

تحلیل رفتار الکترومکانیکی میکرو ورق ساندویچی چند لایه پیزوالکتریک بر اساس فرمولاسیون واحد تعمیم یافته با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده

در زمینه تحلیل ورق و پوسته ها در چندین سال اخیر تئوری های مختلفی ارائه شده است که همواره برخی از آنها دارای خطا و نواقصی هستند. فرمولاسیون واحد کررا، فرمولاسیون جامعی است که علاوه بر رفع این نواقص، قابلیت مدل سازی تمام این تئوری ها و همچنین تئوری های مراتب بالاتر را به شکل واحد دارا می باشد. در این مقاله فرمولاسیون واحد کررا با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده برای تحلیل الکترومکانیکی میکرو ورق های ساندویچی چند لایه حاوی مواد پیزوالکتریک در ابعاد میکرو توسعه داده شده است. بر خلاف سایر تئوری های ورق، در این فرمولاسیون تغییرات خیز در امتداد ضخامت ورق در نظر گرفته می شود. در این تحقیق نتایج خیز، تنش های درون صفحه ای، تنش های برون صفحه ای و پتانسیل الکتریکی برای خمش استاتیکی میکرو ورق ساندویچی ضخیم حاوی لایه های پیزوالکتریک با شرایط مرزی تکیه گاه ساده به دست آمده است. نتایج نشان می دهد استفاده از این فرمولاسیون در تئوری های مرتبه بالاتر مانند تئوری کوپل تنش اصلاح شده می تواند اثر اندازه ماده را برای هر نوع میکرو ورق ضخیم چند لایه حاوی پیزوالکتریک و یا بدون آن و همچنین کشیدگی ورق در راستای ضخامت را با در نظر گرفتن پیوستگی در مرز بین لایه ها به درستی تحلیل کند.

نرگس ابراهیمی^۱
دانشجوی دکتری

محسن
بت شکنان دهکردی^۲
دانشیار

یعقوب طادی بنی^۳
استاد

واژه های راهنما: فرمولاسیون متحدالشکل کررا، تئوری کوپل تنش اصلاح شده، پیزوالکتریک، میکروورق ساندویچی، اثر اندازه

^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران، narges_ebrahimi88@yahoo.com

^۲ نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران، botshakanan@eng.sku.ac.ir

^۳ استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران، tadi@eng.sku.ac.ir

۱- مقدمه

سازه‌های ساندویچی با داشتن مزایای متعددی همچون نسبت استحکام به وزن و مقاومت خمشی بالا به طور گسترده و روز افزون در صنایع مختلف هوافضا، حمل و نقل جاده‌ای و دریایی و سازه‌های ساختمانی مورد استفاده قرار می‌گیرند. چرا که بسیاری از خصوصیات با اهمیت مورد نظر در سازه‌های هوافضایی، دریایی و عمرانی را دارا می‌باشند. تحلیل رفتار استاتیکی، دینامیکی، رفتار خطی و غیرخطی و مکانیزم شکست این سازه‌ها از تحقیقات انجام شده در این زمینه کاملاً روشن است [۶-۱]. اخیراً ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با پیزوالکتریک کاربرد گسترده‌ای در صنایع پیدا کرده‌اند. با توجه به خواص الکتریکی، مکانیکی، فیزیکی و شیمیایی جدید و به واسطه وجود کوپل انرژی مکانیکی و انرژی الکتریکی در میکرو ساختارهای پیزوالکتریک، امروزه این دسته از مواد از اهمیت بسیار زیادی در سیستم‌های میکرو و نانو الکترومکانیکی^۱ برخوردارند. پیزوالکتریک‌ها اغلب به عنوان سنسورها^۲ و عملگرها^۳ در سیستم‌های میکرو و نانو الکترومکانیکی به کار می‌روند. در این کاربردها، دستگاه‌ها به دلیل بارگذاری‌های الکتریکی و مکانیکی در معرض خمش، ارتعاش، کمانش و ... هستند. از طرفی از آنجا که کنترل و انجام آزمایش در مقیاس میکرو و نانو بسیار مشکل و گران قیمت می‌باشد و همچنین روش‌های شبیه‌سازی همانند دینامیک مولکولی زمان‌بر بوده و هزینه بسیار بالایی دارند، لذا برای بررسی تغییر شکل‌های وابسته به طول ماده و تحلیل رفتار سیستم‌ها در این ابعاد به تئوری‌های کامل تر سازگار با اثر اندازه ماده نیاز می‌باشد.

تئوری‌های پیزوالکتریک کلاسیک که شامل کوپل الکترومکانیکی بین تنش یا کرنش با قطبش الکتریکی می‌باشند، قادر به توصیف مواد در مقیاس میکرو و نانو نیستند. بنابراین لازم است تا از تئوری‌های مرتبه بالاتر که شامل کوپل بین تغییر شکل‌های مرتبه بالاتر از قبیل گرادیان کرنش یا تانسور انحنا با میدان قطبش است، برای بیان اثر اندازه پیزوالکتریک در این مقیاس‌ها استفاده شود.

تئوری‌های مرتبه بالاتر، اولین بار توسط افرادی چون کویترا^۴، میندلین^۵ و ترستن^۶ بیان شدند. این تئوری‌ها به‌طور کلی بر پایه دو تئوری کوپل تنش و گرادیان کرنش می‌باشند. در این تئوری‌ها انرژی کرنشی علاوه بر اینکه به کرنش وابسته است، به تغییرات کرنش نیز وابسته می‌باشد [۷-۸].

با صفر قرار دادن دو پارامتر اندازه در تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده^۷، به تئوری کوپل تنش اصلاح شده^۸، حاصل می‌شود که توسط یانگ^۹ و همکاران بیان شده است [۹]. در تئوری‌های کوپل تنش، گرادیان دوران مرتبه بالاتر به عنوان تغییر شکل سیستم در نظر گرفته می‌شوند. دانشمندان بسیاری توانستند این تئوری کوپل تنش را با بیان بردارهای ماکروچرخش و میکرو چرخش^{۱۰} گسترش دهند تا در نهایت تئوری کوپل

¹ Microelectromechanical, Nanoelectromechanical

² Sensors

³ Actuators

⁴ Koiter

⁵ Mindlin

⁶ Tiersten

⁷ Modified strain gradient theory

⁸ Modified couple-stress theory

⁹ Yang

¹⁰ Macrorotation, Microrotation

تنش حاضر شکل گیرد [۱۰]. در این تئوری، بر خلاف تئوری مکانیک محیط پیوسته کلاسیک با در نظر گرفتن همزمان انتقال و چرخش ذره‌های ماده و مدل کردن ماده به صورت محیطی گسسته، اثر اندازه در نظر گرفته می‌شود. این تئوری دارای یک پارامتر مقیاس طول ماده است و قادر است اثرات اندازه را در مقیاس‌های میکرو و نانو لحاظ کند. در سال (۲۰۱۵)، انصاری و همکاران [۱۱] به بررسی خمش، کمانش و ارتعاش میکرو ورق از ماده مدرج تابعی^۱ بر اساس تئوری گرادیان کرنش توسعه یافته با استفاده از تئوری ورق میندلین^۲ پرداختند. در این مدل سه اثر اندازه در نظر گرفته شد که با حذف دو پارامتر اثر اندازه می‌توان به تئوری کوپل تنش اصلاح شده رسید. نتایج این مقاله نتایج داد که با افزایش پارامتر اثر اندازه، سفتی سازه افزایش و در نتیجه خیز سازه کاهش و بار بحرانی کمانش و فرکانس طبیعی سازه افزایش می‌یابد. همچنین در مقاله‌ای دیگر انصاری و همکاران [۱۲] یک مدل ورق غیر کلاسیک بر پایه تئوری برشی مرتبه اول جهت تحلیل ارتعاش اجباری و بررسی عوامل مؤثر بر آن ارائه کردند. در این مدل نیز برای بررسی اثر اندازه از تئوری کوپل تنش اصلاح شده استفاده گردید.

برای تحلیل ورق‌های چند لایه و سازه‌های ساندویچی تئوری‌های مختلفی اعم از تئوری تک لایه معادل^۳، تئوری لایه گون^۴، مختلط، تئوری‌های مرتبه بالاتر و ... وجود دارد که همواره برخی از این تئوری‌های دارای عیوب و نواقصی هستند. در سال (۲۰۱۷)، تای و همکاران [۱۳] به تحلیل خمش، ارتعاش و کمانش یک ورق با خاصیت ایزوتروپ و همچنین ورق ساندویچی با هسته مدرج تابعی در ابعاد میکرو پرداختند. در این مدل‌سازی از تئوری کوپل تنش اصلاح شده استفاده گردید. در پژوهشی دیگر لیو و همکاران [۱۴] یک مدل ورق چند لایه را با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول جهت تحلیل خمش استاتیکی، ارتعاش آزاد و رفتار کمانشی ارائه کردند. در این کار با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده به بررسی تأثیر عوامل اثر اندازه، نسبت ابعاد ورق و ... بر فرکانس طبیعی، بار کمانش و خیز سازه پرداخته شد.

مواد پیزوالکتریک در سیستم‌های مختلف کنترلی به عنوان حسگر یا عملگر و اغلب به صورت سازه‌های چند لایه از مواد مختلف استفاده می‌شوند. توصیف دقیق میدان‌های الکتریکی و مکانیکی در لایه‌ها به منظور شبیه‌سازی اثر مستقیم و معکوس و جلوگیری از شکست سازه بسیار ضروری است. تئوری‌ها و مدل‌های زیادی برای تحلیل ساختارهای چند لایه ساندویچی دارای لایه‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک ارائه شده است. برخی محققان از تئوری‌های تک لایه معادل شامل تئوری کلاسیک [۱۵]، مرتبه اول برشی^۵ [۱۶-۱۷] و مرتبه بالای برشی^۶ [۱۸-۱۹] برای تحلیل صفحات حاوی پیزوالکتریک استفاده نموده‌اند. اما در این تئوری‌ها پیوستگی جابه‌جایی‌ها و تنش‌های برشی عرضی در مرز مشترک لایه‌ها برقرار نمی‌شود. همچنین اثرات کوپل خواص مکانیکی و الکتریکی پیزوالکتریک‌ها، خواص ارتوتروپیک لایه‌های کامپوزیتی و رفتار انعطاف پذیر هسته میانی در سازه‌های ساندویچی، سبب پیچیدگی مطالعه رفتار سازه‌های ساندویچی حاوی مواد پیزوالکتریک می‌شود.

¹ Functionally graded material

² Mindlin

³ Equivalent Single Layer (ESL)

⁴ Layerwise (LW)

⁵ First-order shear deformation

⁶ High - order shear deformation

یکی از مواردی که در رابطه با سازه‌های چند لایه مطرح می‌شود، ناهمسانگردی عرضی^۱ است. به این معنا که در سازه‌های چند لایه خواص مکانیکی متفاوتی در راستای ضخامت Z مشاهده می‌شود [۲۰]. این ناپیوستگی خواص مکانیکی عرضی منجر به تغییرات شدید میدان جابه‌جایی در سطح مشترک لایه‌ها می‌شود. این اثر به عنوان فرم زیگزاگ^۲ (ZZ) میدان جابه‌جایی در راستای ضخامت Z شناخته می‌شود [۲۱]. برای حل این مسئله، تئوری‌های لایه‌گون به کار گرفته شدند. نتایج تحقیقات نشان داد که دقت تئوری‌های لایه‌ای مناسب است؛ اما وابستگی تعداد متغیرها به تعداد لایه‌ها سبب افزایش حجم محاسبات می‌شود.

بسیاری از محققان ویژگی‌های مکانیکی و الکتریکی ساختارهای ساندویچی پیزوالکتریک را مطالعه کرده‌اند و تاکنون تحقیقات زیادی بر روی میکرو ورق‌های تک لایه پیزوالکتریک انجام شده است. میشل و ردی^۳ [۲۲] یک توصیف لایه‌ای برای پتانسیل الکتریکی معرفی کردند، در حالی که توصیف تک لایه معادل برای تغییر مکان‌ها حفظ شد. در پژوهشی ردی [۲۳] در حالت تک لایه معادل، تعداد متغیرهای جابه‌جایی را مستقل از تعداد لایه‌ها و در حالت لایه‌گون متغیرها را برای هر لایه مستقل در نظر گرفت. مدل‌های تک لایه اصلاح شده با در نظر گرفتن اثر زیگزاگ و ناهمسانگردی عرضی توسط توراتیر^۴ و اوساژوو^۵ مورد بحث قرار گرفت [۲۴]. همچنین بهشتی اول و همکاران [۲۵] با استفاده از تئوری عمومی محلی مرتبه بالا به تحلیل تیرهای ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و پیزوالکتریک دارای هسته فوم پرداخته‌اند. در سال (۲۰۱۸)، حاج محمد [۲۶] در پژوهشی به تحلیل کمانش و خمش میکرو ورق حلقوی از ماده مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک پرداخت. در این میکرو ورق تحت بار فشاری شعاعی و عرضی یکنواخت قرار گرفته است که با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر محلی برای بررسی پارامتر اثر اندازه مدل‌سازی شده است. در این مقاله عوامل مؤثر بر بار کمانش از جمله اثر مقیاس کوچک، شرایط مرزی مختلف، تعداد نقاط شبکه، ولتاژ خارجی لایه‌های پیزوالکتریک و... بررسی شده است. همچنین در سال (۲۰۲۲)، تحلیل رفتار کمانش مکانیکی میکرو ورق سه لایه با هسته لانه زنبوری و رویه‌های پیزوالکتریک توسط زانگ و همکاران [۲۷] ارائه گردید. در این مدل‌سازی از تئوری کوپل تنش اصلاح شده و تئوری تغییر شکل برشی سینوسی برای بیان مؤلفه‌های جابه‌جایی استفاده شد. بنابراین با توجه به بررسی‌های انجام شده، مطالعات نظری روی میکرو ورق‌های ضخیم پیزوالکتریک یا میکروورق‌های چند لایه ضخیم حاوی پیزوالکتریک به عنوان میکرو عملگر یا میکرو حسگر اندک بوده است. همچنین در بیشتر مطالعات انجام شده در زمینه تحلیل رفتار خمشی و ارتعاشی اثرات پیزوالکتریک میکرو ورق‌های ساندویچی و میکرو ورق‌های ضخیم، برای مدل‌سازی ورق از مدل‌های تک لایه استفاده کرده‌اند و با توجه به ساده‌سازی‌های این مدل‌ها برای تحلیل ورق‌های ضخیم، پاسخ‌های دقیق و مطلوبی را نمی‌توان از این مدل‌ها انتظار داشت. لذا برای تحلیل میکروسازه‌های چند لایه ضخیم حاوی پیزوالکتریک در ابعاد میکرو و نانو به یک مدل با دقت بالا نیاز می‌باشد. فرمولاسیون متحدالشکل کررا^۶ را می‌توان به عنوان یک مدل قدرتمند مرتبه بالا برای بررسی رفتار ساختاری دقیق صفحات چند لایه و پوسته‌ها در نظر گرفت. این فرمولاسیون به طور جامع توسط کررا مورد بحث قرار گرفته است [۲۸-۳۳].

¹ Transverse anisotropy

² ZigZag

³ Mitchell and Reddy

⁴ Touratier

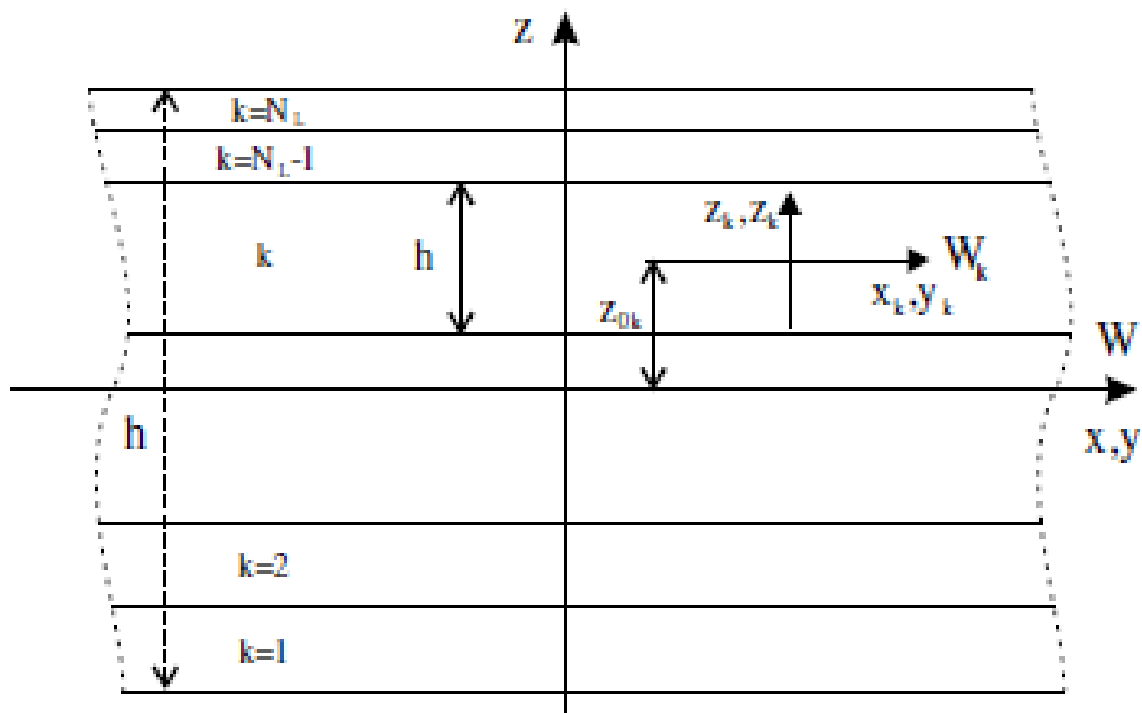
⁵ Ossadzow

⁶ Carrera's Unified Formulation (CUF)

با توجه به مطالب ارائه شده، برای مدل نمودن دقیق تر میکرو ورق چند لایه حاوی پیزوالکتریک باید هم وابستگی خواص مواد به اندازه در مقیاس میکرو توسط تئوری های مرتبه بالای محیط پیوسته و هم مدل سه بعدی توسط مدل ورق چند لایه را در نظر گرفت تا به پاسخ های دقیق و قابل قبول دست یافت. در مقاله حاضر با استفاده از یک مدل جدید براساس فرمولاسیون متحدالشکل کررا با در نظر گرفتن تغییرات خیز در راستای ضخامت و با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده معادلات الکترومکانیکی برای یک میکروورق ساندویچی حاوی لایه های پیزوالکتریک توسعه داده شده است. برای مدل سازی مؤلفه های مکانیکی و الکتریکی از مدل لایه گون ورق از مرتبه چهار استفاده شده است. نتایج حاصل برای ورق چند لایه حاوی پیزوالکتریک به ازای اثر اندازه های مختلف با حل دقیق و سایر تئوری های ورق مقایسه شده است. این نتایج نشان می دهد که توسعه فرمولاسیون متحدالشکل کررا از مرتبه چهارم در تئوری های مکانیک محیط پیوسته از جمله تئوری کوپل تنش اصلاح شده برای تحلیل میکرو ورق های چند لایه ضخیم بسیار دقیق می باشد و تطابق بسیار خوبی با روش سه بعدی دارد. نتایج این پژوهش می تواند به طراحی و ساخت ساختارهای کاربردی و دستگاه های هوشمند به ویژه در ابعاد کوچک کمک کند.

۲- هندسه مسئله

یک ورق چند لایه با خواص مختلف مکانیکی و الکتریکی در موقعیت دستگاه مختصات کارتیزین در شکل (۱)، نشان داده شده است. مختصات هندسی ورق به طول a ، عرض b و ارتفاع h می باشد و مبدأ دستگاه مختصات در صفحه میانی ورق واقع شده است. تعداد کل لایه ها N_L در نظر گرفته می شود و اندیس k برای مشخص کردن هر لایه استفاده می شود.



شکل ۱- مدل هندسی ورق چند لایه

۳- روابط ساختاری

برای تحلیل سازه‌ها در ابعاد میکرو و نانو به تئوری‌های مرتبه بالاتر نیاز می‌باشد تا بتوان اثر اندازه سازه را لحاظ کرد. یکی از این تئوری‌های مرتبه بالا، تئوری کوپل تنش اصلاح شده می‌باشد. با توسعه تئوری کوپل تنش اصلاح شده برای مواد پیزوالکتریک توسط یانگ [۳۴]، انرژی کرنشی هر لایه پیزوالکتریک به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta U = \int_{\Omega_k} \int_{A_k} (\delta \varepsilon_{ij}^{kT} \sigma_{ij}^k + \delta \chi_{ij}^{kT} m_{ij}^k - \delta E_i^{kT} D_i^k) d\Omega_k dz \quad (1)$$

در این رابطه ε_{ij} تانسور کرنش و χ_{ij} تانسور متقارن انحنا^۱ می‌باشند و طبق روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^k &= D u_i^k \\ \chi_{ij}^k &= D_c u_i^k \end{aligned} \quad (2)$$

میدان الکتریکی E_i نیز بر اساس معادلات ماکسول^۲ به صورت زیر خواهد بود:

$$E_i^k = D_e \Phi^k \quad (3)$$

در رابطه (۳)، Φ پتانسیل الکتریکی می‌باشد.

اپراتورهای دیفرانسیلی در روابط بالا در حوزه کاری فرمولاسیون واحد به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$D = \begin{bmatrix} \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial z \\ 0 & \partial z & \partial y \\ \partial x & 0 & \partial z \\ \partial y & \partial x & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\partial x \partial z & \partial x \partial y \\ \partial y \partial z & 0 & -\partial x \partial y \\ -\partial y \partial z & \partial x \partial z & 0 \\ \frac{1}{2}(\partial^2 z - \partial^2 y) & \frac{1}{2} \partial x \partial y & -\frac{1}{2} \partial x \partial z \\ -\frac{1}{2} \partial x \partial y & -\frac{1}{2}(\partial^2 z - \partial^2 x) & \frac{1}{2} \partial y \partial z \\ \frac{1}{2} \partial x \partial z & -\frac{1}{2} \partial y \partial z & -\frac{1}{2}(\partial^2 x - \partial^2 y) \end{bmatrix}$$

¹ Symmetric curvature tensor

² Maxwell

$$D_e = \begin{bmatrix} -\partial x & 0 & 0 \\ 0 & -\partial y & 0 \\ 0 & 0 & -\partial z \end{bmatrix}$$

همچنین معادلات ساختاری در حالت کوپل الکترومکانیکی تئوری کوپل تنش به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \tilde{c}_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k \\ m_{ij} &= 2Gl^2 \chi_{ij} \\ D_i &= e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \mu_{ik} E_k \end{aligned} \quad (4)$$

در این رابطه، σ_{ij} و m_{ij} تانسورهای تنش و کوپل تنش و D_i میدان جابه‌جایی‌های الکتریکی هستند. \tilde{c}_{ijkl} ، e_{ijk} و μ_{ik} به ترتیب ضرایب الاستیک دوران یافته، پیزوالکتریک و دی‌الکتریک می‌باشند. G مدول یانگ و l پارامتر اثر اندازه می‌باشد.

در یک سازه چند لایه برای هر لایه عمومی k می‌توان روابط بالا را به صورت رابطه (۵) بیان نمود.

$$\begin{aligned} \sigma^k &= \tilde{C}^k \varepsilon^k - e^{kT} E^k \\ D^k &= e^k E^k + \mu^k E^k \end{aligned} \quad (5)$$

رابطه (۵) به صورت گسترده به فرم‌های (۶) و (۷) قابل بیان خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & e_{25} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & e_{36} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k + \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{12} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^k \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{13} \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{22} & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{c}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55} & 0 \\ \tilde{c}_{13} & \tilde{c}_{23} & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{33} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}^k - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{36} \\ e_{14} & e_{24} & 0 \\ e_{15} & e_{25} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^k \quad (7)$$

۴- مدل سازی ریاضی و استخراج معادلات حاکم

در این مقاله برای بیان متغیرهای جابه جایی‌ها و پتانسیل الکتریکی از فرمولاسیون متحدالشکل کررا استفاده شده است. فرمولاسیون متحدالشکل کررا تکنیکی است که با استفاده از آن می‌توان به دسته بزرگی از مدل-های ورق و پوسته به شکل واحد دست یافت که در فرم ظاهر به مرتبه بسط در راستای ضخامت و همچنین نوع تئوری (تک لایه معادل یا لایه‌گون) وابسته نمی‌باشد و مدل بر اساس تابع ضخامت که استفاده شده است و نحوه سوار کردن سلول‌های بنیادین^۱، به یک تئوری تک لایه معادل یا تئوری لایه‌گون تبدیل می‌شود.

۴-۱- فرمول بندی واحد کررا (کوف)

در فرمولاسیون واحد با جداسازی متغیرهای مجهول می‌توان به یک سری توابع ضخامت که فقط تابعی از راستای Z هستند و یک دسته متغیر که فقط تابعی از راستای درون صفحه هستند (x, y) ، دسترسی پیدا کرد؛ به طوری که خیز سازه در راستای ضخامت متغیر می‌باشد [۳۵].

متغیر کلی $a(x, y, z)$ و تغییرات آن $\delta a(x, y, z)$ را می‌توان به وسیله بسط کلی زیر بیان کرد [۳۵]:

$$a(x, y, z) = F_r(z) a_r(x, y), \quad \delta a(x, y, z) = F_s(z) \delta a_s(x, y) \quad (8)$$

with $\tau, s = t, b, r$ and $r = 2, \dots, N$

حروف پر رنگ نشان دهنده آرایه و زیرنویس‌های تکراری نشان دهنده قرارداد جمع بندی هستند. حروف t و b به مفهوم بالا^۲ و پایین^۳ و همچنین r به مفهوم اندیس تابع توزیع به ازای مرتبه‌های بالاتر از یک می‌باشند. N نشان دهنده مرتبه تئوری می‌باشند که از یک تا چهار بسته به تئوری مورد نظر، در نظر گرفته می‌شود. هنگامی که متغیر مجهول برای کل چند لایه در نظر گرفته شده و بسط تیلور به عنوان تابع ضخامت اعمال شود، مدل تک لایه معادل و هنگامی که متغیر مجهول به طور مستقل برای هر لایه در نظر گرفته شود و ترکیب چند جمله‌ای‌های لژاندر به عنوان تابع ضخامت اعمال شود مدل لایه‌گون به دست می‌آید که در این پژوهش از مدل لایه‌گون جهت مدل سازی ورق ساندویچی استفاده می‌شود.

فرمولاسیون متحدالشکل کررا بسته به روش استخراج معادلات و نحوه سوار کردن سلول‌ها به دو دسته تقسیم می‌شود:

(۱) فرمولاسیون جابه‌جایی^۴ که معادلات حاکم از اصل جابه‌جایی مجازی^۵ (PVD) استخراج می‌شوند و مجهولات مسئله فقط میدان جابه‌جایی هستند و تنش‌ها پس از محاسبه میدان جابه‌جایی، محاسبه می‌شوند.

(۲) فرمولاسیون مختلط که در آن معادلات حاکم از تئوری تغییراتی مختلط ریزنر^۱ (RMVT) استخراج می‌شوند و علاوه بر میدان جابه‌جایی، تنش‌های عرضی نیز از ابتدا به عنوان مجهولات مسئله مدل می‌شوند که در این پژوهش از فرمولاسیون جابه‌جایی استفاده شده است.

¹ Fundamental nuclei

² Top

³ Bottom

⁴ Displacement formulation

⁵ Principle of virtual displacement

۴-۲- تئوری لایه‌گون (LW)

در این تئوری همانطور که قبلاً هم اشاره شد، هر لایه از یک سازه چند لایه به صورت یک ورق یا پوسته مستقل توصیف می‌شوند و میدان جابه‌جایی برای هر لایه جداگانه تعریف می‌شود. در این روش فرم زیگزاگ میدان جابه‌جایی برای سازه چند لایه با ناهمسان‌گردی عرضی به راحتی بدست می‌آید. در فرمولاسیون متحدالشکل کررا برای تئوری لایه‌گون میدان جابه‌جایی به شکل رابطه (۹) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u^k &= F_0 u_0^k + F_1 u_1^k + \dots + F_N u_N^k = F_\tau u_\tau^k & \tau = 0, \dots, N, & \quad k = 1, 2, \dots, N_l \\ v^k &= F_0 v_0^k + F_1 v_1^k + \dots + F_N v_N^k = F_\tau v_\tau^k & \tau = 0, \dots, N, & \quad k = 1, 2, \dots, N_l \\ w^k &= F_0 w_0^k + F_1 w_1^k + \dots + F_N w_N^k = F_\tau w_\tau^k & \tau = 0, \dots, N, & \quad k = 1, 2, \dots, N_l \end{aligned} \quad (9)$$

$F_\tau(\zeta_k)$ توابع ضخامت در لایه k ام می‌باشند که به صورت ترکیب خطی از چند جمله‌ای‌های لژاندر $P_j(\zeta_k)$ از مرتبه j ام تعریف می‌شوند. ζ_k مختصات بی‌بعد است که توسط مختصات محلی z_k تعریف می‌شود. پنج چندجمله‌ای اول لژاندر به صورت زیر می‌باشند [۳۵].

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \zeta_k, \quad P_2 = \frac{(3\zeta_k^2 - 1)}{2}, \quad P_3 = \frac{5\zeta_k^3}{2} - \frac{3\zeta_k}{2}, \quad P_4 = \frac{35\zeta_k^4}{8} - \frac{15\zeta_k^2}{4} + \frac{3}{8} \quad (10)$$

ترکیب چند جمله‌ای‌های لژاندر برای تشکیل توابع ضخامت به شکل زیر می‌باشند [۳۵]:

$$F_t = \frac{P_0 + P_1}{2}, \quad F_b = \frac{P_0 - P_1}{2}, \quad F_r = P_r - P_{r-2}, \quad r = 2, 3, \dots, N \quad (11)$$

توابع ضخامت فوق دارای ویژگی‌های زیر هستند که به راحتی شرط پیوستگی جابه‌جایی‌ها و تنش‌های عرضی را در وجه مشترک دو لایه برقرار می‌کند.

$$\zeta_k = \begin{cases} 1, & F_t = 1, F_b = 0, F_r = 0 \quad \text{at top} \\ -1, & F_t = 0, F_b = 1, F_r = 0 \quad \text{at bottom} \end{cases} \quad (12)$$

بنابراین شرط پیوستگی جابه‌جایی مکانیکی و پتانسیل الکتریکی در وجه مشترک به راحتی به صورت زیر اعمال می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t^k &= \mathbf{u}_b^{k+1}, \quad k = 1, \dots, N_l - 1 \\ \Phi_t^k &= \Phi_b^{k+1}, \quad k = 1, \dots, N_l - 1 \end{aligned} \quad (13)$$

¹ Reissner's Mixed Variational Theorem (RMTV)

مدل‌های به‌دست آمده بر اساس این تعریف با LDN نامگذاری می‌شوند که در آن نشان دهنده لایه‌گون بودن تئوری، D نشان دهنده فرمولاسیون از نوع جابه‌جایی و N نشان دهنده مرتبه تئوری می‌باشد.

۳-۴- استخراج معادلات حاکم

در این قسمت برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر مسئله و شرایط مرزی برای هر لایه k م از اصل جابه‌جایی مجازی به صورت رابطه (۱۴) استفاده می‌شود.

$$\delta H = \int_{\Omega_k} \int_{A_k} (-\delta U + \delta W) d\Omega_k dz = 0 \quad (14)$$

δU و δW^e به ترتیب انرژی کرنشی و کار نیروهای خارجی شامل نیروهای مکانیکی و نیروهای الکتریکی می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۵) در رابطه (۱) انرژی کرنشی به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta U = \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \delta \varepsilon^{kT} [C] \varepsilon^k - \delta \varepsilon^{kT} [e] E^k + 2G\ell^2 \delta \chi^{kT} \chi^k - \delta E^{kT} [e] \varepsilon^k - \delta E^{kT} [\mu] E^k \} d\Omega_k dz \quad (15)$$

Ω و A_k به ترتیب دامنه درون صفحه‌ای و دامنه ضخامت می‌باشند. در ادامه با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۱۵) خواهیم داشت:

$$\delta U = \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \left[(D \delta u^k)^T \left([C] (D u^k) - [e] (D_e \Phi^k) \right) + 2G\ell^2 (D_c \delta u^k)^T (D_c u^k) - (D_e \delta \Phi^k)^T \left([e] (D u^k) + [\mu] (D_e \Phi^k) \right) \right] d\Omega_k dz \quad (16)$$

با جایگذاری میدان جابجایی و پتانسیل واحد از رابطه (۸) در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\delta U = \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \left[(D F_s \delta u_s^k)^T \left([C] (D F_\tau u_\tau^k) - [e] (D_e F_\tau \Phi_\tau^k) \right) + 2G\ell^2 (D_c F_s \delta u_s^k)^T (D_c F_\tau u_\tau^k) - (D_e F_s \delta \Phi_s^k)^T \left([e] (D F_\tau u_\tau^k) + [\mu] (D_e F_\tau \Phi_\tau^k) \right) \right] d\Omega_k dz \quad (17)$$

همچنین کار نیروهای خارجی مطابق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta W = \int_{\Omega_k} p \delta u^k d\Omega_k \quad (18)$$

در نهایت با قرار دادن این روابط در رابطه اصل کار مجازی و انتگرال‌گیری جزء به جزء، معادلات حاکم بر یک سیستم الکترومکانیکی به شکل کلی زیر به‌دست خواهند آمد.

$$\begin{aligned} \delta u_s^k : K_{uu}^{k\tau s} u_\tau^k + K_{u\Phi}^{k\tau s} \Phi_\tau^k &= p_{ms}^k \\ \delta \Phi_s^k : K_{\Phi u}^{k\tau s} u_\tau^k + K_{\Phi\Phi}^{k\tau s} \Phi_\tau^k &= p_{es}^k \end{aligned} \quad (19)$$

u_τ^k بردار درجات آزادی جابجایی، p_{ms}^k بردار نیروهای خارجی مکانیکی و p_{es}^k بردار نیروهای خارجی الکتریکی می‌باشند. شرایط مرزی نیز به فرم زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \Pi_{uu}^{k\tau s} u_\tau^k + \Pi_{u\Phi}^{k\tau s} \Phi_\tau^k &= \Pi_{uu}^{k\tau s} \bar{u}_\tau^k + \Pi_{u\Phi}^{k\tau s} \bar{\Phi}_\tau^k \\ \Pi_{\Phi u}^{k\tau s} u_\tau^k + \Pi_{\Phi\Phi}^{k\tau s} \Phi_\tau^k &= \Pi_{\Phi u}^{k\tau s} \bar{u}_\tau^k + \Pi_{\Phi\Phi}^{k\tau s} \bar{\Phi}_\tau^k \end{aligned} \quad (20)$$

سلول‌های بنیادین رابطه (۱۹) به صورت زیر می‌باشند که در پیوست به صورت بسط داده شده آورده شده‌اند.

$$\begin{aligned} K_{uu}^{k\tau s} &= \int_{A_k} \left[-D^T ([C]D) - 2G\ell^2 (D_c^T D_c) \right] F_\tau F_s dz \\ K_{u\Phi}^{k\tau s} &= \int_{A_k} D^T ([e]D_e) F_\tau F_s dz \\ K_{\Phi u}^{k\tau s} &= \int_{A_k} D_e^T ([e]D) F_\tau F_s dz \\ K_{\Phi\Phi}^{k\tau s} &= \int_{A_k} D_e^T ([\mu]D_e) F_\tau F_s dz \end{aligned} \quad (21)$$

به منظور اینکه سلول‌های ذکر شده به شکل صریحی بیان شوند، پارامترهای زیر به منظور انتگرال‌گیری ترکیب توابع ضخامت در راستای z تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} (J^{k\tau s}, J^{k\tau_z s}, J^{k\tau s_z}, J^{k\tau_z s_z}) &= \int_{A_k} (F_\tau F_s, \frac{\partial F_\tau}{\partial z} F_s, F_\tau \frac{\partial F_s}{\partial z}, \frac{\partial F_\tau}{\partial z} \frac{\partial F_s}{\partial z}) dz \\ (J^{k\tau_{zz} s}, J^{k\tau_{zz} s_z}, J^{k\tau_z s_{zz}}, J^{k\tau_{zz} s_{zz}}) &= \int_{A_k} (\frac{\partial^2 F_\tau}{\partial z^2} F_s, \frac{\partial^2 F_\tau}{\partial z^2} \frac{\partial F_s}{\partial z}, \frac{\partial F_\tau}{\partial z} \frac{\partial^2 F_s}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 F_\tau}{\partial z^2} \frac{\partial^2 F_s}{\partial z^2}) dz \end{aligned} \quad (22)$$

۴-۴ - حل معادلات

در این پژوهش جهت حل معادلات از روش حل دقیق ناویر استفاده شده است که برای تحلیل ورق با شرایط مرزی ساده مناسب است. در این روش بسط فوریه برای بیان میدان جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی به صورت رابطه (۲۳) بیان می‌شوند. به‌طوریکه $k = 1, \dots, N_1, \tau = t, b, r, r = 2, \dots, N$ با بسط ماتریس رابطه (۲۱) و همچنین با استفاده از حل فرم بسته ناویر، فرم صریح سلول‌های سه در سه $K_{uu}^{k\tau s}$ به شکل رابطه (۲۴) بیان می‌شوند:

¹ Close form

$$\begin{aligned}
 u_{\tau}^k &= \sum_{m,n} \hat{U}_{\tau}^k \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
 v_{\tau}^k &= \sum_{m,n} \hat{V}_{\tau}^k \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
 w_{\tau}^k &= \sum_{m,n} \hat{W}_{\tau}^k \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
 \Phi_{\tau}^k &= \sum_{m,n} \hat{\Phi}_{\tau}^k \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)
 \end{aligned} \tag{۲۳}$$

$$\begin{aligned}
 K_{uu_{11}}^{k\tau s} &= \tilde{C}_{55}^k J^{k\tau_z s_z} + \tilde{C}_{11}^k J^{k\tau s} \alpha^2 + \tilde{C}_{66}^k J^{k\tau s} \beta^2 + \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(J^{k\tau_z s_z} (\alpha^2 + 4\beta^2) + J^{k\tau s} \alpha^2 \beta^2 + J^{k\tau s z z} \beta^2 \right. \\
 &\quad \left. + J^{k\tau z z s} \beta^2 + J^{k\tau s} \beta^4 + J^{k\tau z z s z} \right) \\
 K_{uu_{12}}^{k\tau s} &= J^{k\tau s} \alpha \beta (\tilde{C}_{12}^k + \tilde{C}_{66}^k) - \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(J^{k\tau z z s} \alpha \beta + J^{k\tau s z z} \alpha \beta + J^{k\tau s} (\alpha^3 \beta + \alpha \beta^3) + 3J^{k\tau_z s_z} \alpha \beta \right) \\
 K_{uu_{13}}^{k\tau s} &= \tilde{C}_{55}^k J^{k\tau_z s} \alpha - \tilde{C}_{13}^k J^{k\tau s z} \alpha - \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(J^{k\tau_z s} \alpha^3 + J^{k\tau z z s z} \alpha + J^{k\tau_z s} \alpha \beta^2 \right) \\
 K_{uu_{21}}^{k\tau s} &= J^{k\tau s} \alpha \beta (\tilde{C}_{12}^k + \tilde{C}_{66}^k) - \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(J^{k\tau z z s} \alpha \beta + J^{k\tau s z z} \alpha \beta + J^{k\tau s} (\alpha^3 \beta + \alpha \beta^3) + 3J^{k\tau_z s_z} \alpha \beta \right) \\
 K_{uu_{22}}^{k\tau s} &= \tilde{C}_{44}^k J^{k\tau_z s_z} + \tilde{C}_{22}^k J^{k\tau s} \beta^2 + \tilde{C}_{66}^k J^{k\tau s} \alpha^2 + \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(J^{k\tau_z s_z} (\beta^2 + 4\alpha^2) + J^{k\tau s} \alpha^2 \beta^2 \right. \\
 &\quad \left. + J^{k\tau z z s z} + J^{k\tau s} \alpha^4 + J^{k\tau s z z} \alpha^2 + J^{k\tau z z s} \alpha^2 \right) \\
 K_{uu_{23}}^{k\tau s} &= \tilde{C}_{44}^k J^{k\tau_z s} \beta - \tilde{C}_{23}^k J^{k\tau s z} \beta - \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(J^{k\tau_z s} \beta^3 + J^{k\tau z z s z} \beta + J^{k\tau_z s} \alpha^2 \beta \right) \\
 K_{uu_{31}}^{k\tau s} &= \tilde{C}_{55}^k J^{k\tau s z} \alpha - \tilde{C}_{13}^k J^{k\tau_z s} \alpha - \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(J^{k\tau s z} \alpha^3 + J^{k\tau_z s z z} \alpha + J^{k\tau s z} \alpha \beta^2 \right) \\
 K_{uu_{32}}^{k\tau s} &= \tilde{C}_{44}^k J^{k\tau s z} \beta - \tilde{C}_{23}^k J^{k\tau_z s} \beta - \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(J^{k\tau s z} \beta^3 + J^{k\tau_z s z z} \beta + J^{k\tau s z} \alpha^2 \beta \right) \\
 K_{uu_{33}}^{k\tau s} &= \tilde{C}_{55}^k J^{k\tau s} \alpha^2 + \tilde{C}_{44}^k J^{k\tau s} \beta^2 + \tilde{C}_{33}^k J^{k\tau_z s_z} + \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(J^{k\tau_z s_z} (\beta^2 + \alpha^2) + J^{k\tau s} (\beta^4 + \alpha^4) \right. \\
 &\quad \left. + 4J^{k\tau s} \alpha^2 \beta^2 \right)
 \end{aligned} \tag{۲۴}$$

همچنین سلول‌های بنیادین سه در یک $K_{u\Phi}^{k\tau s}$ به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 K_{u\Phi_{11}}^{k\tau s} &= \alpha \left(-J^{k\tau s z} e_{31}^k + J^{k\tau_z s} e_{15}^k \right) \\
 K_{u\Phi_{21}}^{k\tau s} &= \beta \left(-J^{k\tau s z} e_{32}^k + J^{k\tau_z s} e_{24}^k \right) \\
 K_{u\Phi_{31}}^{k\tau s} &= \alpha^2 e_{15}^k J^{k\tau s} + \beta^2 e_{24}^k J^{k\tau s} + e_{33}^k J^{k\tau_z s_z}
 \end{aligned} \tag{۲۵}$$

سلول‌های بنیادین ماتریس یک در سه $K_{\Phi u}^{k\tau s}$ نیز به صورت رابطه (۲۶) بیان می‌شوند.

$$K_{\Phi u_{11}}^{k\tau s} = \alpha \left(J^{k\tau_z s} e_{31}^k - J^{k\tau s_z} e_{15}^k \right)$$

$$K_{\Phi u_{12}}^{k\tau s} = \beta \left(J^{k\tau_z s} e_{32}^k - J^{k\tau s_z} e_{24}^k \right) \quad (26)$$

$$K_{\Phi u_{13}}^{k\tau s} = -\alpha^2 e_{15}^k J^{k\tau s} - \beta^2 e_{24}^k J^{k\tau s} - e_{33}^k J^{k\tau_z s_z}$$

و در نهایت سلول بنیادین $K_{\Phi\Phi}^{k\tau s}$ به صورت رابطه (27) می باشد:

$$K_{\Phi\Phi_{11}}^{k\tau s} = \alpha^2 \mu_{11} J^{k\tau s} + \beta^2 \mu_{22} J^{k\tau s} + \mu_{33} J^{k\tau_z s_z} \quad (27)$$

در این روابط $\alpha = m\pi/a$ و $\beta = n\pi/b$ ، m و n شماره موج^۱ a و b به ترتیب طول و عرض ورق می باشد. در ادامه برنامه محاسباتی در نرم افزار MATLAB نوشته شده و نتایج با استفاده از این برنامه به دست آمده اند.

۴-۵- خمش استاتیکی

در این پژوهش مسئله استاتیکی و تحلیل خمش برای ورق چند لایه حاوی پیزوالکتریک تحت بارگذاری مکانیکی اعمال شده روی سطح بالایی ورق بررسی خواهد شد. بار مکانیکی با سری فوریه به صورت زیر تعریف می شوند:

$$p_{m\tau}^k = \sum_{m,n} \hat{p}_{m\tau}^k \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (28)$$

که $\hat{p}_{m\tau}^k$ مقدار بیشینه بار مکانیکی اعمالی بر سازه می باشد.

۴-۶- سوار کردن لایه ها در تئوری لایه گون

در این تئوری برای برقراری شرط پیوستگی جابه جایی و پتانسیل الکتریکی رابطه (۱۳) در مرز لایه ها، سلول های بنیادین هر لایه $K_{ij}^{k\tau s}$ به طوریکه $(ij) = (uu), (u\Phi), (\Phi u), (\Phi\Phi)$ ، مطابق شکل (۲) مقادیر معادل در بالا و پایین لایه ها با یکدیگر جمع می شوند.

۵- نتایج عددی و صحت سنجی

در این بخش جهت مطالعه رفتار خمش الاستیک میکرو صفحات ساندویچی حاوی پیزوالکتریک، نتایج عددی حاصل از رابطه سازی ارائه شده در بخش های قبل با دو مسئله نمونه بررسی می شود. مسئله اول شامل

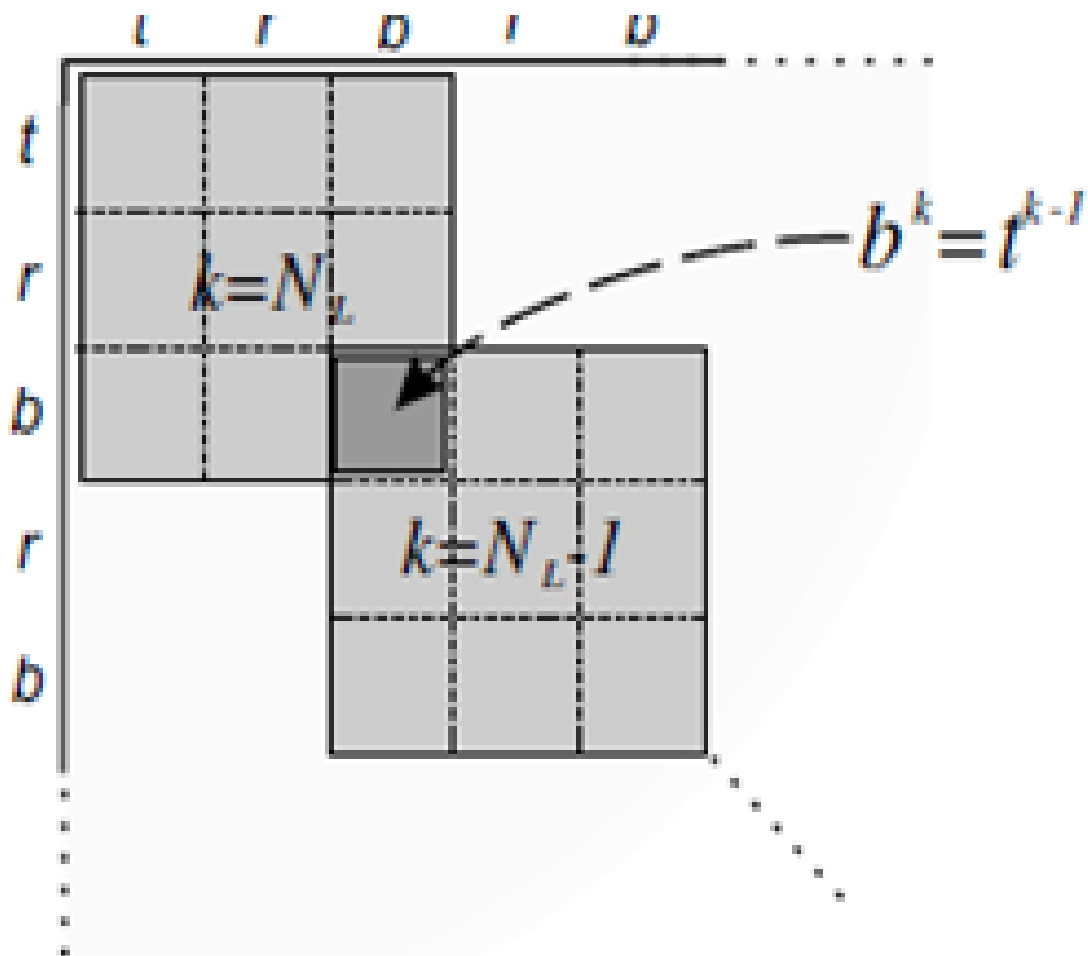
¹ Wave number

میکرو ورق سه لایه متقارن ($Piezo/0/Piezo$) با هسته مرکزی نرم و دولایه پیزوالکتریک و مسئله دوم شامل میکرو ورق چهار لایه با هسته سفت و دو لایه پیزوالکتریک به صورت نامتقارن ($Piezo/0/90/Piezo$) می‌باشد. در تمامی حالت‌ها میکرو ورق ساندویچی با شرایط تکیه‌گاهی ساده تحت بارگذاری سینوسی می‌باشد.

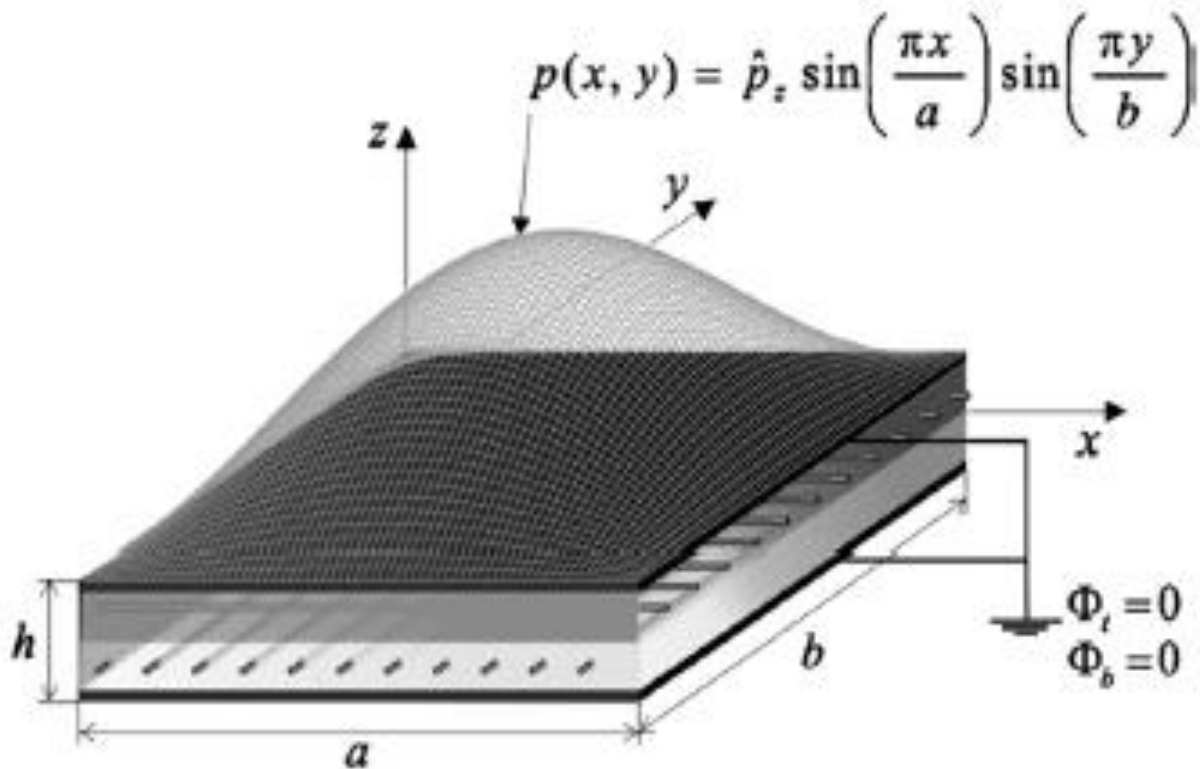
به‌طور کلی برای همه نتایج میکرو ورق، ضخامت کل میکرو ورق $h = 88 \mu m$ و $a = b = 10h$ در نظر گرفته شده است. ضخامت لایه مرکزی هسته نرم در میکرو ورق سه لایه $0.8h$ و ضخامت هر یک از لایه‌های پیزوالکتریک $0.1h$ و برای میکرو ورق چهار لایه ضخامت هر لایه پیزوالکتریک $0.1h$ و هر لایه مرکزی $0.4h$ در نظر گرفته شده است. یک بار مکانیکی سینوسی $\hat{p}_z = 1Pa$ مطابق شکل (۳) به لایه بالایی ورق اعمال شده است و لایه‌های بالایی و پایینی سازه به زمین متصل است.

خواص مکانیکی و الکتریکی مواد به کار رفته در جدول (۲) آورده شده است. تأثیر پارامتر اثر اندازه برای مقادیر مختلف ℓ/h به عنوان اثر اندازه طول بی‌بعد بر نتایج بررسی می‌شود. به ازای $\ell = 0$ تئوری کوپل تنش اصلاح شده به تئوری کلاسیک کاهش می‌یابد.

پیش از آن، جهت صحت‌سنجی نتایج و تئوری مورد نظر از مثال‌هایی استفاده شده است که در ادامه آورده شده‌اند.



شکل ۲- نمایش نحوه سوار کردن لایه‌ها در تئوری لایه‌گون



شکل ۳- نمایش هندسه، شرایط مرزی و بارگذاری مسئله

۵-۱- صحت سنجی

در ابتدا جهت بررسی صحت فرمولاسیون متحدالشکل کررا در تئوری مرتبه بالای کوپل تنش اصلاح شده، مقادیر خیز وسط یک میکرو ورق تک لایه همگن با خواص مکانیکی $E = 1.44Gpa$ و $\nu = 0.38$ با شرایط تکیه گاهی ساده تحت بارگذاری سینوسی برای مقادیر اثر اندازه مختلف بررسی شده است. همانطور که مشاهده می شود، نتایج جدول (۱) از تطابق خوبی با مرجع [۳۶] برخوردار هستند و می توان نتیجه گرفت که در ابعاد میکرو نتایج حاصل از فرمولاسیون متحدالشکل کررا دقیق خواهد بود و درصد خطای کمی دارد.

جدول ۱- خیز بی بعد شده مرکز ورق تحت بارگذاری مکانیکی سینوسی

$\frac{l}{h}$	$\bar{w} = \frac{10wEh^3}{q_0a^4}$		درصد خطا (%)
	تحقیق حاضر	مرجع [۳۶]	
۰	۰/۲۷۷۸	۰/۲۸۰۴	۰/۹۲
۰/۲	۰/۲۴۱۰	۰/۲۴۰۱	۰/۳۷
۰/۴	۰/۱۷۰۵	۰/۱۶۷۷	۱/۶۶
۰/۶	۰/۱۱۴۰	۰/۱۱۱۶	۲/۱۵
۰/۸	۰/۰۷۸۱	۰/۰۷۶۰	۲/۷۶

جدول ۲- خواص مکانیکی و الکتریکی مواد به کار رفته

خواص مکانیکی	PZT-4	Gr/EP	Nomex	خواص الکتریکی	PZT-4	Gr/EP	Nomex
$E1(MPa)$	81300	1323800	0.01	$e_{15}(C / m^2)$	12.72	-	-
$E2(MPa)$	81300	1075600	0.01	$e_{24}(C / m^2)$	12.72	-	-
$E3(MPa)$	64500	1075600	75.85	$e_{31}(C / m^2)$	-5.20	-	-
$\nu_{12}(-)$	0.329	0.24	0.01	$e_{32}(C / m^2)$	-5.20	-	-
$\nu_{13}(-)$	0.432	0.24	0.01	$e_{33}(C / m^2)$	15.8	-	-
$\nu_{23}(-)$	0.432	0.49	0.01	$\mu_{11}(pc / Vm)$	13060	30.9897	-
$G_{23}(MPa)$	25600	360600	22.5	$\mu_{22}(pc / Vm)$	13060	26.563	-
$G_{13}(MPa)$	25600	5653700	22.5	$\mu_{33}(pc / Vm)$	11510	26.563	-
$G_{12}(MPa)$	30600	5653700	22.5	-	-	-	-

جدول ۳- نتایج خمش حاصل از بارگذاری مکانیکی ورق ناهمگن در دو حالت ضخیم و نازک

	a/h=4				a/h=50			
	پژوهش حاضر	مرجع [۲۱]	FSDT	CLT	پژوهش حاضر	مرجع [۲۱]	FSDT	CLT
$W(h/2) [10^{-12}m]$	۳/۱۳۰۱	۳/۱۵۲۵	۱/۸۴۸۸	۰/۹۳۷۸	۲۳۳۰/۴	۲۳۵۴/۰	۱۸۴۲/۹	۱۸۳۱/۵
$0) [10^{-3}V](\phi^t)$	۰/۰۶۰۰۶	۰/۰۶۱۱	۰/۰۲۶۶	۰/۰۲۱۱	۰/۹۱۰۰	۰/۹۱۵۳	۰/۲۹۴۳	۰/۲۹۳۸
$0) [10^{-3}V](\phi^b)$	۰/۰۶۰۰۶	۰/۰۶۱۱	۰/۰۲۶۶	۰/۰۲۱۱	۰/۹۱۰۰	۰/۹۱۵۳	۰/۲۹۴۳	۰/۲۹۳۸
$\sigma_{yy}(h/2)[Pa]$	۶/۴۸۰۵	۶/۵۶۴۲	۵/۹۰۲۳	۵/۸۹۱۲	۷۱۱/۸۱	۷۸۶/۵۲	۹۲۰/۵۴	۹۲۰/۵۳
$\sigma_{zz}^t(0) [Pa]$	۰/۴۹۸۱	۰/۴۹۸۴	۰/۰۱۶۲	۰/۰۱۶۳	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۲/۵۴۰۳	۲/۵۴۰۴
$\sigma_{zz}^b(0) [Pa]$	۰/۴۹۸۱	۰/۴۹۸۴	-۰/۰۱۶۲	-۰/۰۱۶۳	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	-۲/۵۴۰۳	-۲/۵۴۰۴
$D_z^t(0)[\frac{10^{-13}C}{m^2}]$	۰/۵۰۲۳	۰/۵۰۵۳	-۰/۱۹۵۷	-۰/۱۵۵۱	۰/۶۰۰۵	۰/۶۱۱۶	-۰/۱۶۷۲	-۰/۱۶۶۹
$D_z^b(0)[\frac{10^{-13}C}{m^2}]$	۰/۵۰۲۳	۰/۵۰۵۳	۰/۱۹۵۷	۰/۱۵۵۱	۰/۶۰۰۵	۰/۶۱۱۶	۰/۱۶۷۲	۰/۱۶۶۹

جدول ۴- توزیع Φ ، σ_{xx} و D_z در راستای ضخامت ورق با حل دقیق و تئوری مرتبه چهار لایه گون

z	$\Phi \times 10^3$		σ_{xx}		D_z	
	حل دقیق [۳۷]	پژوهش حاضر	حل دقیق [۳۷]	پژوهش حاضر	حل دقیق [۳۷]	پژوهش حاضر
۰/۵۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۶/۵۶۴۳	۶/۵۶۴۲	۱۶۰/۵۸	۱۶۰/۵۹
۰/۴۷۵	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۸۹	۵/۸۲۰۱	۵/۸۲۰۰	۱۴۹/۳۵	۱۴۹/۳۵
۰/۴۵۰	۰/۰۳۵۸	۰/۰۳۵۸	۵/۰۸۵۵	۵/۰۸۵۵	۱۱۷/۲۳	۱۱۷/۲۳
۰/۴۲۵	۰/۰۴۸۸	۰/۰۴۸۸	۴/۳۵۹۵	۴/۳۵۹۵	۶۶/۵۶۸	۶۶/۵۶۷
۰/۴۰۰	۰/۰۵۹۸	۰/۰۵۹۸	۳/۶۴۰۸	۳/۶۴۰۸	-۰/۳۳۸۲	-۰/۳۳۸۴
۰/۴۰۰	۰/۰۵۹۸	۰/۰۵۹۸	۲/۸۸۵۵	۲/۸۸۵۸	-۰/۳۳۸۲	-۰/۳۳۸۴
۰/۳۰۰	۰/۰۵۸۹	۰/۰۵۸۹	۱/۴۴۹۹	۱/۴۴۹۶	-۰/۱۲۷۶	-۰/۱۲۷۷
۰/۲۰۰	۰/۰۵۸۹	۰/۰۵۸۹	-۰/۲۸۷۹	-۰/۲۸۸۰	۰/۰۸۱۳	۰/۰۸۱۳
۰/۱۰۰	۰/۰۵۹۶	۰/۰۵۹۶	-۰/۷۸۱۷	-۰/۷۸۱۴	۰/۲۹۱۳	۰/۲۹۱۴
۰/۰۰۰	۰/۰۶۱۱	۰/۰۶۱۱	-۱/۹۲۶۶	-۱/۹۲۶۶	۰/۵۰۵۲	۰/۵۰۵۳
۰/۰۰۰	۰/۰۶۱۱	۰/۰۶۱۱	۰/۰۹۹۱	۰/۰۹۹۱	۰/۵۰۵۲	۰/۵۰۵۳
-۰/۱۰۰	۰/۰۶۳۴	۰/۰۶۳۴	-۰/۰۱۴۹	-۰/۰۱۵۰	۰/۷۲۵۹	۰/۷۲۶۰
-۰/۲۰۰	۰/۰۶۶۵	۰/۰۶۶۵	-۰/۱۲۸۰	-۰/۱۲۸۱	۰/۹۵۶۳	۰/۹۵۶۵
-۰/۳۰۰	۰/۰۷۰۶	۰/۰۷۰۶	-۰/۲۴۲۶	-۰/۲۴۲۷	۱/۱۹۹۵	۱/۱۹۹۷
-۰/۴۰۰	۰/۰۷۵۶	۰/۰۷۵۶	-۰/۳۶۱۶	-۰/۳۶۱۷	۱/۴۵۸۷	۱/۴۵۸۹
-۰/۴۰۰	۰/۰۷۵۶	۰/۰۷۵۶	-۴/۲۳۴۸	-۴/۲۳۴۸	۱/۴۵۸۷	۱/۴۵۵۹
-۰/۴۲۵	۰/۰۶۰۲	۰/۰۶۰۲	-۴/۸۸۰۶	-۴/۸۸۰۶	-۵۸/۳۵۲	-۵۸/۳۵۲
-۰/۴۵۰	۰/۰۴۲۵	۰/۰۴۲۵	-۵/۵۳۳۷	-۵/۵۳۳۷	-۱۰۳/۶۶	-۱۰۳/۶۷
-۰/۴۷۵	۰/۰۲۲۴	۰/۰۲۲۴	-۶/۱۹۵۱	-۶/۱۹۵۰	-۱۳۲/۴۰	-۱۳۲/۴۱
-۰/۵۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	-۶/۸۶۵۸	-۶/۸۶۵۸	-۱۴۲/۴۶	-۱۴۲/۴۶

نتایج برای دو حالت ورق ضخیم $a/h=4$ و حالت ورق نازک $a/h=50$ در جدول (۳) استخراج و با نتایج حاصل از تئوری‌های مختلف کلاسیک ورق، تئوری برشی مرتبه اول و تئوری مختلط مرتبه چهار مرجع [۲۱] مقایسه شده است. این نتایج نشان می‌دهند که تئوری‌های کلاسیک (CLT) و تئوری مرتبه اول برشی (FSDT) به دلیل فرضیات و ساده‌سازی‌هایی که دارند، درصد خطای بالایی به ویژه برای ورق‌ها با ضخامت بالا دارند و تئوری حاضر بسیار دقیق می‌باشد. همچنین در مدل ورق چهار لایه نتایج پتانسیل الکتریکی Φ ، تنش صفحه‌ای σ_{xx} و جابه‌جایی الکتریکی D_z در جدول (۴) با حل دقیق مرجع [۳۷] مقایسه شده‌اند؛ همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از این تئوری با نتایج حل دقیق سه بعدی از مطابقت بسیار خوبی برخوردار هستند که نشان دهنده دقت بسیار خوب این فرمولاسیون در محاسبه خیز و تنش‌ها می‌باشد.

۵-۲- ارزیابی نتایج

با اعمال بار مکانیکی سینوسی بر روی سطح بالایی میکرو ورق چند لایه، لایه‌های پیزوالکتریک به عنوان حسگر عمل کرده و می‌توان تغییرات پتانسیل، تنش‌ها، خیز و سایر نتایج را در راستای ضخامت ورق مشاهده کرد. در تمامی نتایج تنش‌ها، خیز و پتانسیل الکتریکی به صورت زیر بی‌بعد شده‌اند. ضرایب ثابت رابطه (۲۹) مربوط به خواص مکانیکی و الکتریکی لایه بالایی ورق می‌باشد. لازم به ذکر است در تمامی نتایج، مقادیر تنش از روابط ساختاری (۶ و ۷) محاسبه شده‌اند.

$$\bar{w} = \frac{10wc_{11}h^3}{\hat{p}_z a^4}, \bar{\Phi} = \frac{10\Phi e_{31}h}{\hat{p}_z a^2}, \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}h^2}{\hat{p}_z a^2}, i, j = x, y \quad (29)$$

$$\bar{\sigma}_{iz} = \frac{10\sigma_{iz}h^3}{\hat{p}_z a^3}, \bar{D}_z = \frac{D_z c_{11}h^2}{e_{31}\hat{p}_z a^2}, i = x, y$$

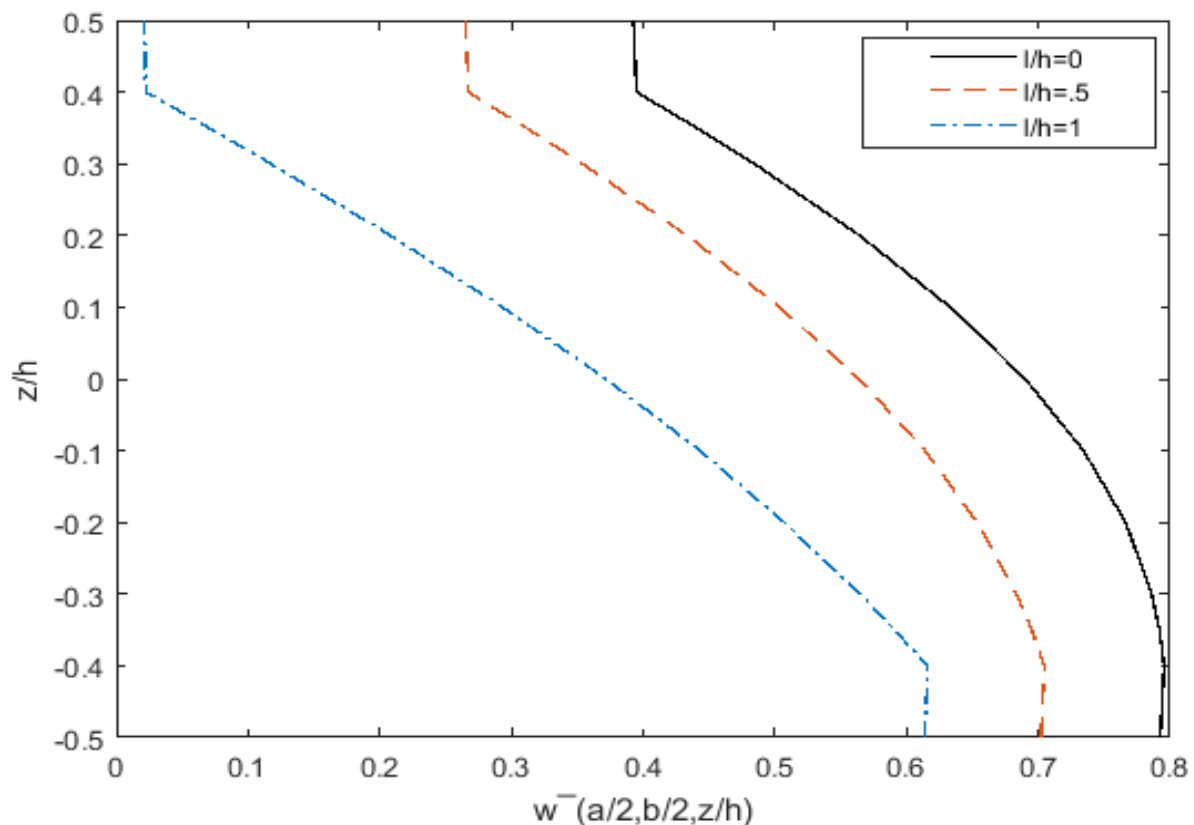
در جدول (۵) مقادیر خیز مرکز ورق سه لایه با هسته نرم برای حالت‌های مختلف a/h با فرمولاسیون واحد لایه‌گون از مرتبه یک تا چهار آورده شده است. بر اساس این نتایج با افزایش پارامتر a/h و در واقع برای ورق‌های خیلی نازک، نتایج از تئوری مرتبه دوم به بعد کاملاً یکسان می‌شوند، برای ورق‌های نازک و ضخیم با اختلاف بسیار کم از تئوری مرتبه سوم به بعد همگرا می‌شوند و حاصل به جواب دقیق نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین می‌توان گفت تئوری مرتبه چهارم جواب‌های بسیار مناسبی برای ورق‌های ضخیم ارائه می‌دهد. همچنین مطابق نتایج با کاهش ضخامت و نازک شدن ورق، سفتی سازه کاهش یافته و در نتیجه مقدار خیز ورق افزایش می‌یابد.

در شکل‌های (۴) تا (۱۰) نتایج برای میکرو ورق سه لایه متقارن با هسته نرم آورده شده است. شکل (۴) مقدار خیز بی‌بعد شده را در راستای ضخامت ورق به ازای پارامتر اثر اندازه‌های مختلف نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، در تئوری کوپل تنش اصلاح شده به واسطه وجود تانسور گرادیان چرخش متقارن با افزایش پارامتر اثر اندازه، سفتی سازه افزایش یافته و در نتیجه مقدار خیز کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به نمودار خیز مشاهده می‌شود که در فرمولاسیون متحدالشکل کررا مقدار خیز ورق در مرز بین لایه‌ها کاملاً پیوسته بوده و بر خلاف سایر تئوری‌های ورق در فرمولاسیون متحدالشکل کررا خیز در راستای ضخامت ورق متغیر می‌باشد و همانطور که قبلاً اشاره شد در ورق‌های چند لایه با خواص مکانیکی متفاوت، تغییرات شدید میدان جابه‌جایی در سطح مشترک لایه‌ها را خواهیم داشت. این اثر به عنوان فرم زیگزاگ میدان جابه‌جایی در راستای ضخامت Z شناخته می‌شود که در شکل (۴) به‌وضوح قابل مشاهده است.

شکل‌های (۵) و (۶) تنش‌های نرمال درون صفحه‌ای $\bar{\sigma}_{xx}$ و تنش برون صفحه‌ای $\bar{\sigma}_{zz}$ را نشان می‌دهند. با توجه به شکل (۵) می‌توان نتیجه گرفت که به ازای اثر اندازه‌های مختلف مقدار تنش نرمال صفر در مرکز سازه می‌باشد و به دلیل تقارن سازه، توزیع تنش‌ها نسبت به ضخامت متقارن می‌باشد. همچنین با توجه به استفاده از فرمولاسیون جابه‌جایی در این پژوهش، مشاهده می‌شود که در مرز بین لایه‌ها به دلیل وجود خواص متفاوت ماده مقدار تنش نرمال درون صفحه‌ای ناپیوسته می‌باشد.

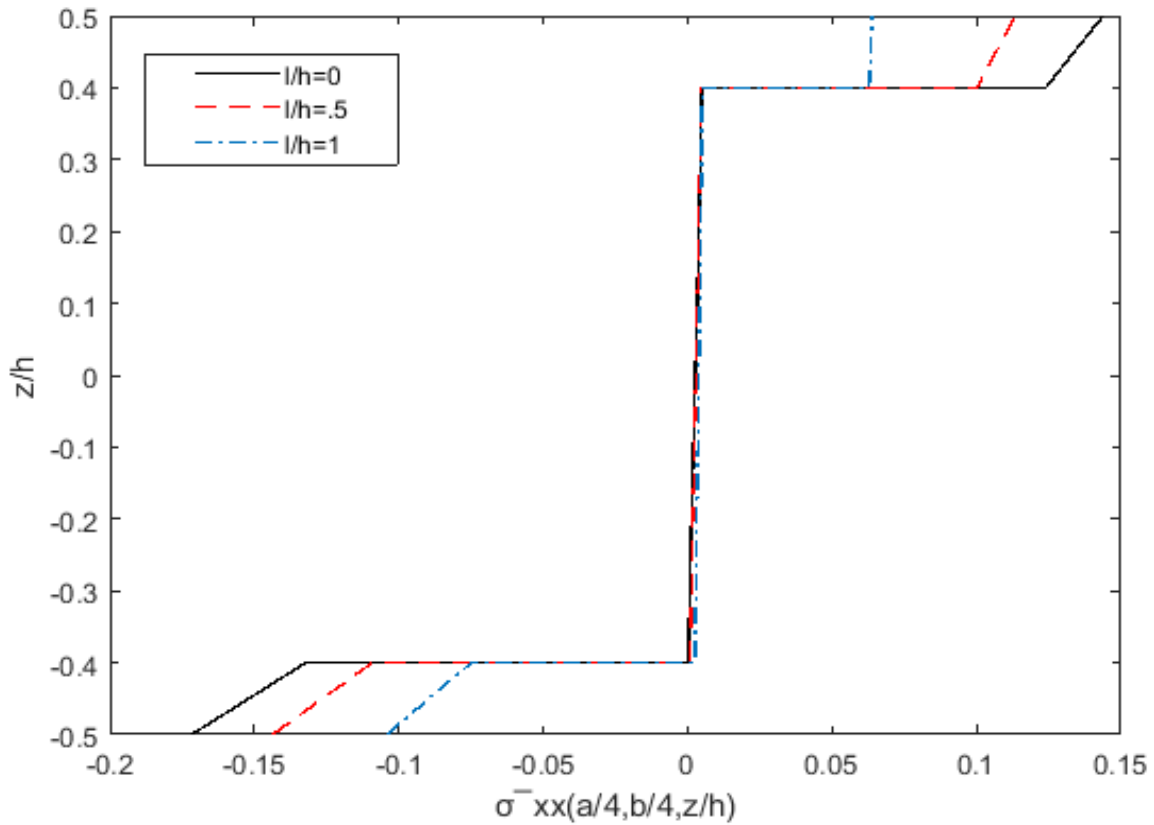
جدول ۵- مقادیر خیز و بررسی همگرایی مرتبه تئوری لایه‌گون

a/h	l/h=0				l/h=0.5			
	$w \times 10^{-11}$							
	LW4	LW3	LW2	LW1	LW4	LW3	LW2	LW1
۴	۰/۱۶۱۳	۰/۱۶۱۳	۰/۱۶۱۲	۰/۱۳۹۶	۰/۰۰۴۵۰۲	۰/۰۰۴۵۰۲	۰/۰۰۴۵۰۲	۰/۰۰۴۴۱۴
۱۰	۱/۷۳۵	۱/۷۳۵	۱/۷۳۴	۱/۶۶۶	۰/۱۵۱۸	۰/۱۵۱۸	۰/۱۵۱۷	۰/۱۵۰۹
۵۰	۸۰/۴۶	۸۰/۴۶	۸۰/۴۶	۸۰/۲۲	۴۵/۰۲	۴۵/۰۲	۴۵/۰۲	۴۴/۹۵
۱۰۰	۷۰۹/۵	۷۰۹/۵	۷۰۹/۵	۷۰۸/۳	۴۹۴/۶	۴۹۴/۶	۴۹۴/۶	۴۹۴/۱

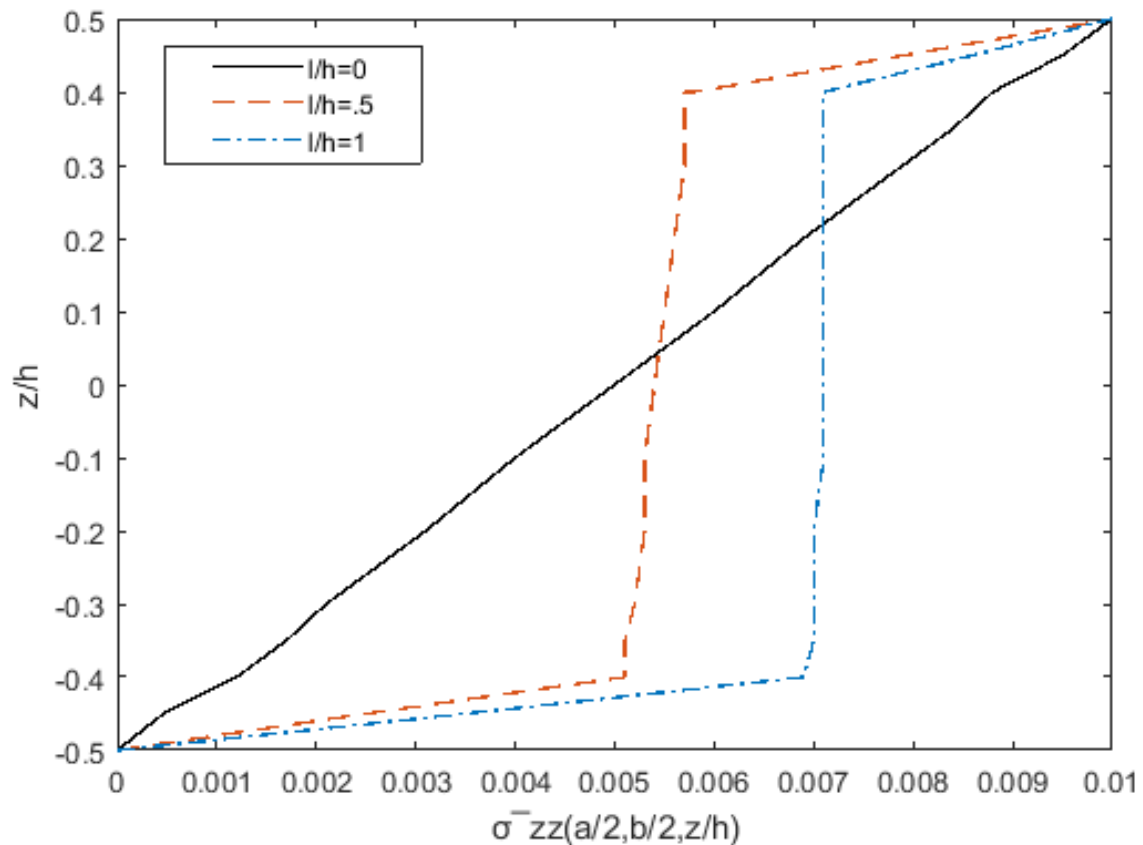


شکل ۴- توزیع خیز بی‌بعد شده w در راستای ضخامت ($Piezo/0/Piezo$) به ازای پارامتر اثر اندازه‌های مختلف

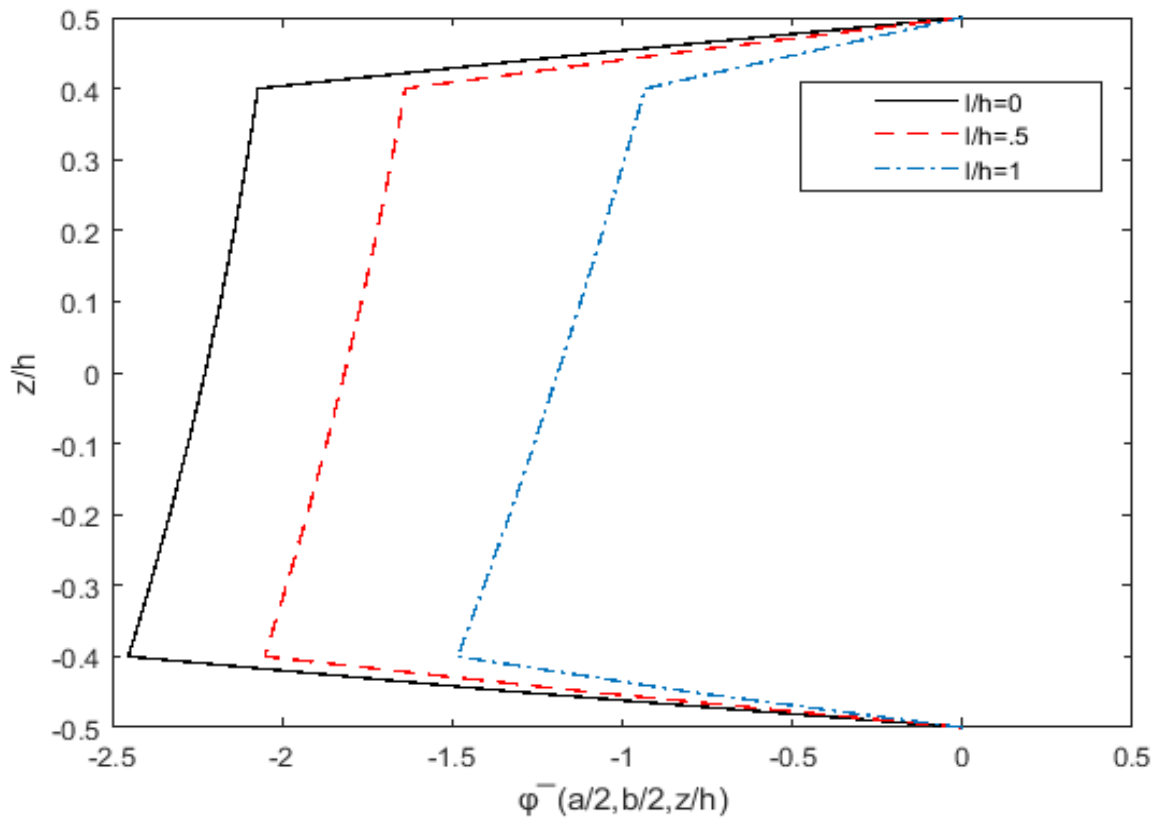
در شکل‌های (۷) و (۸) تغییرات پتانسیل الکتریکی $\bar{\Phi}$ و جابه‌جایی الکتریکی \bar{D}_z در راستای ضخامت میکرو ورق به صورت بی‌بعد شده مطابق رابطه (۳۱) نشان داده شده است. تغییرات پتانسیل الکتریکی در لایه‌ها با متفاوت شدن جنس یا زاویه‌ها در لایه‌ها و همچنین پیوستگی پتانسیل الکتریکی در مرز لایه‌ها نشان از دقت مناسب تئوری حاضر دارد. همچنین میزان تغییرات جابه‌جایی الکتریکی در راستای ضخامت در لایه‌های پیزوالکتریک بیشتر و در لایه‌های بدون خاصیت پیزوالکتریک نسبتاً ثابت بوده است.



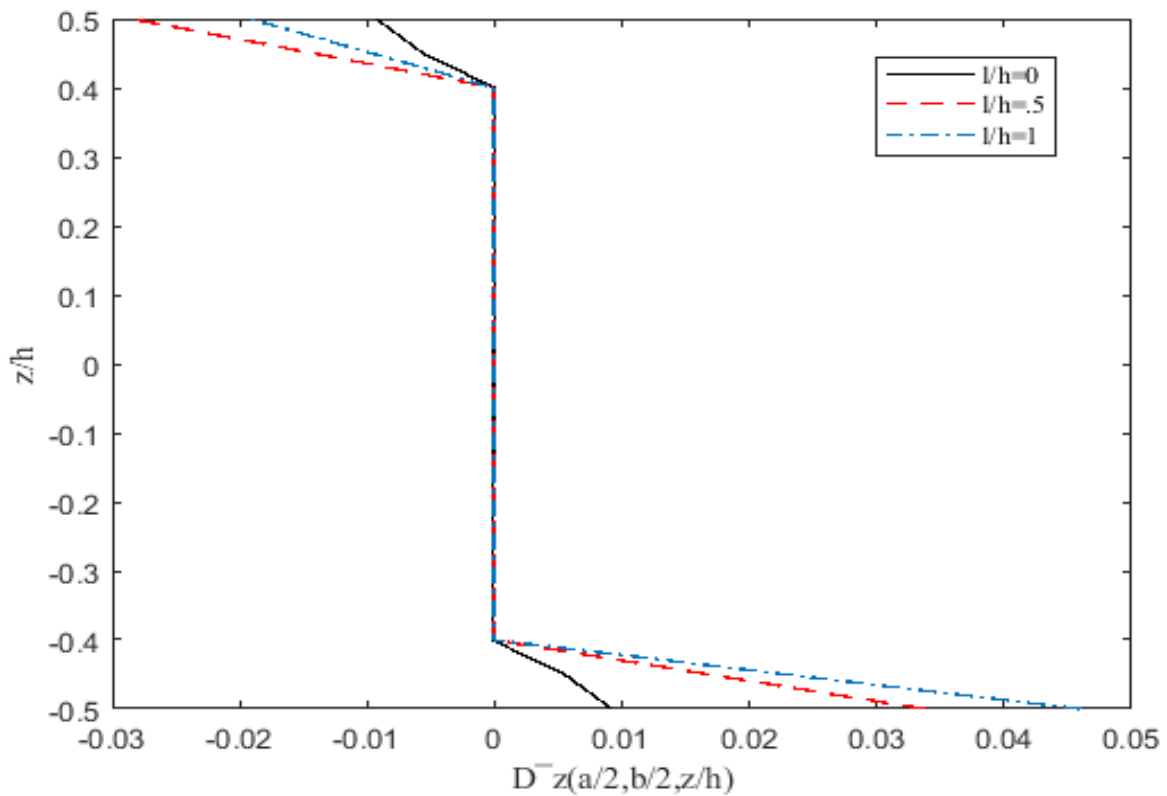
شکل ۵- توزیع تنش نرمال بی بعد شده $\bar{\sigma}_{xx}$ در راستای ضخامت ($Piezo/0/Piezo$) به ازای پارامتر اثر اندازه‌های مختلف



شکل ۶- توزیع تنش بی بعد شده $\bar{\sigma}_{zz}$ در راستای ضخامت ($Piezo/0/Piezo$) به ازای پارامتر اثر اندازه‌های مختلف



شکل ۷- توزیع پتانسیل الکتریکی بی بعد شده $\bar{\Phi}$ در راستای ضخامت ($Piezo/0/Piezo$) به ازای پارامتر اثر اندازه‌های مختلف

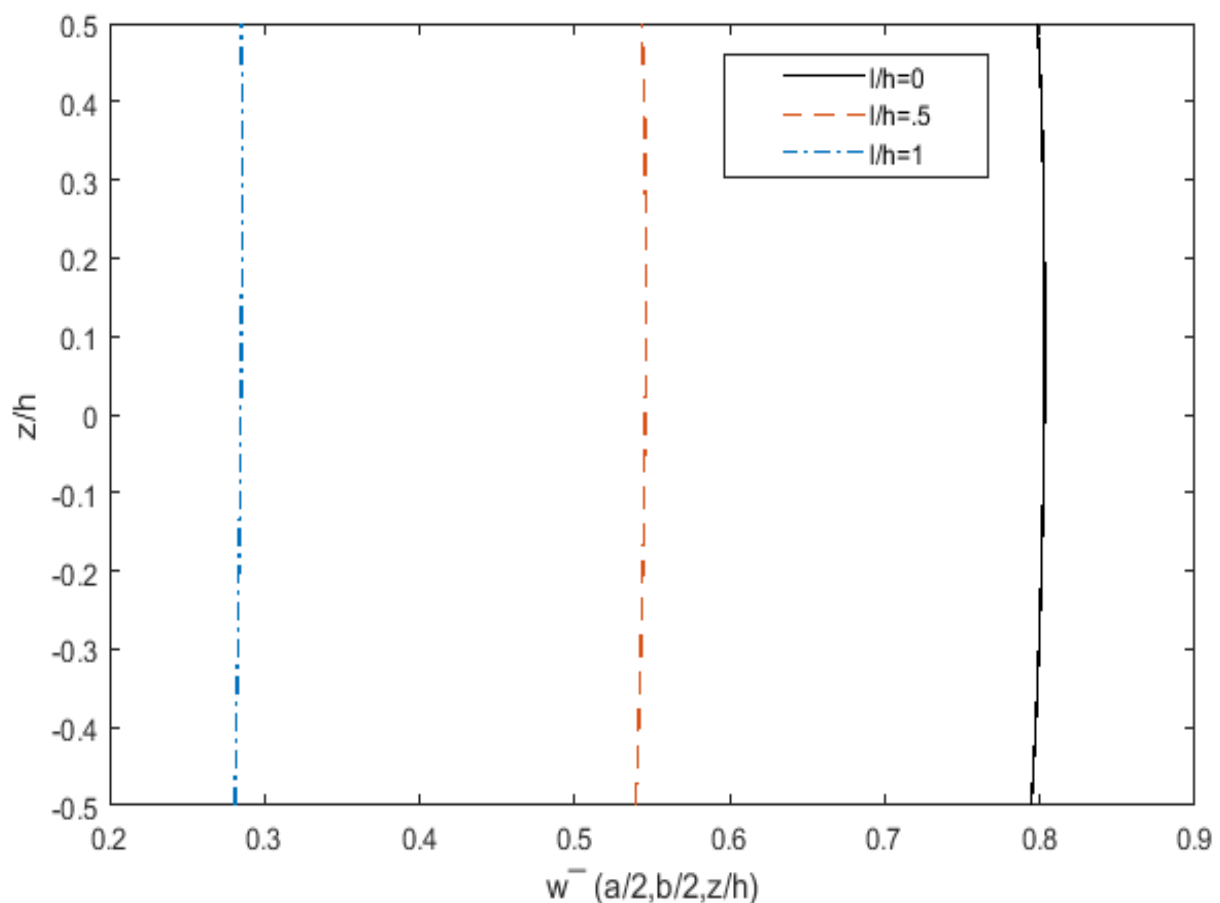


شکل ۸- توزیع جابه‌جایی الکتریکی بی بعد شده \bar{D}_z در راستای ضخامت ($Piezo/0/Piezo$) به ازای پارامتر اثر اندازه‌های مختلف

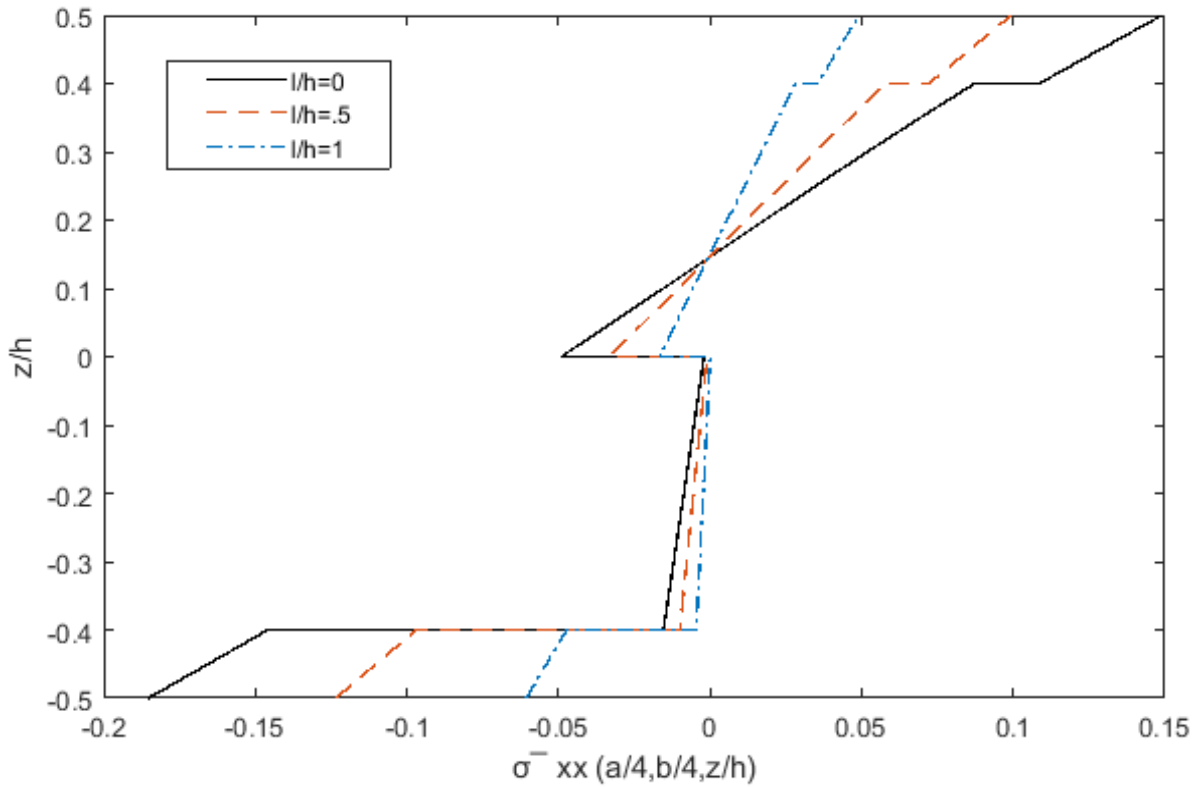
در مسئله دوم مشابه مسئله اول، نتایج خیز، تنش، پتانسیل الکتریکی و جابه‌جایی الکتریکی برای میکرو ورق چهار لایه نامتقارن (*Piezo/0/90/Piezo*) به ازای اثر اندازه‌های مختلف استخراج شده است. مطابق شکل (۹) در این حالت نیز نمودارهای بی‌بعد شده خیز وسط ورق در راستای ضخامت ورق کاملاً پیوسته بوده که نشان از دقت این فرمولاسیون جهت تحلیل خیز ورق‌ها به ویژه ورق‌های ضخیم یا سازه ساندویچی دارد. نکته قابل توجه در این است که در حالت میکرو ورق با هسته نرم به دلیل اختلاف زیاد خواص مکانیکی بین هسته و رویه‌های پیزوالکتریک، تغییرات خیز در راستای ضخامت ورق کاملاً مشهود و مشخص است؛ در حالی که در مسئله ورق چهار لایه با هسته سفت به دلیل نزدیکی خواص لایه‌ها با یکدیگر، تغییرات خیز در راستای ضخامت ورق مقدار بسیار کمی دارد.

در شکل (۱۰) نتایج تنش نرمال $\bar{\sigma}_{xx}$ در راستای ضخامت نشان داده شده است. عدم پیوستگی تنش‌های نرمال در بین لایه‌ها به دلیل تفاوت در جنس یا زاویه لایه‌ها در نمودارها نمایان است. با دقت در شکل (۱۰) می‌توان نتیجه گرفت که در این حالت به دلیل عدم تقارن سازه، مکان تنش نرمال صفر به ازای اثر اندازه‌های مختلف، متفاوت است.

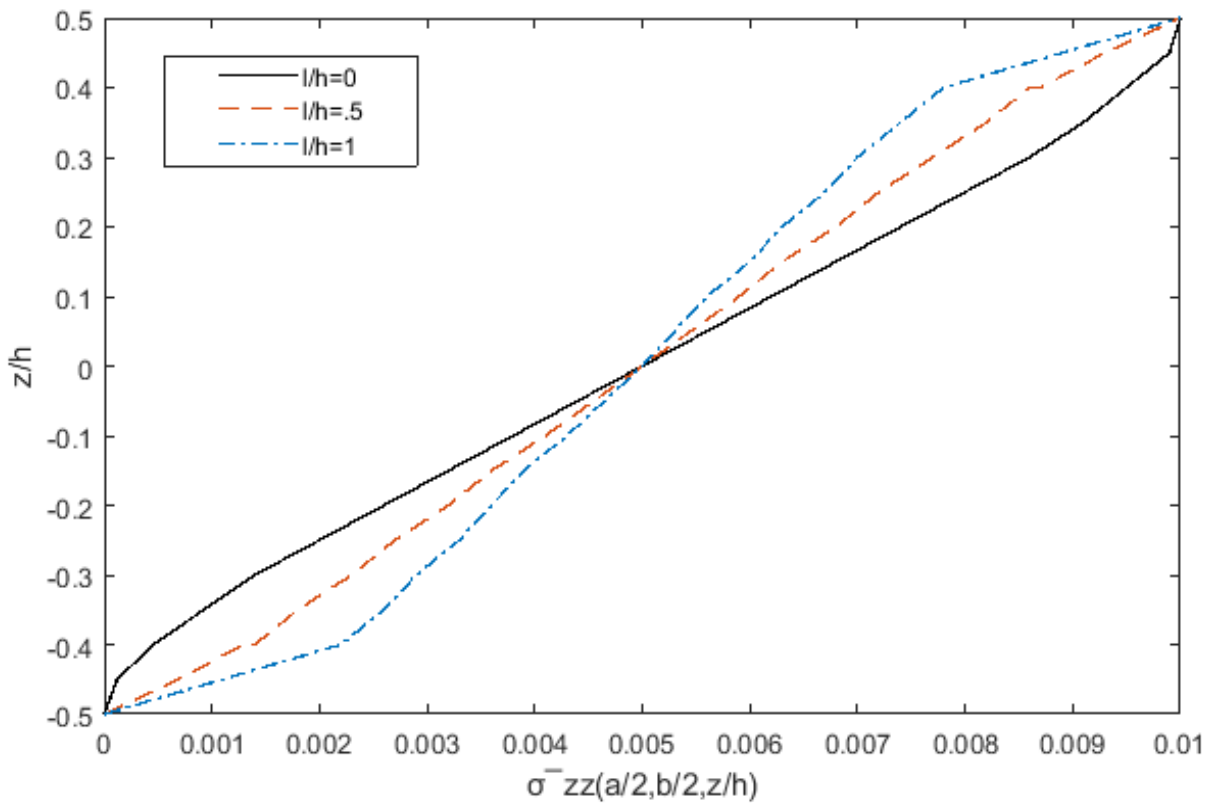
شکل (۱۱) نمودار بی‌بعد شده تنش برون صفحه‌ای $\bar{\sigma}_{zz}$ را در راستای ضخامت ورق به ازای اثر اندازه‌های مختلف نشان می‌دهد. توزیع تنش $\bar{\sigma}_{zz}$ در راستای ضخامت در کل نمودار به ویژه در مرز بین لایه‌ها کاملاً پیوسته و بیانگر دقت بالای این فرمولاسیون در تحلیل تنش‌ها در ورق‌های ساندویچی ضخیم می‌باشد.



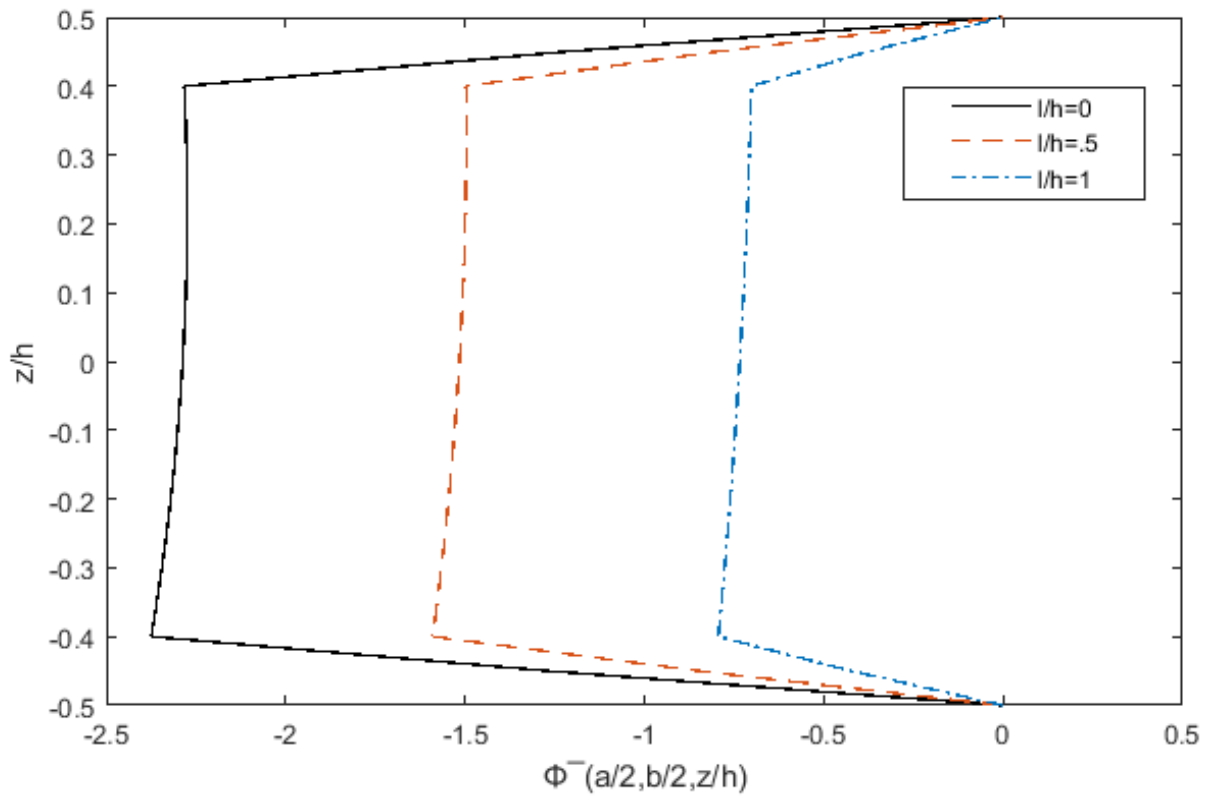
شکل ۹- توزیع خیز بی‌بعد شده w در راستای ضخامت (*Piezo/0/90/Piezo*) به ازای پارامتر اثر اندازه‌های مختلف



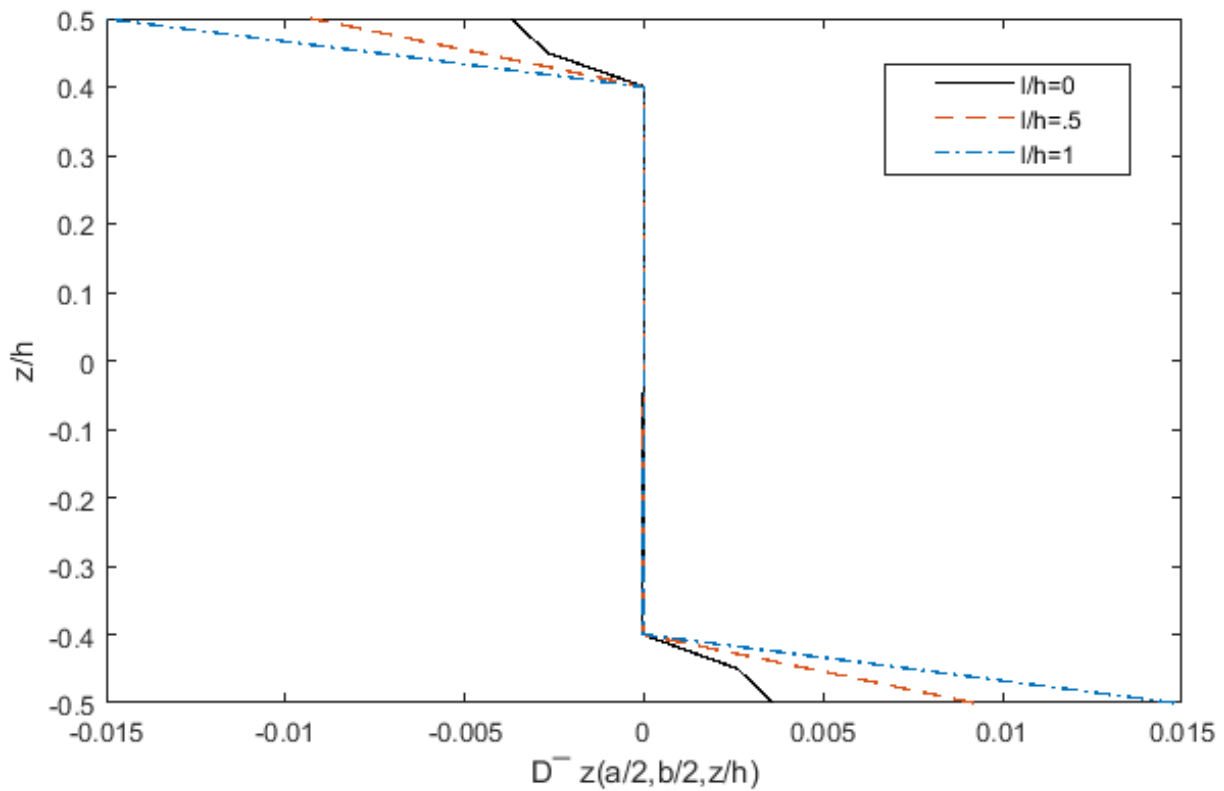
شکل ۱۰- توزیع تنش نرمال بی بعد شده $\bar{\sigma}_{xx}$ در راستای ضخامت (*Piezo/0/90/Piezo*) به ازای پارامتر اثر اندازه‌های مختلف



شکل ۱۱- توزیع تنش بی بعد شده $\bar{\sigma}_{zz}$ در راستای ضخامت (*Piezo/0/90/Piezo*) به ازای پارامتر اثر اندازه‌های مختلف



شکل ۱۲- توزیع پتانسیل الکتریکی بی بعد شده $\bar{\Phi}$ در راستای ضخامت $(Piezo/0/90/Piezo)$ به ازای پارامتر اثر اندازه‌های مختلف



شکل ۱۳- توزیع جابه جایی الکتریکی بی بعد شده \bar{D}_z در راستای ضخامت $(Piezo/0/90/Piezo)$ به ازای پارامتر اثر اندازه‌های مختلف

در شکل‌های (۱۲) و (۱۳) که در واقع پاسخ الکتریکی ورق به بارگذاری مکانیکی به عنوان یک میکرو حسگر می‌باشد، پیوستگی میدان پتانسیل و جابه‌جایی الکتریکی در کل ضخامت ورق چهار لایه به خوبی مشهود است. با توجه به نمودارها میزان تغییرات پتانسیل الکتریکی و جابه‌جایی الکتریکی در راستای ضخامت در لایه‌ها با خاصیت پیزوالکتریک بیشتر و در لایه‌های بدون خاصیت پیزوالکتریک مقدار پتانسیل نسبتاً ثابت و جابه‌جایی الکتریکی تقریباً صفر می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری

مدل‌سازی ورق‌های ساندویچی به دلیل ناهمسان‌گردی عرضی و تفاوت در زاویه قرارگیری لایه‌ها مستلزم استفاده از تئوری‌های بسیار دقیق ورق می‌باشد. در این پژوهش از فرمولاسیون متحدالشکل کررا جهت بیان میدان‌های جابه‌جایی و الکتریکی استفاده شده است که بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده، برای تحلیل میکرو ورق ساندویچی ضخیم چند لایه حاوی پیزوالکتریک توسعه داده شده است. تحلیل خمش میکرو ورق ساندویچی حاوی پیزوالکتریک تحت بارگذاری مکانیکی سینوسی انجام شده و نتایج حاصل به ازای پارامتر اثر اندازه‌های مختلف استخراج گردیده است. همانطور که در نمودارها مشاهده شد با افزایش پارامتر اثر اندازه، مقادیر بی بعد خیز، تنش‌های درون و برون صفحه‌ای و پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد. همچنین نتایج حاکی از آن است که این تئوری جهت تحلیل ورق‌های چند لایه، بسیار دقیق است به گونه‌ای که هم نواقص تئوری‌های تک لایه معادل (اثرات زیگزاگ و پیوستگی تنش‌ها) و هم نواقص تئوری‌های لایه‌ای (وابستگی مجهولات به تعداد لایه‌ها) و حجم بالای محاسبات را برطرف می‌کند.

مراجع

- [1] E. Reissner, "Finite Deflections of Sandwich Plates," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 15, No. 7, pp. 435-440, 1948, <https://doi.org/10.2514/8.11610>.
- [2] S. M. R. Khalili, M. B. Dehkordi, E. Carrera, and M. Shariyat, "Non-linear Dynamic Analysis of a Sandwich Beam with Pseudoelastic SMA Hybrid Composite Faces Based on Higher Order Finite Element Theory," *Composite Structure*, Vol. 96, pp. 243-255, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.020>.
- [3] H. G. Allen, "Analysis and Design of Structural Sandwich Panels: The Commonwealth and International Library: Structures and Solid Body Mechanics Division," Elsevier, 1969, <https://doi.org/10.1016/C2013-0-02134-2>.
- [4] C. Chamis, R. Aiello, and P. Murthy, "Composite Sandwich Thermostructural Behavior-computational Simulation," in *27th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, pp. 948, May, 19- 21, 1986, San Antonio, TX, USA, <https://doi.org/10.2514/6.1986-948>.
- [5] R. S. Rao, "Large Deflection and Non Linear Vibration of Multilayered Sandwich Plates," *AIAA Journal*, Vol. 15, pp. 876-895, 1986, <https://doi.org/10.2514/3.9591>.

- [6] M. Heder, "Buckling of Sandwich Panels with Different Boundary Conditions—A Comparison between FE-analysis and Analytical Solutions," *Composites Structures*, Vol. 19, No. 4, pp. 313–332, 1991, [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(91\)90079-E](https://doi.org/10.1016/0263-8223(91)90079-E).
- [7] W. T. Koiter, "Couple-stresses in the Theory of Elasticity, I & II," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B*, Vol. 67, pp. 17–44, 1969, [Online]. Available: <https://sid.ir/paper/605637/en>.
- [8] R. D. Mindlin, and H. Tiersten, "Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, pp. 415-448, 1962, <https://doi.org/10.1007/BF00253946>.
- [9] F. Yang, A. C. M. Chong, D. C. C. Lam, and P. Tong, "Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002, [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X).
- [10] A. Fallah, and M. B. Dehkordi, "A New Nonlinear Finite Element Model for Transient Dynamic Response of a Micro Composite Plate Embedded with Micro SMA Wires Considering the Size Effects," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 29, No. 27, pp. 6733-6754, 2021, <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1983900>.
- [11] R. Ansari, E. Hasrati, M. Faghih Shojaei, R. Gholami, V. Mohammadi, and A. Shahabodini, "Size-dependent Bending, Buckling and Free Vibration Analyses of Microscale Functionally Graded Mindlin Plates Based on the Strain Gradient Elasticity Theory," *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, No. 4, pp. 632-664, 2016, <https://doi.org/10.1590/1679-78252322>.
- [12] R. Ansari, R. Gholami, and A. Shahabodini, "Size-dependent Geometrically Nonlinear Forced Vibration Analysis of Functionally Graded First-order Shear Deformable Microplates," *Journal of Mechanics*, Vol. 32, No. 5, pp. 539-554, 2016, <https://doi.org/10.1017/jmech.2016.10>
- [13] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, J. Lee, and H. Nguyen-Xuan, "An Efficient Size-Dependent Computational Approach for Functionally Graded Isotropic and Sandwich Microplates Based on Modified Couple Stress Theory and Moving Kriging-based Meshfree Method," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 142-143, pp. 322-338, 2018/07/01/ 2018, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.04.040>.
- [14] S. Liu, K. Wang, B. Wang, J. Li, and C. Zhang, "Isogeometric Analysis of Bending, Vibration, and Buckling Behaviors of Multilayered Microplates Based on the Non-classical Refined Shear Deformation Theory," *Acta Mechanica*, Vol. 232, No. 8, pp. 2991-3010, 2021, <https://doi.org/10.1007/s00707-021-02992-9>.
- [15] A. Suleman, and V. B. Venkayya, "A Simple Finite Element Formulation for a Laminated Composite Plate with Piezoelectric Layers," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 6, pp. 776 - 782, 1995, <https://doi.org/10.1177/1045389x9500600605>.
- [16] S. Kapuria, G. P. Dube, P. C. Dumir, and S. Sengupta, "Levy-type Piezothermoelastic Solution for Hybrid Plate by using First-order Shear Deformation Theory," *Composites Part*

B: Engineering, Vol. 28, No. 5, pp. 535-546, 1997, [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00071-6](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00071-6).

[17] B. Behjat, M. Salehi, M. Sadighi, A. Armin, and M. Abbasi, "Static, Dynamic, and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Panels using Finite Element Method," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 20, No. 13, pp. 1635-1646, 2009, <https://doi.org/10.1177/1045389X09104113>.

[18] B. Behjat, M. Salehi, M. Sadighi, A. Armin, and M. Abbasi, "Static, Dynamic, and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Panels using Finite Element Method," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 20, No. 13, pp. 1635-1646, 2009, <https://doi.org/10.1177/1045389X09104113>.

[19] M. Tahani, and M. Mirzababae, "Higher-order Coupled and Uncoupled Analyses of Free Edge Effect in Piezoelectric Laminates under Mechanical Loadings," *Materials & Design*, Vol. 30, No. 7, pp. 2473-2482, 2009, <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2008.10.004>.

[20] J. N. Reddy, "*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*," Second Edition, CRC Press, New York, USA, 2003, ISBN: 0-8493-1592-1, <https://doi.org/10.1201/b12409>.

[21] E. Carrera, S. Brischetto, and P. Nali, "*Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*," First Edition, John Wiley & Sons, Ltd., 2011, ISBN: 9780470971208, <https://doi.org/10.1002/9781119950004>.

[22] J. A. Mitchell, and J. N. Reddy, "A Refined Hybrid Plate Theory for Composite Laminates with Piezoelectric Laminae," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32, No. 16, pp. 2345-2367, 1995, [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00229-P](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00229-P).

[23] Reddy J., "*Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*," CRC Press Inc., Boca Raton, Florida, pp. 2003, <https://www.amazon.com/Mechanics-Laminated-Composite-PlatesTheory-Analysis/dp/0849331013>.

[24] C. Ossadzow-David, and M. Touratier, "Multilayered Piezoelectric Refined Plate Theory," *AIAA Journal*, Vol. 41, No. 1, pp. 90-99, 2003, <https://doi.org/10.2514/2.1917>.

[25] S. Beheshti-Aval, and M. Lezgy-Nazargah, "A Coupled Refined High-order Global-Local Theory and Finite Element Model for Static Electromechanical Response of Smart Multilayered/Sandwich Beams," *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 82, pp. 1709-1752, 2012, <https://doi.org/10.1007/s00419-012-0621-9>.

[26] M. H. Hajmohammad, M. S. Zarei, M. Sepehr, and N. Abtahi, "Bending and Buckling Analysis of Functionally Graded Annular Microplate Integrated with Piezoelectric Layers Based on Layerwise Theory using DQM," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 79, pp. 679-688, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.05.055>.

[27] C. Zhang, A. Eyvazian, M. Alkhdher, M. Alwetaishi, and N. Ameer Ahammad, "Modified Couple Stress Theory Application to Analyze Mechanical Buckling Behavior of Three-layer Rectangular Microplates with Honeycomb Core and Piezoelectric Face Sheets," *Composite Structures*, Vol. 292, pp. 115582, 2022, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115582>.

- [28] E. Carrera, "Evaluation of Layerwise Mixed Theories for Laminated Plates Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 5, pp. 830-839, 1998, <https://doi.org/10.2514/2.444>.
- [29] E. Carrera, "Layer-wise Mixed Models for Accurate Vibrations Analysis of Multilayered Plates," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 65, No. 4, pp. 820-828, 1998, <https://doi.org/10.1115/1.2791917>.
- [30] E. Carrera, "Multilayered Shell Theories Accounting for Layerwise Mixed Description, Part 1: Governing Equations," *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 9, pp. 1107-1116, 1999, <https://doi.org/10.2514/2.821>.
- [31] E. Carrera, "Multilayered Shell Theories Accounting for Layerwise Mixed Description, Part 2: Numerical Evaluations," *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 9, pp. 1117-1124, 1999, <https://doi.org/10.2514/2.821>.
- [32] E. Carrera, "A Study of Transverse Normal Stress Effect on Vibration of Multilayered Plates and Shells," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225, No. 5, pp. 803-829, 1999, <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2271>.
- [33] E. Carrera, "Theories and Finite Elements for Multilayered Plates and Shells: A Unified Compact Formulation with Numerical Assessment and Benchmarking," *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 10, pp. 215-296, 2003, <https://doi.org/10.1007/BF02736224>.
- [34] F. Yang, A. C. M. Chong, D. C. C. Lam, and P. Tong, "Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002, [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X).
- [35] E. Carrera, "A Class of Two-dimensional Theories for Anisotropic Multilayered Plates Analysis," *Atti Della Accademia Delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali (Acts of the Academy of Sciences of Turin. Class of Physical, Mathematical, and Natural Sciences)*, Vol. 19-20, pp. 1-39, 1995, ISSN 0001-4419, <https://hdl.handle.net/11583/1398970>.
- [36] M. Şimşek, M. Aydın, H. Yurtcu, and J. Reddy, "Size-dependent Vibration of a Microplate under the Action of a Moving Load Based on the Modified Couple Stress Theory," *Acta Mechanica*, Vol. 226, No. 11, pp. 3807-3822, 2015, <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1437-9>.
- [37] P. Heyliger, "Static Behavior of Laminated Elastic/Piezoelectric Plates," *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 12, pp. 2481-2484, 1994, <https://doi.org/10.2514/3.12321>.

فهرست نمادهای انگلیسی

a	طول ورق
b	عرض ورق
\tilde{c}_{ijkl}	ماتریس سفتی
D_i	جاب‌جایی الکتریکی
E	مدول یانگ
E_i	میدان الکتریکی
e_{ijk}	ضرایب پیزوالکتریک
G	مدول یانگ
h	ارتفاع ورق
K	انرژی جنبشی
m_{ij}	تانسور کوپل تنش
$M_{uu}^{k\tau}$	ماتریس جرم لایه kام
N_L	تعداد لایه‌های ورق
$\hat{p}_{m\tau}^k$	بردار نیروهای خارجی
u_{τ}^k	بردار درجات آزادی جابجایی
U	انرژی کرنشی
W	کار نیروهای خارجی
μ_{ik}	ضرایب دی الکتریک
$F_{\tau}(\zeta_k)$	توابع ضخامت در لایه kام
σ_{ij}	تنش
ℓ	پارامتر اثر اندازه
ε_{ij}	کرنش
ρ_k	چگالی لایه kام
ζ_k	مختصات بی بعد محلی
Φ	پتانسیل الکتریکی
χ_{ij}	تانسور متقارن انحنا

پیوست

سلول‌های بنیادین ماتریس‌های $K_{uu}^{k\tau s}$:

$$\begin{aligned}
 K_{uu_{11}}^{k\tau s} &= \tilde{C}_{55}^k J^{k\tau_z s_z} - \tilde{C}_{11}^k J^{k\tau s} \partial^2 x - \tilde{C}_{66}^k J^{k\tau s} \partial^2 y + \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(-J^{k\tau_z s_z} (\partial^2 x + 4\partial^2 y) - J^{k\tau s} \partial^2 x \partial^2 y - J^{k\tau s_z} \partial^2 y \right) \\
 &\quad \left(-J^{k\tau_z s_z} \partial^2 y + J^{k\tau s} \partial^4 y + J^{k\tau_z s_z} \right) \\
 K_{uu_{12}}^{k\tau s} &= -J^{k\tau s} \partial x \partial y (\tilde{C}_{12}^k + \tilde{C}_{66}^k) - \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(-J^{k\tau_z s_z} \partial x \partial y - J^{k\tau s_z} \partial x \partial y + J^{k\tau s} (\partial^3 x \partial y + \partial x \partial^3 y) - 3J^{k\tau_z s_z} \partial x \partial y \right) \\
 K_{uu_{13}}^{k\tau s} &= \tilde{C}_{55}^k J^{k\tau_z s} \partial x - \tilde{C}_{13}^k J^{k\tau s_z} \partial x - \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(-J^{k\tau_z s} \partial^3 x + J^{k\tau_z s_z} \partial x - J^{k\tau_z s} \partial x \partial^2 y \right) \\
 K_{uu_{21}}^{k\tau s} &= -J^{k\tau s} \partial x \partial y (\tilde{C}_{12}^k + \tilde{C}_{66}^k) - \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(-J^{k\tau_z s_z} \partial x \partial y - J^{k\tau s_z} \partial x \partial y + J^{k\tau s} (\partial^3 x \partial y + \partial x \partial^3 y) - 3J^{k\tau_z s_z} \partial x \partial y \right) \\
 K_{uu_{22}}^{k\tau s} &= \tilde{C}_{44}^k J^{k\tau_z s_z} - \tilde{C}_{22}^k J^{k\tau s} \partial^2 y - \tilde{C}_{66}^k J^{k\tau s} \partial^2 x + \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(-J^{k\tau_z s_z} (\partial^2 y + 4\partial^2 x) + J^{k\tau s} \partial^2 y \partial^2 x - J^{k\tau s_z} \partial^2 x \right) \\
 &\quad \left(-J^{k\tau_z s_z} \partial^2 x + J^{k\tau s} \partial^4 x + J^{k\tau_z s_z} \right) \\
 K_{uu_{23}}^{k\tau s} &= \tilde{C}_{44}^k J^{k\tau_z s} \partial y - \tilde{C}_{23}^k J^{k\tau s_z} \partial y - \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(-J^{k\tau_z s} \partial^3 y + J^{k\tau_z s_z} \partial y - J^{k\tau_z s} \partial^2 x \partial y \right) \\
 K_{uu_{31}}^{k\tau s} &= -\tilde{C}_{55}^k J^{k\tau s_z} \partial x + \tilde{C}_{13}^k J^{k\tau_z s} \partial x - \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(J^{k\tau s_z} \partial^3 x - J^{k\tau_z s_z} \partial x + J^{k\tau s_z} \partial x \partial^2 y \right) \\
 K_{uu_{32}}^{k\tau s} &= -\tilde{C}_{44}^k J^{k\tau s_z} \partial y + \tilde{C}_{23}^k J^{k\tau_z s} \partial y - \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(J^{k\tau s_z} \partial^3 y - J^{k\tau_z s_z} \partial y + J^{k\tau s_z} \partial^2 x \partial y \right) \\
 K_{uu_{33}}^{k\tau s} &= -\tilde{C}_{55}^k J^{k\tau s} \partial^2 x - \tilde{C}_{44}^k J^{k\tau s} \partial^2 y + \tilde{C}_{33}^k J^{k\tau_z s_z} + \frac{1}{4} G^k \ell^2 \left(-J^{k\tau_z s_z} (\partial^2 x + \partial^2 y) + J^{k\tau s} (\partial^4 x + \partial^4 y) + 4J^{k\tau s} \partial^2 x \partial^2 y \right)
 \end{aligned}$$

سلول‌های بنیادین ماتریس $K_{u\Phi}^{k\tau s}$:

$$\begin{aligned}
 K_{u\Phi_{11}}^{k\tau s} &= \partial x \left(-J^{k\tau s_z} e_{31}^k + J^{k\tau_z s} e_{15}^k \right) \\
 K_{u\Phi_{21}}^{k\tau s} &= \partial y \left(-J^{k\tau s_z} e_{32}^k + J^{k\tau_z s} e_{24}^k \right) \\
 K_{u\Phi_{31}}^{k\tau s} &= -e_{15}^k J^{k\tau s} \partial^2 x - e_{24}^k J^{k\tau s} \partial^2 y + e_{33}^k J^{k\tau_z s_z}
 \end{aligned}$$

سلول‌های بنیادین ماتریس $K_{\Phi u}^{k\tau s}$:

$$\begin{aligned}
 K_{\Phi u_{11}}^{k\tau s} &= -\left(J^{k\tau_z s} e_{31}^k - J^{k\tau s_z} e_{15}^k \right) \partial x \\
 K_{\Phi u_{12}}^{k\tau s} &= -\left(J^{k\tau_z s} e_{32}^k - J^{k\tau s_z} e_{24}^k \right) \partial y \\
 K_{\Phi u_{13}}^{k\tau s} &= e_{15}^k J^{k\tau s} \partial^2 x + e_{24}^k J^{k\tau s} \partial^2 y - e_{33}^k J^{k\tau_z s_z}
 \end{aligned}$$

سلول‌های بنیادین ماتریس $K_{\Phi\Phi}^{k\tau s}$:

$$K_{\Phi\Phi_{11}}^{k\tau s} = -\mu_{11} J^{k\tau s} \partial^2 x - \mu_{22} J^{k\tau s} \partial^2 y + \mu_{33} J^{k\tau_z s_z}$$

Analysis of Electromechanical Behavior of the Piezoelectric Micro Multi Layered Sandwich Plate on the Basis of the Modified Unified Formulation using the Modified Couple Stress Theory

Narges Ebrahimi

PhD Student, Department of Mechanical Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran
narges_ebrahimi88@yahoo.com

*Corresponding author: **Mohsen Botshekanan Dehkordi**

Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran
botshekanan@eng.sku.ac.ir

Yaghoub Tadi beni

Professor, Department of Mechanical Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran
tadi@sku.ac.ir

Abstract

In the field of plate and shell analysis, different theories have been presented in recent years, which some of them have difficulties and defects. Carrera's unified formulation is a comprehensive formulation which, in addition to solving these problems, has the ability to model all these theories in addition to higher order theories in a unit form. In this article, the Carrera's unified formulation has been extended using the modified couple stress theory for the electro-mechanical analysis of multilayer sandwich microplates containing piezoelectric materials at the micro scale. Unlike other plate theories, in this formulation, the variation of the deflection along the thickness of plate is considered. In this research, the results of deflection, in-plane stresses, out of plane stresses and electric potential for static bending of a thick sandwich microplate containing piezoelectric layers with simple support boundary conditions have been obtained. The results show that the extension of this formulation based on the higher order theories e.g. modified stress couple theory can consider the size effect of material at the micro and also nano scale. In addition, this new extended formulation can analyze the extensibility along the thickness of plate and also the continuity between layers with different properties for each type of thick multi-layer plate with or without piezoelectricity, correctly.

Keywords: Carrera's uniform formulation, Modified couple stress theory, Piezoelectric, Micro sandwich plate, Size effect