{w} - q + \rho_f \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth(\eta_{mn} H)}{\eta_{mn}} \ddot{w}(r, \theta, t) \\ &= k A_2 \left( \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{\phi_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

که ضرایب  $A_1$  تا  $A_4$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz, \quad A_2 = \frac{1}{2(1+\nu)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz \\ A_3 &= \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E z^2 dz, \quad A_4 = \frac{1}{2(1+\nu)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E z^2 dz \end{aligned} \quad (21)$$

## ۴- روش‌های عددی

در این پژوهش برای بررسی ارتعاش قطاع دایروی توخالی در حالت ارتعاش اجباری از دو روش عددی استفاده شده است. برای حل عددی معادلات حاکم بر حرکت از نظر مکانی، روش تفاضلات مربعی که یک روش سریع و دقیق است، استفاده گردیده است. اولین گام در این مرحله انتخاب یک شبکه مناسب برای دامنه مورد نظر می‌باشد که شامل  $N_r$  نقطه در امتداد  $r$  و  $N_\theta$  نقطه در امتداد  $\theta$  است. در این بررسی از تعداد نقاط مساوی در هر جهت استفاده شده است ( $N_r = N_\theta = N$ ). سپس مشتق جزئی مرتبه  $n$  نسبت به  $r$  و مشتق جزئی مرتبه  $s$  نسبت به  $\theta$  تابع دلخواه  $g(r, \theta)$  در نقطه‌ای از شبکه یاد شده  $(r_i, \theta_j)$  به صورت رابطه (۲۲) بیان می‌شود. که در آن  $g(r, \theta)$  بیانگر  $g(r_i, \theta_j)$  است [۲۰].

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n g}{\partial r^n} \Big|_{(r,\theta)=(r_i,\theta_j)} &= \sum_{k=1}^{N_r} B_{ik}^n g_{kj} \\ \frac{\partial^s g}{\partial \theta^s} \Big|_{(r,\theta)=(r_i,\theta_j)} &= \sum_{k=1}^{N_\theta} C_{jk}^s g_{ik} \\ i &= 1, \dots, N_r \quad j = 1, \dots, N_\theta \\ \frac{\partial^{(n+s)} g}{\partial r^n \partial \theta^s} \Big|_{(r,\theta)=(r_i,\theta_j)} &= \sum_{k=1}^{N_r} B_{ik}^n \sum_{l=1}^{N_\theta} C_{jl}^s g_{kl} \end{aligned} \quad (22)$$

همچنین  $B_{ik}^n$  و  $C_{jk}^s$  به ترتیب ضرایب وزنی در امتداد  $r$  و  $\theta$  هستند که توابع آزمون نامیده می‌شوند. علاوه بر این تابع آزمون چند جمله‌ای برای ضرایب وزنی در امتداد  $r$  استفاده شده است که دارای صورت رابطه (۲۳) می‌باشد [۲۰].

$$\begin{aligned} B_{ik}^{(1)} &= \frac{\prod(r_i)}{(r_i - r_k) \prod(r_k)} \quad i, k = 1, \dots, N_r \text{ \& } k \neq i \\ \prod(r_i) &= \prod_{m=1, m \neq i}^{N_r} (r_i - r_m), \quad \prod(r_k) = \prod_{m=1, m \neq k}^{N_r} (r_k - r_m) \\ B_{ik}^{(n)} &= n \left( B_{ii}^{(n-1)} B_{ik}^{(1)} - \frac{B_{ik}^{(n-1)}}{r_i - r_k} \right); \text{ for } (i, k = 1, \dots, N_r), k \neq i, 2 \leq n \leq N_r - 1 \quad (23) \\ B_{ii}^{(n)} &= - \sum_{m=1, m \neq i}^{N_r} B_{im}^{(n)}; \text{ for } i = 1, 2, \dots, N_r, 1 \leq n \leq N_r - \end{aligned}$$

همچنین نقاط انتخابی با فاصله مساوی در نظر گرفته شده‌اند که در راستای  $r$  و  $\theta$  به صورت رابطه (۲۴) خواهد بود [۲۱].

$$r_i = \frac{i-1}{N_r-1}(b-a); i = 1, \dots, N_r \quad (24)$$

$$\theta_i = \frac{i-1}{N_\theta-1}2\pi; i = 1, \dots, N_\theta$$

در این پژوهش از شرایط مرزی ساده در لبه‌های شعاعی و شرایط مرزی گیردار و ساده در لبه‌های دایره‌ای استفاده می‌شود:

$$(1) \quad \text{شرایط مرزی گیردار}$$

برای یک مرز شعاعی گیردار باید روابط زیر برقرار باشد:

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w = 0, \quad \phi_r = 0 \quad (25)$$

شرط مرزی ساده:

برای یک مرز شعاعی ساده باید روابط زیر برقرار باشد:

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w = 0, \quad M_{rr} = 0, \quad \phi_\theta = 0 \quad (26)$$

برای یک مرز زاویه‌ای ساده باید روابط زیر برقرار باشد:

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w = 0, \quad M_{\theta\theta} = 0, \quad \phi_r = 0 \quad (27)$$

با اعمال روش تفاضلات مربعی در معادلات (۲۰) معادله ماتریسی (۲۸) به دست می‌آید.

$$M\ddot{\Delta} + k\Delta = F_1, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \{\Delta_b\} \\ \{\Delta_d\} \end{bmatrix} \quad (28)$$

که در آن  $\Delta$  بردار جابجایی (در راستای محور z) همه نقاط شامل بردارهای  $\Delta_b$  و  $\Delta_d$  است که به ترتیب بردار جابجایی مربوط به نقاط مرزی و بردار جابجایی مربوط به سایر نقاط هستند. علامت (') بیانگر مشتق دوم نسبت به زمان است. همچنین  $M$  و  $k$  به ترتیب ماتریس‌های جرم و سختی هستند. علاوه بر این بردار فشار خارجی است.

همچنین روش‌های عددی متفاوتی برای تقریب‌های زمانی معادلات دیفرانسیل در دسترس قرار دارد که به انتگرال‌گیری مستقیم شهرت دارد. رایج‌ترین این روش‌ها عبارتند از روش تفاضل مرکزی، روش ویلسون، روش رانگ-کوتا و روش نیومارک. از آنجایی که در معادلات حرکت مشتق زمانی وجود دارد در این پژوهش از روش نیومارک بهره گرفته شده است.

در این روش بردارهای سرعت و شتاب به صورت زیر تخمین زده می‌شود [۲۲].

$$\begin{aligned}\vec{\Delta}_{q+1} &= a_0(\vec{\Delta}_{q+1} - \vec{\Delta}_q) - a_2\vec{\Delta}_q - a_3\vec{\Delta}_q \\ \vec{\Delta}_{q+1} &= \vec{\Delta}_q + a_6\vec{\Delta}_q + a_7\vec{\Delta}_{q+1}\end{aligned}\quad (29)$$

که  $\vec{\Delta}_{q+1}$  بردار جابجایی،  $\vec{\Delta}_{q+1}$  بردار سرعت و  $\vec{\Delta}_{q+1}$  بردار شتاب می‌باشند. همچنین  $t_{q+1} = t_q + \Delta t$  که  $t_q$  زمان پیشین و  $\Delta t$  گام زمانی می‌باشد که زیر نویس  $q$  معرف گام زمانی  $q$  ام است. همچنین ضرایب  $a_i$  به صورت رابطه (۳۰) بیان می‌شوند [۲۲].

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\alpha\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1, \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{2} - 2 \right) \\ a_6 &= \Delta t(1 - \delta), \quad a_7 = \delta\Delta t\end{aligned}\quad (30)$$

که  $\delta$  و  $\alpha$  پارامترهایی برای کنترل صحت و پایداری روش می‌باشند که به ترتیب طبق [۲۲] برابر ۰.۵ و ۰.۲۵ هستند. جایگذاری روابط (۲۹) در رابطه (۲۸) منجر به رابطه (۳۱) می‌شود.

$$\begin{aligned}\vec{K}_{q+1}\vec{\Delta}_{q+1} &= \vec{F}_{q,q+1}, \quad \vec{K}_{q+1} = a_0M_{q+1} + K_{q+1} \\ \vec{F}_{q,q+1} &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)_{q+1} + M_{q+1} (a_0\vec{\Delta}_q + a_2\vec{\Delta}_q + a_3\vec{\Delta}_q)\end{aligned}\quad (31)$$

بر اساس رابطه (۳۱) بردار جابجایی مربوط به زمان حال با مشخص بودن بردارهای جابجایی، سرعت و شتاب مربوط به زمان قبل محاسبه می‌شود. همچنین در این پژوهش برای محاسبه فرکانس‌های آزاد، جابه‌جایی‌ها و توابع چرخش به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}u_0 &= u_{0n}(r) \cos(\mu_n\theta) e^{i\Omega_n t} \\ v_0 &= v_{0n}(r) \sin(\mu_n\theta) e^{i\Omega_n t} \\ w &= w_n(r) \cos(\mu_n\theta) e^{i\Omega_n t} \\ \phi_r &= \phi_{rn}(r) \cos(\mu_n\theta) e^{i\Omega_n t} \\ \phi_\theta &= \phi_{\theta n}(r) \sin(\mu_n\theta) e^{i\Omega_n t}\end{aligned}\quad (32)$$

که  $n$  تعداد مدهای محیطی  $\Omega_n$  فرکانس زاویه‌ای طبیعی مود  $n$  ام می‌باشد و  $\mu_n = n\pi/\alpha$  با جایگذاری معادله (۳۲) در معادله (۲۰) و استفاده از روش تفاضلات مربعی و اعمال شرایط مرزی معادله (۲۸) به معادله (۳۳) تبدیل می‌شود. که در آن بردار  $F_1$  حذف شده است.

همچنین فرکانس‌های طبیعی با حل معادله زیر به دست می‌آیند.

$$[K - \Omega_n^2 M] \vec{\Delta} = \{0\} \quad (33)$$

## ۵- نتایج و بحث

در این بخش پارامترهای مؤثر بر پاسخ دینامیکی قطاع دایروی تو خالی در تماس با سیال بررسی می‌گردد. در این قسمت یک قطاع دایروی تو خالی از جنس آلومینیوم با مشخصات زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\rho = 2707 \frac{kg}{m^3} \quad E = 70GPa \quad \nu = 0.3$$

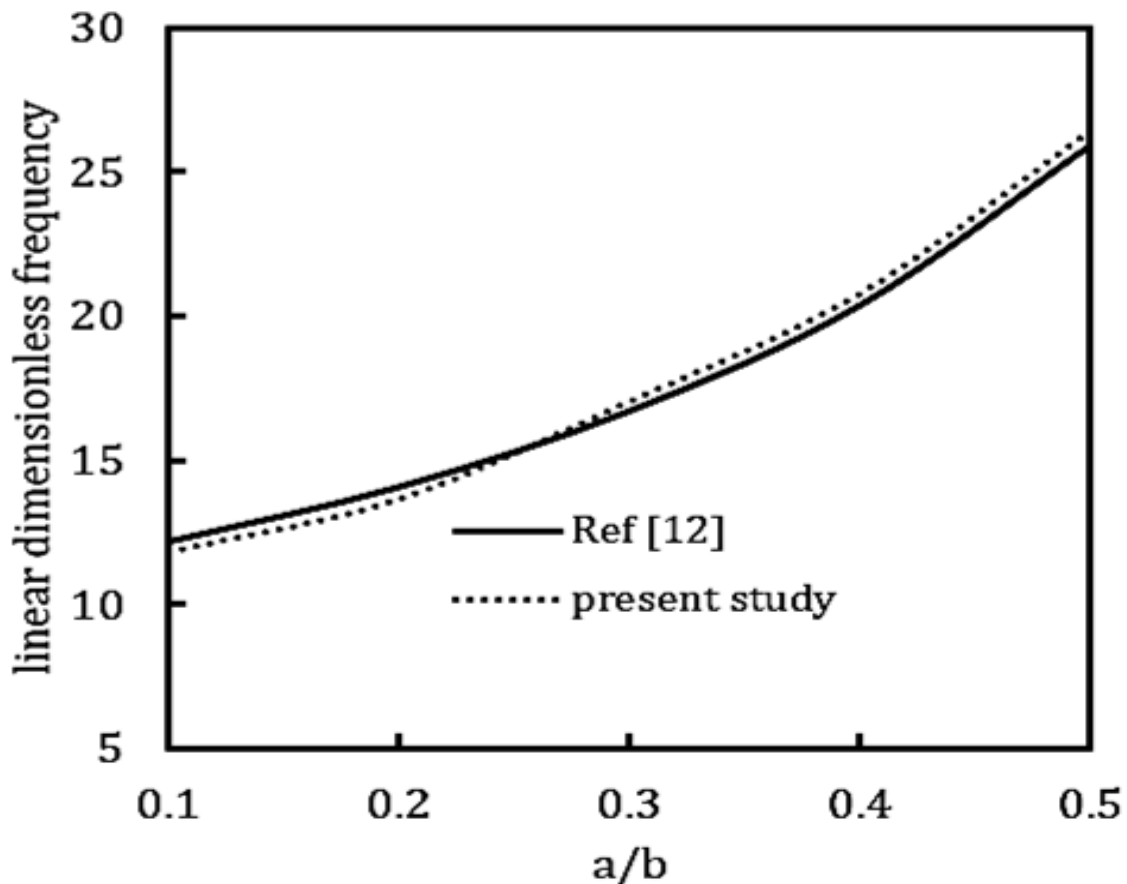
در این مطالعه مرز ساده را با S و مرز گیردار را با C نمایش می‌دهیم. برای بیان شرایط مرزی کلی یک قطاع دایروی از چهار حرف استفاده می‌شود که دو حرف اول بیان‌کننده مرزهای زاویه‌ای، حرف سوم بیان‌کننده شرایط مرز شعاع داخلی و حرف چهارم بیان‌کننده شرایط مرز شعاع خارجی می‌باشد. به عنوان نمونه CSSC بیان‌کننده مرزهای گیردار و ساده در مرزهای زاویه‌ای، مرز ساده در شعاع داخلی و مرز گیردار در شعاع خارجی می‌باشد.

در مطالعه حاضر نرم‌افزار متلب برای مطالعه ارتعاش اجباری قطاع دایروی مورد استفاده قرار گرفت. همچنین تعداد نقاط مناسب در روش تفاضلات مربعی با استفاده از آزمون همگرایی  $N=15$  نقطه در تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد و اجباری استفاده شده است.

جدول (۱) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد را برای یک قطاع دایروی تو خالی بدون در نظر گرفتن سیال با زاویه و شرایط مرزی مختلف،  $\beta = b^2 \Omega \sqrt{h\rho/D}$ ، با نتایج ارائه شده توسط مرجع [۲۳] مقایسه می‌کند که انطباق بسیار خوبی بین نتایج با داده‌های مرجع [۲۳] وجود دارد.

**جدول ۱ -** مقایسه فرکانس خطی بدون بعد قطاع دایروی با نسبت‌های  $a/b=0.5$  و  $h/c=0.1$  با مرجع [۲۳]

BC		$\alpha$			
		45	120	240	360
SSCC	Ref. [23]	194.9900	167.0994	164.2395	163.7256
	Present	194.5310	166.541	163.721	163.1011
SSCS	Ref. [23]	150.9370	117.4119	113.7661	113.1064
	Present	150.7239	117.1021	113.309	112.8556
SSSC	Ref. [23]	167.3939	126.8383	122.1422	121.2835
	Present	167.0120	126.3191	121.8567	120.8985
SSSS	Ref. [23]	130.3982	84.7699	79.1489	78.1096
	Present	130.0267	84.3895	78.7751	77.7123



شکل ۲- مقایسه تغییرات فرکانس بی بعد بر حسب تغییرات  $a/b$  با شرایط  $(b/h = 0.1, \alpha = 120^\circ, H/h = 1)$  با مرجع [۱۲].  $(1, \rho_f/\rho = 0.3)$

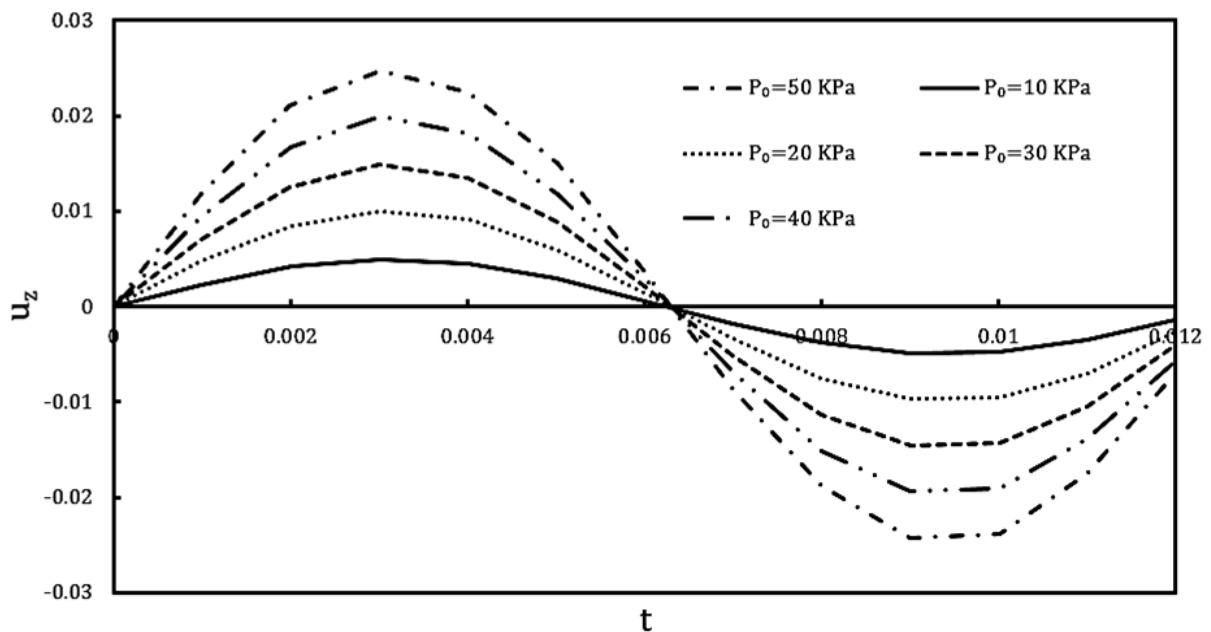
همچنین شکل (۲) مقایسه تغییرات فرکانس بی بعد خطی با توجه به مقادیر مختلف  $a/b$  در حالت تماس با سیال با مرجع [۱۲] را نشان می‌دهد. جدول (۲) مقدار جابه‌جایی عرضی قطاع در تماس با سیال تحت زوایای مختلف را نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است با افزایش مقدار زاویه، جابه‌جایی عرضی مرکز قطاع کاهش می‌یابد که این موضوع به علت افزایش مقدار ستون سیال در زیر قطاع می‌باشد. همچنین برای مطالعه پاسخ دینامیکی قطاع دایروی توخالی در تماس با سیال با تکیه‌گاه SSCC شرایط زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\rho = 2707 \text{ kg/m}^3, E = 70 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3, f = 79.57 \text{ Hz}, a/b = 0.1, \\ h/c = 0.01, P_0 = 0.1 \text{ MPa}, H/h = 1, \alpha = 60^\circ, \\ c = b - a$$

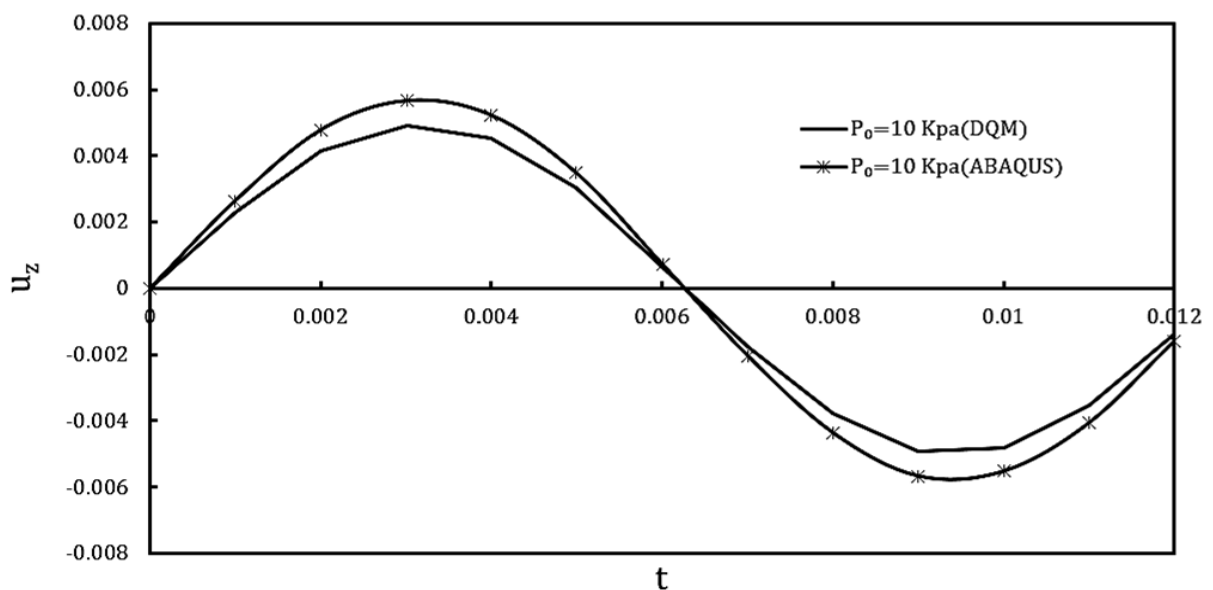
تغییرات پاسخ دینامیکی قطاع دایره‌ای در تماس با سیال در مقابل دامنه نیرو در شکل (۳) نشان داده شده است. نتایج در شکل (۳) نشان می‌دهد با افزایش مقدار  $p_0$  دامنه ارتعاش افزایش می‌یابد، افزایش دامنه ارتعاش منجر به افزایش دامنه نیرو شده و به دنبال آن جابه‌جایی عرضی ورق افزایش می‌یابد.

**جدول ۲-** ماکزیمم جابه‌جایی عرضی قطاع دایروی توخالی تحت نیروی هارمونیک در تماس با سیال با زوایای مختلف

BC		$\alpha, \times 10^{-3}m$			
		45	90	120	240
SSCC	Present	1.05945	0.14109	0.06214	0.00572
	FEM	1.08934	0.14709	0.06557	0.00595
SSSS	Present	1.04678	0.13967	0.06344	0.00862
	FEM	1.04765	0.14219	0.06765	0.00889



**شکل ۳-** پاسخ دینامیکی مرکز قطاع تحت بار هارمونیک برای مقادیر مختلف دامنه نیرو



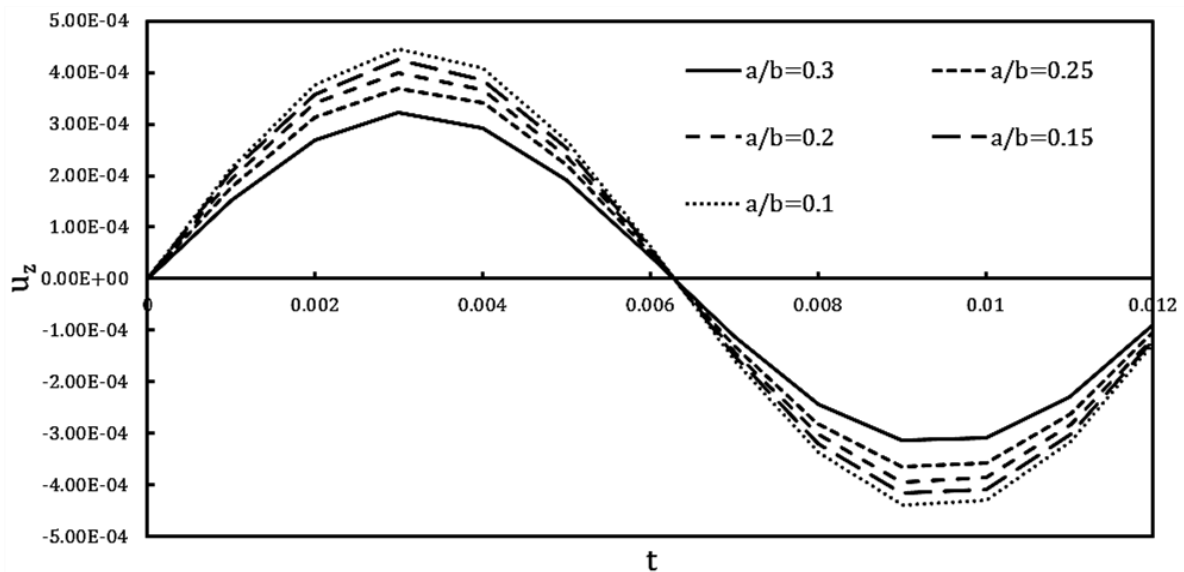
**شکل ۴-** مقایسه پاسخ دینامیکی مرکز قطاع تحت بار هارمونیک با نرم افزار آباکوس تحت  $P_0 = 10 \text{ KPa}$

در شکل (۴) پاسخ دینامیکی قطاع در تماس با سیال با نرم افزار المان محدود آباکوس در فشار  $P_0 = 10 \text{ KPa}$  مقایسه شده است. نتایج مقایسه، همگرایی خوبی را نشان می‌دهد.

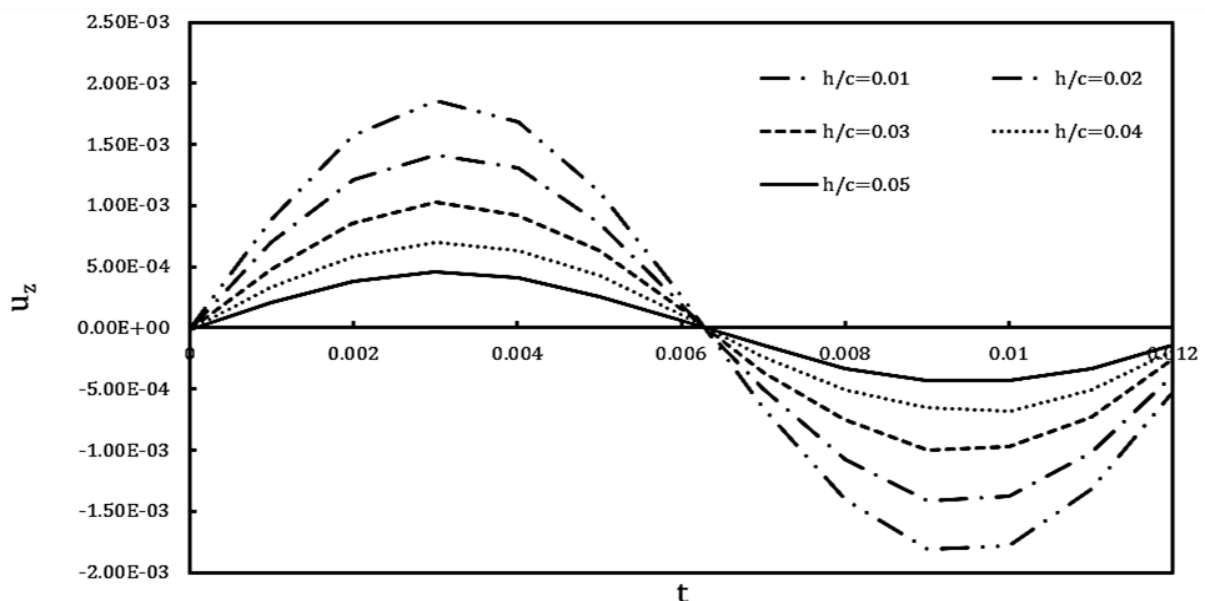
شکل (۵) اثر  $a/b$  را بر روی پاسخ دینامیکی قطاع دایره‌ای در تماس با سیال، نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش  $a/b$  جابه‌جایی عرضی ورق کاهش می‌یابد.

همان‌طور که در نمودار مشخص است، با افزایش  $a/b$  (کاهش عرض قطاع) جابه‌جایی عرضی قطاع دایروی در تماس با سیال، کاهش می‌یابد. با کاهش عرض ورق لختی آن کاهش یافته و همچنین ورق صلب‌تر شده و سختی آن افزایش یافته که منجر به کاهش جابه‌جایی خواهد شد.

شکل (۶) اثر  $h/c$  را بر روی پاسخ دینامیکی قطاع دایره‌ای در تماس با سیال را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش  $h/c$  ورق جابه‌جایی عرضی کاهش می‌یابد.



شکل ۵- پاسخ دینامیکی مرکز قطاع تحت بار هارمونیک برای مقادیر مختلف  $a/b$

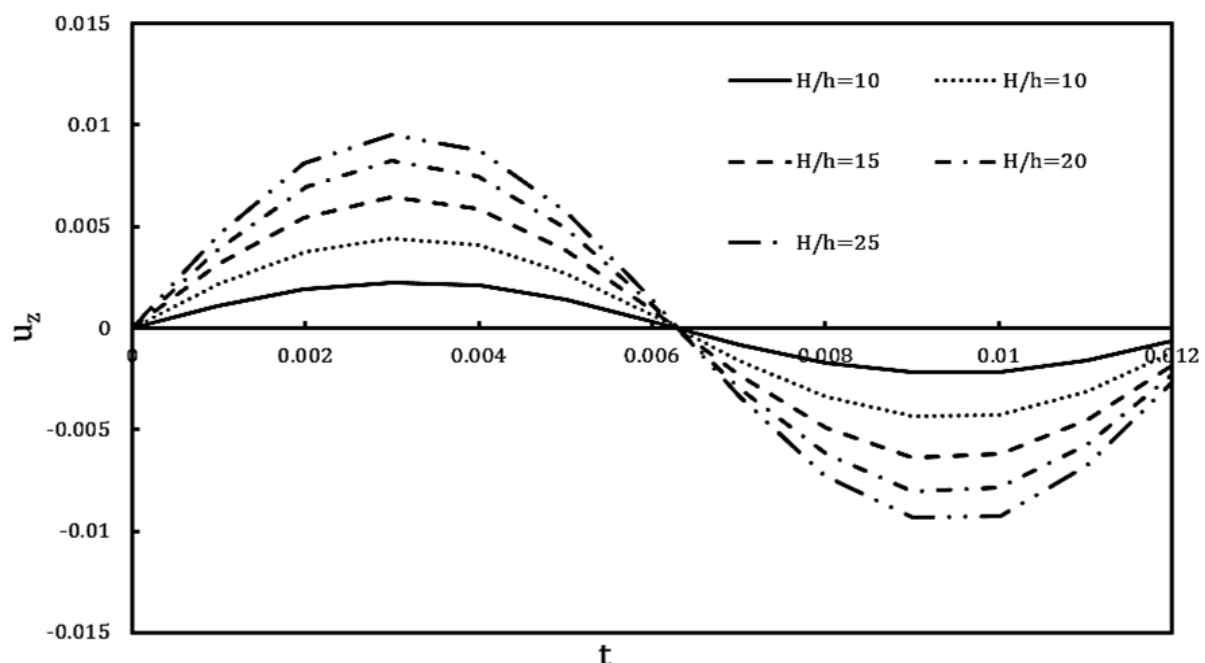


شکل ۶- پاسخ دینامیکی مرکز قطاع تحت بار هارمونیک برای مقادیر مختلف  $h/c$

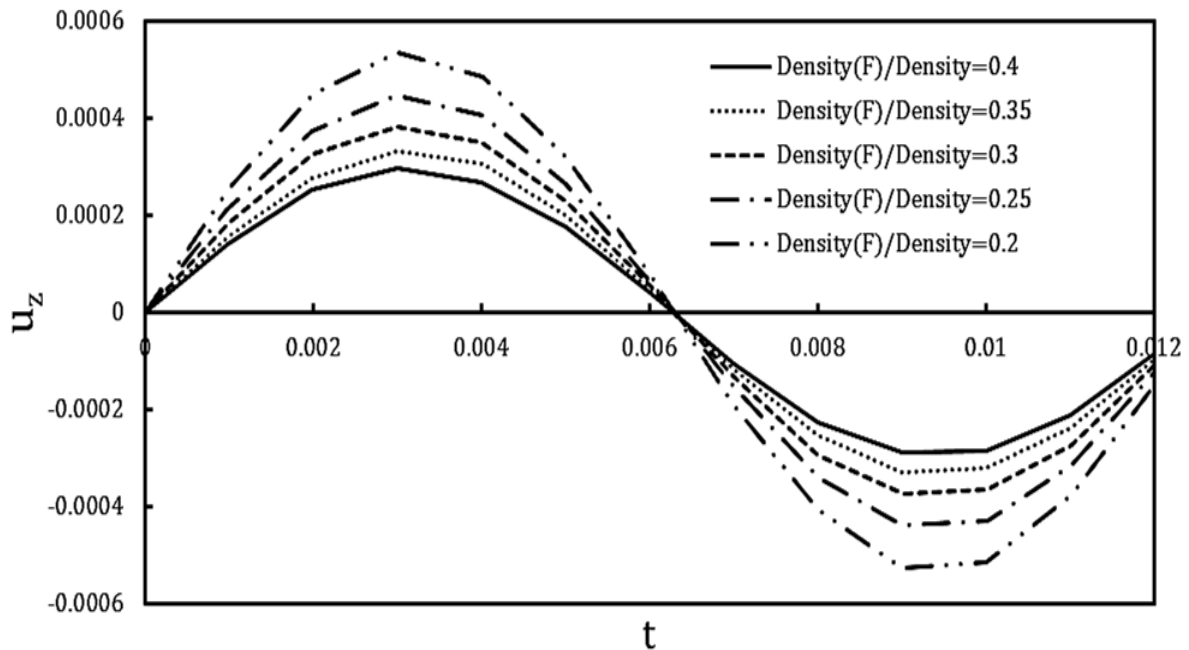
با توجه به شکل (۶)، همان‌طور که در نمودار مشخص است، با افزایش  $h/c$  (ضخیم‌تر شدن قطاع) جابه‌جایی عرضی قطاع دایروی در تماس با سیال کاهش می‌یابد. با افزایش ضخامت ورق جرم آن افزایش یافته و بر سختی آن نیز افزوده می‌شود؛ اما نسبت افزایش سختی از ازدیاد لختی بیشتر است و در نتیجه جابه‌جایی عرضی کاهش خواهد یافت.

اثرات تغییر ارتفاع ستون سیال بر روی پاسخ دینامیکی ورق در تماس با سیال در شکل (۷) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل (۷) مشخص است با افزایش ارتفاع سیال جابه‌جایی عرضی قطاع ابتدا افزایش می‌یابد، سپس به مقدار ثابتی میل می‌کند و افزایش ارتفاع تأثیر ناچیزی بر جابه‌جایی دارد که این نتیجه بیانگر این مطلب است که سیال دوردست تأثیر اندکی بر رفتار ارتعاشی قطاع دایروی دارد. با شروع حرکت ارتعاشی موج ایجاد شده از ارتعاش به سیال وارد شده و در آن منتشر می‌گردد و به صفحه صلب پایین برخورد کرده و به صورت موج مخالف در سیال ایجاد شده و باعث مخالفت با حرکت ارتعاشی قطاع و در نتیجه کاهش جابه‌جایی می‌شود. در ارتفاع کم سیال این پدیده قابل توجه است اما با افزایش ارتفاع زمان کافی برای رسیدن موج‌های مخالف با ارتعاش قطاع وجود ندارد و هر چه عمق سیال بیشتر شود تأثیر این پدیده کمتر خواهد شد. برای بررسی تأثیر چگالی سیال بر روی پاسخ دینامیکی قطاع در تماس با سیال، شکل (۸) رسم شده است. از این شکل مشخص است که با افزایش چگالی سیال (سنگین‌تر شدن سیال) جابه‌جایی عرضی قطاع کاهش می‌یابد. به علت اینکه سیال غیرلزج فرض شده است و فقط دارای اینرسی است مانند جرم اضافه شده به ورق رفتار می‌کند. با افزایش چگالی سیال، جرم اضافه شده به ورق افزایش یافته و در نتیجه باعث کاهش جابه‌جایی عرضی خواهد شد.

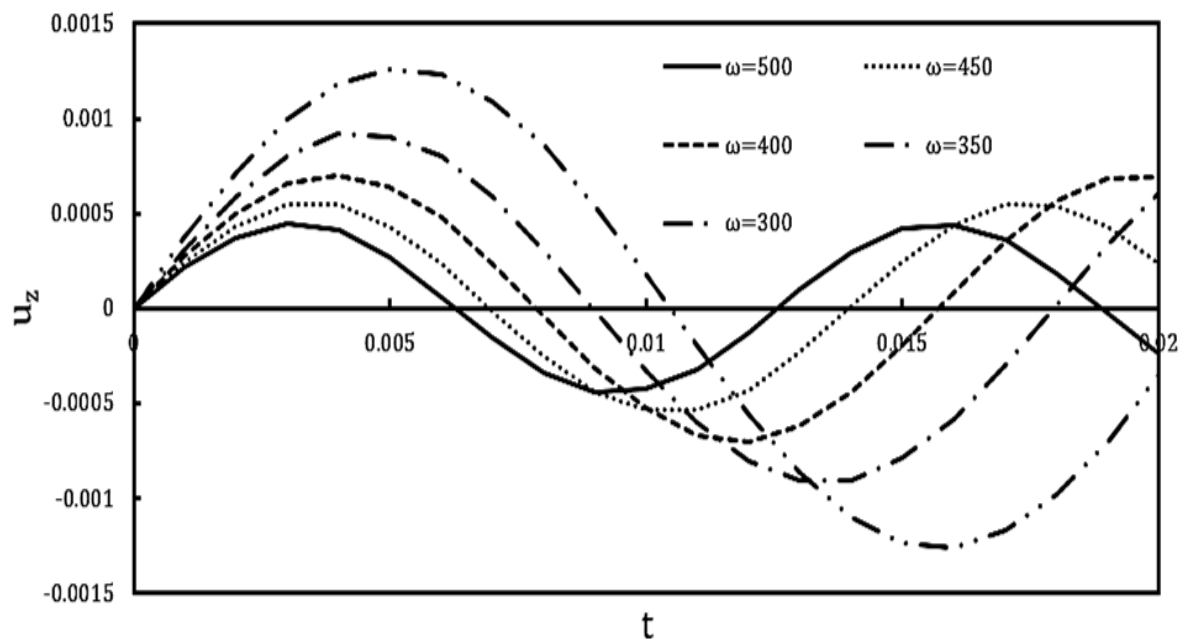
در شکل (۹) پاسخ دینامیکی ورق تحت فرکانس‌های مختلف تحریک ترسیم شده است. با توجه به شکل (۹) هنگامیکه فرکانس تحریک افزایش می‌یابد دامنه جابه‌جایی عرضی ورق کاهش می‌یابد و حداکثر جابه‌جایی عرضی با تاخیر در زمان اتفاق می‌افتد.



شکل ۷- پاسخ دینامیکی مرکز قطاع تحت بار هارمونیک برای مقادیر مختلف  $H/h$



شکل ۸- پاسخ دینامیکی مرکز قطاع تحت بار هارمونیک برای مقادیر مختلف  $\rho_f/\rho$



شکل ۹- پاسخ دینامیکی مرکز قطاع تحت بار هارمونیک برای مقادیر مختلف فرکانس تحریک

## ۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، پاسخ دینامیکی یک قطاع دایروی توخالی در تماس با سیال تحت نیروی هارمونیک مورد مطالعه قرار گرفت. معادلات حرکت با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و اصل همپلتون استخراج شد. همچنین تأثیر سیال بر ورق با حل معادله لاپلاس و اعمال شرایط مرزی تعیین گردید. روش تفاضلات مربعی و نیومارک برای حل معادلات حاکم مورد استفاده قرار گرفت. در ادامه به تحلیل تأثیر پارامترهای مختلف از

جمله زاویه قطاع، نسبت چگالی سیال به چگالی ورق، نسبت ارتفاع سیال به ضخامت ورق و فرکانس‌های تحریک مختلف بر روی پاسخ دینامیکی ورق پرداخته شد. برای حصول اطمینان از تحلیل، نتایج به‌دست آمده با پژوهش‌های پیشین و نرم افزار المان محدود آباکوس صحت سنجی شد.

با بررسی نتایج عددی به‌طور خلاصه نتایج زیر حاصل شد:

- با افزایش زاویه ورق جابه‌جایی عرضی به واسطه وجود ستون سیال در زیر ورق و افزایش مقدار آن کاهش پیدا می‌کند.
- با افزایش دامنه نیرو، جابه‌جایی عرضی افزایش می‌یابد.
- با افزایش  $a/b$  (کاهش عرض قطاع) جابه‌جایی عرضی کاهش می‌یابد.
- با افزایش  $h/c$  (ضخیم‌تر شدن قطاع) جابه‌جایی عرضی قطاع دایروی در تماس با سیال، کاهش می‌یابد.
- با افزایش  $H/h$ ، پاسخ دینامیکی و حداکثر جابه‌جایی عرضی به مقدار ناچیز افزایش می‌یابد. با افزایش ارتفاع سیال جابه‌جایی عرضی ابتدا افزایش می‌یابد و افزایش ارتفاع تاثیر ناچیزی بر فرکانس طبیعی دارد که این نتیجه بیانگر این مطلب است که سیال دوردست تأثیر اندکی بر رفتار ارتعاشی قطاع دایروی دارد.
- هنگامیکه ورق در تماس با سیال تراکم ناپذیر ارتعاش می‌کند جابه‌جایی عرضی مقدار کمتری را می‌گیرد. این به این دلیل است که وجود مایع باعث افزایش اینرسی سیستم می‌شود.
- هنگامیکه فرکانس تحریک افزایش می‌یابد جابه‌جایی عرضی ورق کاهش پیدا می‌کند و حداکثر جابه‌جایی با تاخیر در زمان اتفاق می‌افتد.
- با افزایش چگالی سیال جابه‌جایی عرضی کاهش پیدا می‌کند همچنین با افزایش مقدار چگالی مقدار کاهش جابه‌جایی عرضی بیشتر می‌شود که بیانگر این نکته است که وجود سیال به میزان قابل توجهی جابه‌جایی عرضی را کاهش می‌دهد.

## مراجع

- [1] S. Tariverdilo, M. Shahmardani, J. Mirzapour, and R. Shabani, "Asymmetric Free Vibration of Circular Plate in Contact with Incompressible Fluid," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 1-2, pp. 228-239, 2013, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.02.025>.
- [2] K. Khorshidi, F. Akbari, and H. Ghadirian, "Experimental and Analytical Modal Studies of Vibrating Rectangular Plates in Contact with a Bounded Fluid," *Ocean Engineering*, Vol. 140, pp. 146-154, 2017, doi: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.05.017>.
- [3] E. Askari, K.-H. Jeong, and M. Amabili, "Hydroelastic Vibration of Circular Plates Immersed in a Liquid-filled Container with Free Surface," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 12, pp. 3064-3085, 2013, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007>.
- [4] S. Yousefzadeh, A. Jafari, A. Mohammadzadeh, and M. Najafi, "Dynamic Response of Functionally Graded Annular/Circular Plate in Contact with Bounded Fluid under Harmonic Load," *Structural Engineering and Mechanics, An Int'l Journal*, Vol. 65, No. 5, pp. 523-533, 2018, doi: [10.12989/sem.2018.65.5.523](https://doi.org/10.12989/sem.2018.65.5.523).

- [5] S. H. Hashemi, M. Karimi, and H. R. D. Taher, "Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plates on Elastic Foundations and Vertically in Contact with Stationary Fluid by the Ritz Method," *Ocean Engineering*, Vol. 37, No. 2-3, pp. 174-185, 2010, doi: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2009.12.001>.
- [6] Y. Kozlovsky, "Vibration of Plates in Contact with Viscous Fluid: Extension of Lamb's Model," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 326, No. 1-2, pp. 332-339, 2009, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>.
- [7] Y. Q. Wang, S. W. Xue, X. B. Huang, and W. Du, "Vibrations of Axially Moving Vertical Rectangular Plates in Contact with Fluid," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 16, No. 2, p. 1450092, 2016, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>.
- [8] S. Yousefzadeh, A. Akbari, and M. Najafi, "Dynamic Response of FG Rectangular Plate in Contact with Stationary Fluid under Moving Load," *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 6, No. 2, pp. 213-224, 2019, doi: [10.22068/JSTC.2018.75912.1395](https://doi.org/10.22068/JSTC.2018.75912.1395).
- [9] S. Yousefzadeh, A. Jafari, and A. Mohammadzadeh, "Hydroelastic Vibration Analysis of Functionally Graded Circular Plate in Contact with Bounded Fluid by Ritz Method," *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 5, No. 4, pp. 529-538, 2019, [https://jstc.iust.ac.ir/article\\_32715\\_08995455b5de43f897fe778267a2a29a.pdf](https://jstc.iust.ac.ir/article_32715_08995455b5de43f897fe778267a2a29a.pdf).
- [10] K.-H. Jeong, and K.-J. Kim, "Hydroelastic Vibration of a Circular Plate Submerged in a Bounded Compressible Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 283, No. 1-2, pp. 153-172, 2005, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.04.029>.
- [11] K. Asemi, M. Salehi, and M. Sadighi, "Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Two Dimensional Functionally Graded Annular Sector Plates," *Structural Engineering and Mechanics: An International Journal*, Vol. 51, No. 6, pp. 1067-1089, 2014, doi: <https://doi.org/10.12989/sem.2014.51.6.1067>.
- [12] R. Shahveh, A. A. Jafari, A. Maghsoudpour, and A. R. Mohammadzadeh, "Investigating the Effect of Fluid Pressure on the Vibrational Behavior of Annular Sector Plate," *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, pp. 1-12, 2020, doi: <https://doi.org/10.1007/s40997-020-00360-x>.
- [13] E. Jomehzadeh, and A. Saidi, "Analytical Solution for Free Vibration of Transversely Isotropic Sector Plates using a Boundary Layer Function," *Thin-walled Structures*, Vol. 47, No. 1, pp. 82-88, 2009, doi: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2008.05.004>.
- [14] K. Khorshidi, and A. Bakhsheshy, "Free Natural Frequency Analysis of an FG Composite Rectangular Plate Coupled with Fluid using Rayleigh–Ritz Method," *Mechanics of Advanced Composite Structures*, Vol. 1, No. 2, pp. 131-143, 2014, <https://doi.org/10.22075/mac.2014.287>.
- [15] M. J. Jhung, Y. H. Choi, and K. H. Jeong, "Fluid Bounding Effect on Natural Frequencies of Fluid-coupled Circular Plates," *KSME International Journal*, Vol. 17, pp. 1297-1315, 2003, doi: <https://doi.org/10.1007/BF02982471>.

- [16] A. H. Nasrollah Barati, A. A. Jafari, S. Etemadi Haghighi, and A. Maghsoudpour, "The Effect of Fluid Column Pressure on the Natural Frequencies of an Annular Sector Plate Made of Functionally Graded Material," *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 8, No. 2, pp. 1522-1531, 2021, doi: 10.22068/JSTC.2021.531588.1731.
- [17] E. Arshid, and A. Khorshidvand, "Flexural Vibrations Analysis of Saturated Porous Circular Plates using Differential Quadrature Method", *Iranian Journal of Mechanical Engineering (in English)*, Vol. 19. No. 1(46), pp. 78-100, 2016, <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.25384775.1396.19.1.5.6>.
- [18] S. Yousefzadeh, M. Najafi, and H. Asgari, "Hydro-static Effect on Free Vibration of Circular Plate in Contact with Bounded Fluid on Elastic Foundation," *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of ISME*, Vol. 21, No. 1, pp. 132-150, 2019, doi:20.1001.1.25384775.1398.21.1.7.2.
- [19] F. Hejripour, and A. Saidi, "Nonlinear Free Vibration Analysis of Annular Sector Plates using Differential Quadrature Method," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 226, No. 2, pp. 485-497, 2012, doi: <https://doi.org/10.1177/0954406211414517>.
- [20] C. W. Bert, and M. Malik, "Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: A Review," *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, No. 1, pp. 1-28 (28 pages), Jan 1996, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3101882>.
- [21] C. Shu, "*Differential Quadrature and Its Application in Engineering*," Springer Science & Business Media, Springer-Verlag London Berlin Heidelberg in 2000, 1st Edition, ISBN: 978-1-4471-1132-0, <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0407-0>.

## فهرست نمادهای انگلیسی

$dA$	المان سطح
$a$	شعاع داخلی قطاع
$b$	شعاع خارجی قطاع
$\alpha$	زاویه قطاع
$\rho_f$	دانسیتة سیال
$J$ و $Y$	توابع بسل قطبی نوع اول و دوم
$B_{ik}$	ضریب وزنی در راستای طولی
$C_{jk}$	ضرایب وزنی در راستای محیطی
$E$	مدول یانگ
$\vec{F}_1$	بردار فشار روی ورق
$I$	تانسور همانی
$\rho_i$	اینرسی‌های جرمی

$K$	ماتریس سختی
$\delta k$	انرژی جنبشی مجازی
$M$	ماتریس جرم
$M_{ij}$	برآیندهای ممان‌های خمشی
$N$	تعداد نقاط
$N_{ij}$	برآیندهای نیروی غشایی
$N_r, N_\theta$	تعداد نقاط در راستای $r$ و $\theta$
$P_0$	ضریب ثابت فشار
$\phi_r$	چرخش حول محور $r$
$\phi_\theta$	چرخش حول محور $\theta$
$q(t)$	تابع زمانی فشار
$\bar{r}$	نقطه میانی قطاع توخالی
$t$	زمان
$u$	جاب‌جایی طولی
$u_0$	انرژی داخلی ویژه در حالت مبنا
$\delta u$	انرژی کرنشی مجازی
$v$	جاب‌جایی محیطی
$dv$	المان حجم
$\delta v$	انرژی پتانسیل مجازی
$W$	جاب‌جایی شعاعی
$W_{ext}$	کار نیروهای خارجی
$(r, \theta, z)$	مختصات

### نمادهای یونانی

$\delta$	پارامتر ثابت در روش نیومارک
$\alpha$	پارامتر ثابت در روش نیومارک
$\Delta$	نماد تغییرات
$\Delta, \dot{\Delta}, \ddot{\Delta}$	بردارهای جاب‌جایی سرعت و شتاب
$\theta$	مختصات زاویه‌ای
$\rho$	دانسیته
$\sigma$	تانسور تنش
$\nu$	نسبت پواسون
$\omega$	فرکانس بی بعد
$\Omega$	فرکانس تحریک
$\partial$	مشتق جزئی

## The Study of Effect of Fluid Column Pressure on the Dynamic Response of an Annular Sector Plate using the Differential Quadrature Method

\*Corresponding author: **Amir Hossein Nasrollah Barati**

Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Aligudarz Branch, Islamic Azad University, Aligudarz, Iran  
amir.barati@iau.ac.ir  
a.nasrolahbarati@gmail.com

### Abstract

In this study, the dynamic response of an annular sector plate in contact with incompressible fluid under harmonic load is investigated. The governing equations of the plate are derived based on First-order Shear Deformation Plate Theory (FSDT) with consideration of rotational inertial effects and transverse shear stresses and using the Hamilton's principle. In addition, the governing equation of the oscillating behavior of the fluid is obtained by solving the Laplace equation as a function of velocity potential and satisfying the boundary conditions of the fluid. The differential quadrature (DQ) and Newmark methods are used to determine the vibrational behavior of the plate. The results of this study are compared and validated with results of other works and Finite Element Method (FEM) software. Finally, the effects of the different geometrical parameters such as the inner radius to outer radius ratio, the height to Thickness ratio, thickness to outer radius ratio of plate, fluid density and fluid height to plate thickness on the dynamic response of the plate are investigated.

*Keywords:* Forced vibration, Annular sector plate, Dynamic response, Differential quadrature method