

مدلسازی دینامیکی و طراحی کنترل گر مود لغزشی مبتنی بر رویت گر اغتشاش زمان-ثابت برای کنترل همزمان فاصله و وضعیت در عملیات مجاورت ماهواره های فضایی

در این مقاله یک طرح کنترل مود لغزشی بر اساس رویتگر اغتشاش زمان-ثابت برای عملیات مجاورت ماهواره ها در حضور عدم قطعیت پارامترها و اغتشاشات ارائه می شود. این رویتگر به منظور تخمین نامعینی های تجمعی، شامل جفتیدگی سینماتیکی، عدم قطعیت پارامترها و اغتشاشات محیطی استفاده می شود. بر اساس خروجی رویتگر طراحی شده، کنترل مود لغزشی برای دستیابی به همگرایی زمان-ثابت توسعه داده می شود که در آن رویتگر اثر نامعینی ها را خنثی و چترینگ را کاهش می دهد. علاوه بر این، روش کنترلی پیشنهادی توانسته است سرعت همگرایی را افزایش داده و دقت ردگیری کنترل را بهبود بخشد. پایداری زمان-ثابت سیستم کنترل پیشنهادی به روش لیاپانوف اثبات گردید. به علاوه کارایی آن از طریق شبیه سازی های عددی بررسی و مورد تأیید قرار گرفتند.

احمد همتی^۱
دانشجوی دکتری

سید محمدرضا
سید نورانی^۲
دانشیار

جلیل بیرامزاد^۳
دانشجوی دکتری

واژه های راهنما: عملیات مجاورت ماهواره، همگرایی زمان-ثابت، کنترل مود لغزشی، رویتگر اغتشاش

۱- مقدمه

مجاورت خودکار فضاپیماها یک فناوری اساسی و کلیدی برای بسیاری از مأموریت های فضایی مانند بازرسی در مدار، ایجاد ایستگاه فضایی و تأمین سوخت است. برای تضمین موفقیت این مأموریت ها، عملیات مجاورت نیاز به کنترل دقت بالا و همزمان موقعیت نسبی و حرکت نسبی بین دو فضاپیما تعقیب کننده و تعقیب شونده (هدف) دارد. اما وجود اغتشاشات فضایی با منشأهای مختلف و نیز عدم قطعیت های مربوط به خود فضاپیما

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران، a.hemmati@tabrizu.ac.ir
^۲ نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مهندسی مکترونیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران، smrs.noorani@tabrizu.ac.ir
^۳ دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران، jalilbeyramzad@gmail.com

باعث بروز مشکلاتی در این امر می‌شود. روش‌های کنترلی متنوعی برای کنترل وضعیت سامانه‌های فضایی مختلف طراحی، شبیه‌سازی و به صورت عملی پیاده‌سازی شده است. از جمله روش‌های مورد استفاده می‌توان به کنترل‌کننده‌های کلاسیک خطی مانند کنترل‌کننده‌های خانواده PID، کنترل بهینه و پیش‌بین مدل، انواع کنترل‌کننده‌های غیرخطی مانند روش‌های مبتنی بر مود لغزشی [۱، ۲]، پسگام و تطبیقی و نیز کنترل‌گرهای هوشمند مبتنی بر شبکه‌های عصبی و منطق فازی اشاره نمود [۳]. موارد دیگری نیز از ترکیب چند مورد از کنترل‌کننده‌های مذکور ارائه شده‌اند تا چالش‌های موجود را به شکل بهتری حل نمایند.

در سال‌های اخیر توسعه منظومه‌های ماهواره‌ای که با افزایش تعداد ماهواره‌ها و کاهش اندازه آنها همراه بوده و در مدارهای ارتفاع پایین مستقر می‌شوند، افزایش یافته است. این توسعه فضایی با چالش وجود انواع اغتشاشات محیطی که بر عملکرد ماهواره‌ها تأثیر می‌گذارد مواجه است. کاهش اندازه ماهواره‌ها، موجب کاهش منابع انرژی آنها و افزایش تعداد ماهواره‌ها موجب افزایش هزینه‌های پیاده‌سازی می‌گردد. با حذف برخی از حسگرها مانند حسگرهای اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای می‌توان در هزینه پیاده‌سازی عملی سیستم کنترل وضعیت صرفه‌جویی قابل ملاحظه‌ای نمود و در عین حال، با استفاده از رویکردهای کنترلی «فیدبک خروجی» که مبتنی بر طراحی رویتگرها هستند دقت کنترل‌کننده را بهبود بخشید. این موضوع دلیلی بر این واقعیت است که بسیاری از پژوهش‌های انجام‌شده چند سال اخیر در خصوص کنترل وضعیت ماهواره‌ها بر پایه روش‌های فیدبک خروجی و بدون نیاز به اندازه‌گیری سرعت‌های زاویه‌ای انجام گرفته است.

در این رویکرد انواع رویتگرهای تخمین حالت‌های سیستم مورد استفاده قرار گرفته‌اند که از آن جمله می‌توان به پژوهش‌های انجام‌شده در مراجع [۱، ۴، ۵] اشاره نمود. همچنین وجود انواع اغتشاشات محیطی و عدم قطعیت‌های دینامیکی موجب می‌شود طراحی کنترل‌کننده‌های مقاوم در برابر این نامعینی‌ها بسیار ضروری باشد. روش کنترل مود لغزشی به دلیل فرآیند طراحی ساده، پاسخ دینامیکی سریع و مقاوم بودنش در برابر نامعینی‌ها (اغتشاشات خارجی و عدم قطعیت‌ها) به گزینه‌ای محبوب در طراحی سیستم‌های کنترل وضعیت تبدیل شده و در مطالعات متعددی مورد استفاده قرار گرفته است. اصول طراحی کنترل‌کننده‌های مبتنی بر مود لغزشی در مراجع [۶، ۷] قابل دسترس است.

با توضیحاتی که بیان شد در این مقاله قصد داریم به مسئله مجاورت دو ماهواره که در آن کنترل هم‌زمان وضعیت و فاصله صورت می‌گیرد بپردازیم. برای این منظور از رویکرد فیدبک خروجی و طراحی رویتگر اغتشاش زمان-ثابت بهره گرفته شده و نهایتاً یک کنترل گر مود لغزشی زمان-ثابت برای هدف مفروض طراحی می‌شود. بر اساس دانش نویسندگان این رویکرد که مبتنی بر رویتگر اغتشاش برای تخمین نامعینی‌های پارامتری و غیرپارامتری در کنترل گر مود لغزشی زمان-ثابت است اولین بار برای حل مسئله مجاورت هم‌زمان وضعیت و فاصله دو ماهواره استفاده می‌شود.

۲- دینامیک ماهواره‌های تعقیب‌کننده و تعقیب‌شونده

مسئله کنترلی مورد بررسی به این صورت است که ماهواره تعقیب‌گر یک ماهواره هدف غیرهمکار را در حضور اغتشاشات خارجی و عدم قطعیت‌های پارامتری دنبال می‌کند. مدل دینامیکی دو ماهواره در ادامه ارائه می‌شود. دستگاه‌های مختصاتی که حرکت ماهواره‌ها در آن توصیف شده‌اند در شکل (۱) نشان داده شده است.

توصیف حرکت دورانی هریک از ماهواره‌ها با پارامترهای رودریگز پیراسته (MRP) بیان می‌شود [۸]. آنگاه، سینماتیک و دینامیک ماهواره تعقیب‌گر در دستگاه مختصات متصل به خود F_c به شکل زیر خواهد بود [۹]:

$$\begin{cases} \dot{r} = v - S(\omega)r \\ m\dot{v} + mS(\omega)v + m\mu r = f + d_{cf} \\ \dot{\sigma} = Q(\sigma)\omega \\ J\dot{\omega} + S(\omega)J\omega = \tau + d_{ct} \end{cases} \quad (1)$$

که اینجا $r \in R^3$ بردار موقعیت، $\sigma \in R^3$ پارامترهای رودریگز پیراسته، $v \in R^3$ سرعت خطی و $\omega \in R^3$ سرعت زاویه‌ای، $f, \tau \in R^3$ به ترتیب نیرو و گشتاور کنترلی و $d_{cf}, d_{ct} \in R^3$ نیرو و گشتاور اغتشاش است. $m \in R$ جرم تعقیب‌گر و $J \in R^{3 \times 3}$ ماتریس اینرسی آن در دستگاه متصل به تعقیب‌گر، $\mu = \mu_g / \|r\|^3$ و μ_g ثابت گرانشی زمین است. همچنین $S(\omega)$ ماتریس پادمتقارن متشکل از عناصر بردار سرعت زاویه‌ای و $Q(\sigma) = [(1 - \sigma^T \sigma)I_3 + 2S(\sigma) + 2\sigma\sigma^T] / 4$ مربوط به توصیف دوران ماهواره نسبت به زمین تحت پارامترهای رودریگز پیراسته است.

به‌طور مشابه، معادلات سینماتیکی و دینامیکی ماهواره هدف که در دستگاه مختصات متصل به خود F_t توصیف می‌شود به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{r}_t = v_t - S(\omega_t)r_t \\ m_t\dot{v}_t + m_tS(\omega_t)v_t + m_t\mu r_t = d_{tf} \\ \dot{\sigma}_t = Q(\sigma_t)\omega_t \\ J_t\dot{\omega}_t + S(\omega_t)J_t\omega_t = d_{tt} \end{cases} \quad (2)$$

این معادلات دقیقاً مشابه با معادلات بیان‌شده برای ماهواره تعقیب‌گر است با این تفاوت که اندازه‌گیری‌ها و توصیفات در دستگاه متصل به همان ماهواره (یعنی ماهواره هدف) صورت می‌گیرد. این تمایز با زیرنویس t که به هر یک از کمیت‌های موجود در معادلات اضافه شده مشخص گردیده است. تفاوت دیگر در عدم وجود نیرو و گشتاور کنترلی در معادلات دینامیکی آن است که به دلیل غیرهمکار بودن ماهواره هدف می‌باشد. همچنین، عبارت‌های $d_{tf}, d_{tt}, d_{cf}, d_{ct}$ بیان‌گر اغتشاشات فضایی است که به‌طور مشابه (نه یکسان) به هر یک از دو ماهواره وارد می‌شود. اغتشاشات فضایی مواردی مانند کشیدگی جوی، تابش خورشیدی، توزیع جرم زمین و نیروهای اغتشاشی جسم سوم هستند [۱۰]. گشتاور گرادیان گرانشی نیز به‌عنوان اغتشاش در نظر گرفته می‌شود که در d_{ct} و d_{tt} گنجانده شده است.

۳- دینامیک نسبی شش درجه آزادی جفت‌شده

جهت‌گیری نسبی بین دو ماهواره با تعریف پارامترهای رودریگز نسبی σ_e به‌صورت زیر وضع می‌شود [۸]:

$$\sigma_e = \frac{\sigma_t(\sigma_t^T \sigma - 1) + \sigma(1 - \sigma_t^T \sigma_t) - 2S(\sigma_t)\sigma}{1 + \sigma_t^T \sigma_t \sigma^T \sigma + 2\sigma_t^T \sigma} \quad (3)$$

آنگاه ماتریس دوران از F_t به F_c به صورت زیر قابل تعریف است:

$$R = I_3 - \frac{4(1 - \sigma_e^T \sigma_e)}{(1 + \sigma_e^T \sigma_e)^2} S(\sigma_e) + \frac{8}{(1 + \sigma_e^T \sigma_e)^2} S^2(\sigma_e) \quad (4)$$

مکان نسبی و سرعت‌های خطی و زاویه‌ای نسبی بین دو ماهواره که در چارچوب تعقیب‌کننده F_c بیان شوند، به ترتیب عبارت خواهند بود از:

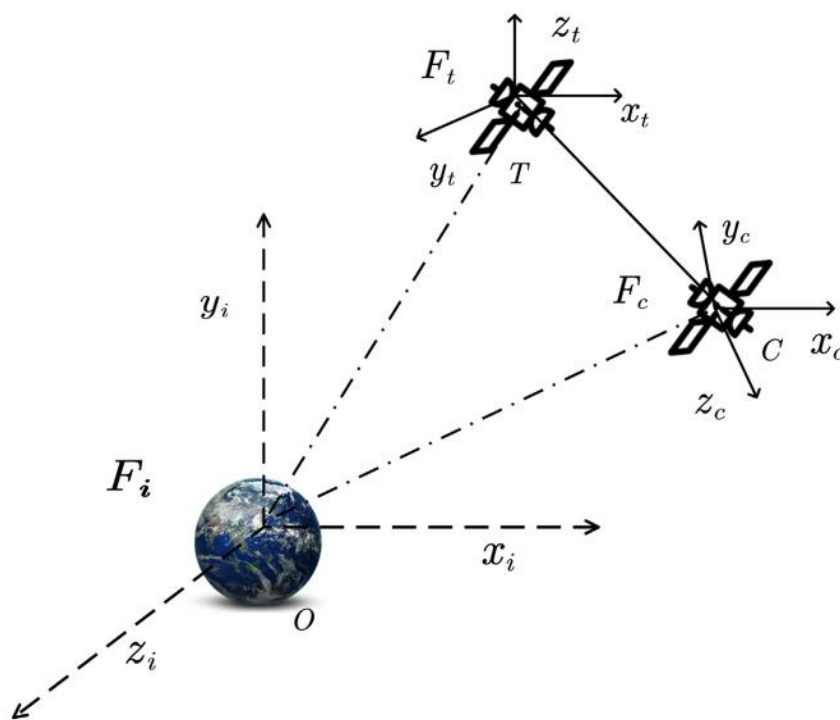
$$r_e = r - Rr_t, \quad v_e = v - Rv_t, \quad \omega_e = \omega - R\omega_t \quad (5)$$

با جایگزینی معادلات (5) در معادله (1)، معادلات حرکت نسبی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_e = Q(\sigma_e)\omega_e \\ J\dot{\omega}_e = -S(\omega_e)J\omega_e - J(R\dot{\omega}_t + S(\omega_e)\omega_e) + \tau + d_{ct} \\ \dot{r}_e = v_e - S(\omega_e)r_e \\ m\dot{v}_e = -m[S(\omega_e)v + \mu r] + mS(\omega_e)(v - v_e) - mR\dot{v}_t + f + d_{cf} \end{cases} \quad (6)$$

که در استخراج آن از روابط حاکم بر ماتریس‌های دوران و سرعت زاویه‌ای به شرح زیر استفاده شده است:

$$\begin{cases} \dot{R} = -S(\omega_e)R \\ RS(a) = S(Ra)R, \quad a \in R^3 \end{cases} \quad (7)$$



شکل ۱- تصویر کلی از مکان و وضعیت دو ماهواره در فضا نسبت به هم

ماتریس $Q(\sigma_e) = [(1 - \sigma_e^T \sigma_e)I_3 + 2S(\sigma_e) + 2\sigma_e \sigma_e^T] / 4$ نامنفرد است [۸]. با استفاده از معادله‌های (۲)، (۵)، (۶) و (۷)، $\dot{\omega}_t$ و $R\dot{v}_t$ را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$R\dot{v}_t = -S(\omega - \omega_e)(v - v_e) + \frac{Rd_{tf}}{m_t} - \frac{\mu_g}{\|R^T(r - r_e)\|^3}(r - r_e) \quad (۸)$$

$$\dot{\omega}_t = -J_t^{-1}S(R^T(\omega - \omega_e))J_t R^T(\omega - \omega_e) + J_t^{-1}d_{t\tau} \quad (۹)$$

با جایگزینی معادله‌های (۸) و (۹) در معادله (۶)، معادلات نهایی حرکت نسبی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_e = Q(\sigma_e)\omega_e \\ \dot{\omega}_e = -J^{-1}S(\omega)J\omega - S(\omega)\omega_e + J^{-1}\tau + c_1 + d_1 \\ \dot{r}_e = v_e - S(\omega)r_e \\ \dot{v}_e = m^{-1}f + c_2 + d_2 \end{cases} \quad (۱۰)$$

که در آن d_2, d_1, c_2, c_1 به ترتیب جفت‌شدگی‌های سینماتیکی و اغتشاشات خارجی را نمایندگی می‌کنند و در عبارتهای زیر جمع شده‌اند:

$$\begin{cases} c_1 = RJ_t^{-1}S(R^T(\omega - \omega_e))J_t R^T(\omega - \omega_e) \\ d_1 = J^{-1}d_{c\tau} - RJ_t^{-1}d_{t\tau} \\ c_2 = -S(\omega)v_e - \mu r + \frac{\mu_g}{\|R^T(r - r_e)\|^3}(r - r_e) \\ d_2 = \frac{d_{cf}}{m} - \frac{Rd_{tf}}{m_t} \end{cases} \quad (۱۱)$$

با توجه به اینکه فضایی‌های هدف غیرهمکار است، فقط اطلاعات ماهواره تعقیب‌کننده و اطلاعات نسبی بین دو ماهواره می‌تواند برای طراحی کنترل‌کننده استفاده شود. علاوه بر اغتشاشات خارجی، باید عدم قطعیت در پارامترهای ماهواره تعقیب‌کننده را نیز در نظر گرفت. جرم و ماتریس اینرسی ماهواره تعقیب‌کننده با ملاحظه عدم قطعیت‌ها به صورت $m = m_0 + \Delta m$ و $J = J_0 + \Delta J$ هستند.

اکنون از عبارات اول و سوم معادله (۱۰)، نسبت به زمان مشتق می‌گیریم تا معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم زیر حاصل شوند [۱۱]:

$$\ddot{\sigma}_e = -Q_e \dot{Q}_e^{-1} \dot{\sigma}_e - Q_e J^{-1} S(\omega) J \omega - Q_e S(\omega) \omega_e + Q_e (c_1 + d_1 + J^{-1} \tau) \quad (۱۲)$$

$$\ddot{r}_e = c_2 + d_2 + m^{-1} f - S(\omega) \dot{r}_e + S(r_e) J^{-1} (\tau + d_{c\tau} - S(\omega) J \omega) \quad (۱۳)$$

که در آن، $Q_e \equiv Q(\sigma_e)$ ، $\dot{Q}_e^{-1} = -Q_e^{-1}\dot{Q}_e Q_e^{-1}$ و \dot{Q}_e به شکل زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_e = & \frac{8}{(1 + \sigma_e^T \sigma_e)^2} [\dot{\sigma}_e \sigma_e^T + \sigma_e \dot{\sigma}_e^T - \dot{\sigma}_e^T \sigma_e I_3 - S(\dot{\sigma}_e)] \\ & - \frac{16 \dot{\sigma}_e^T \sigma_e}{(1 + \sigma_e^T \sigma_e)^3} [(1 + \sigma_e^T \sigma_e) I_3 - 2S(\sigma_e) + 2\sigma_e \sigma_e^T] \end{aligned} \quad (14)$$

با تعریف $\Delta J^{-1} \triangleq J^{-1} - J_0^{-1}$ ، از معادله (۱۲) و معادله (۱۳)، معادلات ساده‌شده به شرح زیر هستند:

$$\begin{cases} \ddot{\sigma}_e = h_a + Q(\sigma_e) J_o^{-1} \tau + d_a \\ \ddot{i}_e = h_b + S(r_e) J_o^{-1} \tau + m_o^{-1} f + d_b \end{cases} \quad (15)$$

که در آن d_b, d_a, h_b, h_a به ترتیب دینامیک خودگردان (فارغ از عمل کنترلی) و مجموع نامعینی‌ها را نمایندگی می‌کنند و به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{cases} h_a = \dot{Q}_e \omega_e - Q_e J_o^{-1} S(\omega) J_o \omega - Q_e S(\omega) \omega_e \\ d_a = Q_e [c_1 + d_1 + \Delta J^{-1} \tau - J_o^{-1} S(\omega) \Delta J \omega - \Delta J^{-1} S(\omega) J \omega] \\ h_b = c_2 - S(\omega) \dot{r}_e - S(r_e) J_o^{-1} S(\omega) J_o \omega \\ d_b = d_2 + S(r_e) J^{-1} d_{ct} + \Delta m^{-1} f + S(r_e) \Delta J^{-1} \tau \\ \quad - S(r_e) J_o^{-1} S(\omega) \Delta J \omega - S(r_e) \Delta J^{-1} S(\omega) J \omega \end{cases} \quad (16)$$

معادله (۱۵) نشان می‌دهد که حرکت نسبی انتقالی بین دو ماهواره تحت تأثیر حرکت نسبی دورانی قرار دارد. با فرض اینکه $r_d \in R^3$ موقعیت نسبی مورد انتظار است که در F_c بیان شده و $\tilde{r}_e = r_e - r_d$ و $e_1 = [\tilde{r} \ \sigma_e]^T$ و $e_2 = [\dot{\tilde{r}}_e \ \dot{\sigma}_e]^T$ باشند، دینامیک خطای نسبی جفت‌شده که دارای ۶ درجه آزادی است به صورت زیر در شکل فضای حالت بازنویسی می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = H + G_c u + d \end{cases} \quad (17)$$

که در آن $u = [f \ \tau]^T$ بردار ورودی کنترل، $d = [d_b \ d_a]^T$ نمایانگر نامعینی‌ها، $H = [h_b - \dot{r}_d \ h_a]^T$ دینامیک خودگردان غیرخطی و G_c به شکل زیر است:

$$G_c = \begin{bmatrix} (1/m_o) I_3 & S(r_e) J_o^{-1} \\ O_3 & Q(\sigma_e) J_o^{-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

فرضیه ۱: اغتشاش کلی d محدود فرض می‌شود که در نامعادله $\|d\| \leq d_L$ با ثابت نامعلوم d_L ، صدق می‌کند. این فرض برای مأموریت‌های پهلوگیری منطقی است. مشتق اول از اغتشاش کلی محدود است؛ به این معنی

که مشتقات اول حالت‌ها نیز محدود هستند. اغتشاشات خارجی همگی محدود هستند و نامعینی‌های Δm و ΔJ نیز محدود می‌باشند. تحت این شرایط سیستم ماهواره پایدارشدنی است [۱۱].

فرضیه ۲: ماهواره تعقیب‌کننده می‌تواند متغیرهای حرکتی خود (نسبت به زمین) و متغیرهای نسبی (نسبت به هدف) را به صورت مستقیم اندازه‌گیری کند. دقت و سرعت اندازه‌گیری به اندازه کافی بالا فرض می‌شود، بنابراین خطای اندازه‌گیری قابل چشم‌پوشی است [۹].

۴- طراحی رویتر اغتشاش زمان-ثابت (FTDO)

رویتر اغتشاش زمان-ثابت یک رویکرد در طراحی سیستم‌های کنترل است که هدف آن تخمین‌زنی و جبران سازی اثرات اغتشاشات ناخواسته در مدت زمان محدود و مستقل از مقادیر اولیه حالت‌های سیستم می‌باشد. این رویترها به‌طور خاص برای تضمین عملکرد سریع و قابل پیش‌بینی سیستم‌های کنترل در برابر اغتشاشات خارجی طراحی می‌شوند؛ به‌گونه‌ای که زمان لازم برای رسیدن به دقت مورد نظر نه‌تنها محدود، بلکه قبل از شروع عملیات نیز مشخص باشد. در این مقاله رویتر اغتشاش زمان-ثابت (FTDO) به‌منظور تخمین‌زدن اغتشاشات تجمیعی در معادله (۱۷) طراحی می‌شود.

۴-۱- مقدمات

یک سیستم دینامیکی غیرخطی مرتبه دوم تک ورودی-تک خروجی را در نظر می‌گیریم [۱۲]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + bu + d(t) \end{cases} \quad (19)$$

x_i ($i = 1, 2$) نماینده حالت‌های سیستم است، $f(x_1, x_2)$ یک تابع شناخته‌شده است که به فضای C^2 تعلق دارد و نسبت به متغیرهای x_i ($i = 1, 2$) یک تابع لیبشیتز در نظر گرفته می‌شود، $d(t)$ نشان‌دهنده اغتشاش تجمیعی است که شامل عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات خارجی است، b نشان‌دهنده بهره کنترلی و u نشان‌دهنده ورودی کنترلی است.

قضیه ۱. فرض کنید $V(x)$ یک تابع هموار و مثبت معین بر روی $U \subset R^n$ است و معادله دیفرانسیلی زیر را برآورده می‌کند [۱۳]:

$$\dot{V}(x) + \beta_1 V(x) + \beta_2 V^\chi(x) \leq 0 \quad (20)$$

که در آن $0 < \chi < 1$ و $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ ضرایب ثابتی هستند. آنگاه به ازای هر t_0 داده‌شده، یک ناحیه $U_0 \subset R^n$ وجود دارد؛ به‌طوری که هر تابع $V(x)$ که از U_0 شروع شود می‌تواند در زمان محدود به مقدار نهایی $V(x) = 0$ برسد و زمان رسیدن، t_r از معادله زیر پیروی می‌کند:

$$t_r = t_0 + \frac{1}{\beta_1(1-\chi)} \ln \left(\frac{\beta_1 V^{1-\chi}(x_0) + \beta_2}{\beta_2} \right) \quad (21)$$

۴-۲- طراحی رویت‌گر

اغتاشات تجمیعی $d(t)$ را می‌توان به‌عنوان یک متغیر حالت توسعه‌یافته در نظر گرفت، یعنی $x_3 = d(t)$ و حالت‌های سیستم را به $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ توسعه داد. اگر $h(t)$ به‌عنوان مشتق زمانی x_3 گرفته شود، سیستم (۱۹) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود [۱۲]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + bu + x_3 \\ \dot{x}_3 = h(t) \end{cases} \quad (22)$$

یک رویت‌گر حالت توسعه‌یافته زمان-محدود برای سیستم (۲۲) به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = k_1 \phi(\tilde{x}_1) + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 = k_2 \vartheta(\tilde{x}_1) \phi(\tilde{x}_1) + f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \hat{x}_3 + bu \\ \dot{\hat{x}}_3 = k_3 \vartheta(\tilde{x}_1) \phi(\tilde{x}_1) \end{cases} \quad (23)$$

در معادله فوق $\phi(\tilde{x}_1) = \text{sig}^{0.5}(\tilde{x}_1) + \lambda \text{sig}^\alpha(\tilde{x}_1)$ و $\vartheta(\tilde{x}_1) = 0.5|\tilde{x}_1|^{-0.5} + \alpha\lambda|\tilde{x}_1|^{\alpha-1}\hat{x}_3$ همچنین $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ به ترتیب تخمین حالت‌های x_1, x_2, x_3 و نیز $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ خطاهای متناظر آنها هستند. $\alpha > 1$ و $\lambda > 0$ ضرایب تنظیم‌پذیر رویت‌گر و k_1, k_2, k_3 ضرایب بهره‌ی رویت‌گر می‌باشند. به این ترتیب، دینامیک خطای تخمین رویت‌گر عبارت خواهد بود از:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -k_1 \phi(\tilde{x}_1) + \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -k_2 \vartheta(\tilde{x}_1) \phi(\tilde{x}_1) + \tilde{f} + \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = -k_3 \vartheta(\tilde{x}_1) \phi(\tilde{x}_1) \end{cases} \quad (24)$$

که $\tilde{f} = f(x_1, x_2) - f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. انتظار داریم با میل کردن مقادیر تخمین به مقادیر واقعی حالت‌ها، تغییرات مقادیر خطای آنها تحت دینامیک بالا به صفر همگرا شود. برای تحلیل پایداری همگرایی رویت‌گر پیشنهادی، یک بردار جدید به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3]^T = [\phi(\tilde{x}_1) \ \tilde{x}_2 \ \tilde{x}_3]^T \quad (25)$$

بر اساس تساوی $\zeta_1 = \phi(\tilde{x}_1)$ ، مشتق ζ_1 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\dot{\zeta}_1 = \dot{\phi}(\tilde{x}_1) = (0.5|\tilde{x}_1|^{-0.5} + \alpha\lambda_1|\tilde{x}_1|^{\alpha-1})\dot{\tilde{x}}_1 = \vartheta(\tilde{x}_1)\dot{\tilde{x}}_1 \quad (26)$$

بر اساس معادله (۲۴)، معادله (۲۵) و معادله (۲۶)، نتیجه می‌شود:

$$\dot{\zeta} = \vartheta(\tilde{x}_1)(A\zeta + B\bar{h}) + F \quad (27)$$

که $F = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{f} \\ (\varepsilon(\tilde{x}_1) - 1)\tilde{x}_3 \end{bmatrix}$ ، $\bar{h} = \frac{h(t)}{\vartheta(\tilde{x}_1)}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و نیز داریم:

$$\varepsilon(\tilde{x}_1) = \frac{1}{\vartheta(\tilde{x}_1)} = \frac{1}{0.5|\tilde{x}_1|^{-0.5} + \alpha\lambda|\tilde{x}_1|^{\alpha-1}} \quad (28)$$

با استفاده از مشتق اول و مشتق دوم $\varepsilon(\tilde{x}_1)$ ، می‌توان به راحتی ثابت کرد که $\varepsilon(\tilde{x}_1)$ محدود است؛ به این معنی که عبارت $\varepsilon(\tilde{x}_1)$ شرایط $0 < \varepsilon(\tilde{x}_1) < \delta$ را برآورده می‌کند که در اینجا δ یک مقدار ثابت است و به ضرایب α و λ وابسته است.

قضیه ۲. خطاهای تخمین رویت گر توسعه یافته زمان-ثابت طراحی شده، \tilde{x}_2 ، \tilde{x}_1 و \tilde{x}_3 ، در صورتی به صفر همگرا خواهند شد که ضرایب بهره k_1 ، k_2 و k_3 به نحوی انتخاب شوند که ماتریس متقارن $P = P^T$ در معادله زیر صدق کند:

$$A^T P + PA + PBB^T P + 4C^T C + \delta I = 0 \quad (29)$$

که در آن δ یک ثابت مثبت است و $C = [1 \ 0 \ 0]$.
اثبات: یک تابع لیاپانوف به صورت زیر در نظر رفته می‌شود:

$$V = \zeta^T P \zeta \quad (30)$$

نامساوی زیر به وضوح برقرار است:

$$|\vartheta(\tilde{x}_1)\zeta_1| = 0.5 + (0.5 + \alpha)\lambda|\tilde{x}_1|^{\alpha-0.5} + \alpha\lambda^2|\tilde{x}_1|^{2\alpha-1} \geq 0.5 \quad (31)$$

با توجه به نامساوی (۳۱)، نتیجه می‌شود که:

$$\bar{h} = \frac{h(t)}{\vartheta(\tilde{x}_1)} \leq \frac{h(t)}{\vartheta(\tilde{x}_1)\zeta_1} |\zeta_1| \leq 2|\zeta_1| = 2|C\zeta| \quad (32)$$

با توجه به تعریف نرم اقلیدسی، نتیجه می‌شود:

$$\|\zeta\|^2 = [\phi(\tilde{x}_1)]^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2 \geq c_\lambda^2 |\tilde{x}_1|^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2 \quad (33)$$

که $c_\lambda = \min\{1, \lambda_1\}$ و $\|\bullet\|$ نرم اقلیدسی • است. از آنجا که تابع $f(x_1, x_2)$ لیپشیتز است، مجموعه‌ای از ثابت‌های مثبت شناخته شده c_i ($i = 1, 2$) وجود دارد که شرایط لیپشیتز را برآورده می‌کند، یعنی:

$$|\tilde{f}| \leq c_1 |\tilde{x}_1| + c_2 |\tilde{x}_2| \quad (34)$$

با توجه به نامساوی‌های (33) و (34)، یک ثابت مثبت c_ζ وجود دارد به طوری که:

$$\|F\|^2 = \|[0 \quad \tilde{f} \quad (\varepsilon(\tilde{x}_1) - 1)\tilde{x}_3]^T\|^2 \leq 2c_1^2 |\tilde{x}_1|^2 + 2c_2^2 |\tilde{x}_2|^2 + c_\varepsilon^2 |\tilde{x}_3|^2 \leq c_\zeta^2 \|\zeta\|^2 \quad (35)$$

که $c_\varepsilon = \max\{|\varepsilon(\tilde{x}_1) - 1|\}, c_\zeta = \max\{\frac{\sqrt{2}c_1}{c_\lambda}, \sqrt{2}c_2, c_\varepsilon\}$ با استفاده از معادلات (27)، (30)، (32) و (35)، مشتق زمانی V به صورت محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \zeta^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} \\ &= \vartheta(\tilde{x}_1) [\zeta^T (A^T P + PA) \zeta + 2\zeta^T P B \bar{h} + 2\zeta^T P F] \\ &\leq \vartheta(\tilde{x}_1) [\zeta^T (A^T P + PA) \zeta + \zeta^T P B^T B P \zeta + |\bar{h}|^2 + 2c_\zeta \|P\| \|\zeta\|^2] \\ &\leq \vartheta(\tilde{x}_1) [\zeta^T (A^T P + PA + P B^T B P + 4C^T C) \zeta + 2c_\zeta \|P\| \|\zeta\|^2] \end{aligned} \quad (36)$$

می‌دانیم نامساوی زیر برای ماتریس‌های مثبت معین برقرار است:

$$\lambda_{\min}(P) \|\zeta\|^2 \leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max}(P) \|\zeta\|^2 \quad (37)$$

همچنین بر اساس تعریف نرم اقلیدسی، بدیهی است که:

$$\|\zeta\|^2 = [\phi(\tilde{x}_1)]^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2 \geq [\phi(\tilde{x}_1)]^2 \geq \lambda_1^2 |\tilde{x}_1|^{2\alpha} \quad (38)$$

بنابراین، با توجه به نامساوی‌های (37) و (38)، نامساوی زیر برقرار است:

$$\lambda_1^2 |\tilde{x}_1|^{2\alpha} \leq \|\zeta\|^2 \leq \frac{V}{\lambda_{\min}(P)} \quad (39)$$

و از نامساوی فوق به دست می‌آید:

$$|\tilde{x}_1| \leq \left(\frac{V}{\lambda_1^2 \lambda_{\min}(P)} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \quad (40)$$

$$|\tilde{x}_1|^{-0.5} \geq \left(\frac{V}{\lambda_1^2 \lambda_{\min}(P)} \right)^{-\frac{1}{4\alpha}} \quad (41)$$

با جایگزینی تساوی $\vartheta(\tilde{x}_1) = 0.5|\tilde{x}_1|^{-0.5} + \alpha\lambda_1|\tilde{x}_1|^{\alpha-1}$ در نامساوی (۳۶) و با توجه به نامساوی (۳۷) و (۴۱)، نامساوی (۳۶) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(\delta - 2c_\zeta \|P\|)\vartheta(\tilde{x}_1) \|\zeta\|^2 \\ &\leq -(\delta - 2c_\zeta \|P\|) \left(\frac{1}{2}|\tilde{x}_1|^{-0.5} + \alpha\lambda_1|\tilde{x}_1|^{\alpha-1} \right) \frac{V}{\lambda_{\max}(P)} \\ &\leq (\delta - 2c_\zeta \|P\|) \left(-\chi_1 V^{\frac{4\alpha-1}{4\alpha}} - \chi_2 V \right) \end{aligned} \quad (42)$$

که در نامساوی بالا $\chi_1 = \frac{\lambda_1^{\frac{1}{2}\alpha} |\lambda_{\min}(P)|^{\frac{1}{4\alpha}}}{2\lambda_{\max}(P)}$ ، $\chi_2 = \frac{\alpha\lambda_1|\tilde{x}_1|^{\alpha-1}}{\lambda_{\max}(P)}$ مفروض شده‌اند. در نتیجه، با توجه به قضیه (۱)، اگر ضرایب به گونه‌ای انتخاب شوند که شرط $\delta > 2c_\zeta \|P\|$ را برآورده کند، مشتق تابع لیاپانوف منفی بوده و بنابراین خطاهای تخمین در زمان محدود به صفر می‌رسند.

۵- طراحی کنترل کننده مودلغزشی زمان-معین مبتنی بر FTDO

هدف این طراحی ایجاد یک ساختار کنترلی است که بتواند اغتشاشات را در زمان معین تخمین زده و سپس جبران کند. این ساختار بر اساس کنترل مود لغزشی ایجاد بنا می‌شود و می‌بایست قطع نظر از شرایط اولیه تحول سیستم را در یک بازه زمانی ثابت و در محدوده معین حفظ کند. این رویکرد در کنترل‌های صنعتی برای بهبود دقت و قابلیت اطمینان استفاده شده است [۱۴].

۵-۱- طراحی سطح لغزشی زمان-ثابت (FTSS)

هدف کنترلی در اینجا این است که e_1 و e_2 از معادله (۱۷) بتوانند در زمان معین به ناحیه کوچکی همگرا شوند. در ابتدا، یک سطح لغزشی مانند زیر طراحی می‌شود:

$$s = e_2 + \mu_1[e_1]^{2-\beta} + \mu_2 e_1 + \mu_3[e_1]^\beta \quad (43)$$

که در آن $[z]^\beta = |z|^\beta \text{sign}(z)$ بردار سطوح لغزش است، μ_1, μ_2, μ_3 ضرایب مثبت هستند و $0 < \beta < 1$. بر اساس نظریه کنترل مود لغزشی، هنگامی که خطای ردگیری موقعیت در حالت (مود) لغزش عمل کند، معادلات زیر برآورده می‌شوند [۱۵]:

$$s = 0 \text{ و } \dot{s} = 0 \quad (44)$$

⁴ Fixed-Time Sliding Surface

از معادلات (۴۳) و (۴۴)، دینامیک حالت لغزش به صورت زیر داده می شود:

$$e_2 = -\mu_1[e_1]^{2-\beta} - \mu_2 e_1 - \mu_3[e_1]^\beta \quad (45)$$

معادله (۴۵) شکل مشابهی با معادله (۱۴) در مرجع [۱۶] دارد. بنابراین، با استناد به روش اثبات ارائه شده ذیل قضیه (۱) در آن مرجع، می توان نتیجه یکسانی به دست می آید که بیان می کند سطح لغزش پیشنهادی در (۴۳) قادر است دینامیک خطا را در زمان ثابت به صفر همگرا کند و این زمان ثابت برابر است با:

$$T_s \leq \frac{2}{(1-\beta)\sqrt{4\mu_1\mu_3 - \mu_2^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\mu_2}{\sqrt{4\mu_1\mu_3 - \mu_2^2}} \right) \right) \quad (46)$$

۵-۲- طراحی کنترل کننده مبتنی بر رویت گر اغتشاش

کنترل کننده پیشنهادی ما در این مقاله از ترکیب رویت گر طراحی شده در بخش (۴)، معادله (۲۳) و روش کنترل مود لغزشی با سطح لغزش ارائه شده در (۴۳) شکل می گیرد که هر دو همگرایی در زمان ثابت را تضمین می کنند. به این صورت قانون کنترلی را به صورت زیر در نظر می گیریم [۱۴]:

$$u = u_{eq} + u_{sw} + u_o \quad (47)$$

در اینجا، جمله کنترل u_{eq} خطاهای حالت را روی سطوح لغزشی حفظ می کند. برای بدست آوردن این عبارت، مشتق زمانی سطوح لغزشی را محاسبه و برابر صفر قرار می دهیم؛ یعنی $\dot{s} = 0$ و آنگاه با استفاده از دینامیک نامی سیستم؛ یعنی دینامیک سیستم بدون حضور اغتشاش و عدم قطعیت ها u_{eq} را به صورت زیر محاسبه می نماییم:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{e}_2 + (2-\beta)\mu_1|e_1|^{1-\beta}e_2 + \mu_2e_2 + \beta\mu_3|e_1|^{\beta-1}e_2 \\ &= \ddot{e}_d - H - G_c^{-1}u - d \\ &+ (2-\beta)\mu_1|e_1|^{1-\beta}e_2 + \mu_2e_2 + \beta\mu_3|e_1|^{\beta-1}e_2 \end{aligned} \quad (48)$$

با صفر قرار دادن این عبارت خواهیم داشت:

$$u_{eq} = G_c^{-1}(\ddot{e}_d - H + (2-\beta)\mu_1|e_1|^{1-\beta}e_2 + \mu_2e_2 + \beta\mu_3|e_1|^{\beta-1}e_2) \quad (49)$$

علاوه بر این، یک قانون کنترل کلیدزنی زمان-ثابت (FTSCL^۵) به صورت زیر ساخته می شود تا خطاهای حالت را در مرحله رسیدن (به روی سطوح لغزش) کنترل کند:

⁵ Finite-Time Switching Control Law

$$u_{sw} = G_c^{-1}(\xi_0 \text{sign}(s) + \xi_1 [s]^p + \xi_2 [s]^q) \quad (50)$$

که در آن ξ_0, ξ_1, ξ_2 ضرایبی مثبت هستند و $0 < q < 1$ ، $p > 1$ ، همچنین برای ملاحظه اثرات اغتشاشی، کنترل u_0 بر اساس خروجی رویت گر به شرح زیر طراحی می‌شود:

$$u_0 = G_c^{-1}(\hat{d}) \quad (51)$$

سرانجام، قانون کنترل پیشنهادی u به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u &= u_{eq} + u_{sw} + u_0 \\ &= G_c^{-1}(\ddot{e}_d - H + (2 - \beta)\mu_1 |e_1|^{1-\beta} e_2 \\ &\quad + \mu_2 e_2 + \beta \mu_3 |e_1|^{\beta-1} e_2 + \xi_0 \text{sign}(s) + \xi_1 [s]^p + \xi_2 [s]^q + \hat{d}) \end{aligned} \quad (52)$$

قضیه ۳. برای سیستم دینامیکی معادله (۱۹)، اگر ورودی کنترلی مطابق معادله (۵۲) طراحی شود که از خروجی FTDO در معادله (۲۴)، FTSS در معادله (۴۳) و FTSCS در معادله (۵۰) ساخته شده است، آنگاه این سیستم پایدار فراگیر زمان-ثابت^۶ است.

اثبات. با جایگزینی قانون کنترل پیشنهادی معادله (۵۲) در معادله (۴۸) عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \hat{d} - d - \xi_0 \text{sign}(s) - \xi_1 [s]^p - \xi_2 [s]^q \\ &= \tilde{d} - \xi_0 \text{sign}(s) - \xi_1 [s]^p - \xi_2 [s]^q \end{aligned} \quad (53)$$

از معادله (۵۳)، یک جزء از s به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{s}_i = \tilde{d}_i - \xi_0 \text{sign}(s_i) - \xi_1 [s_i]^p - \xi_2 [s_i]^q, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (54)$$

برای بررسی پایداری زمان-ثابت سیستم کنترل پیشنهادی، به ازای هر جزء داده شده در (۵۴) یک تابع لیاپانوف به صورت $V_i = s_i^2$ انتخاب می‌شود. سپس، مشتق زمانی تابع لیاپانوف پیشنهادی به روش زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= 2s_i \dot{s}_i = 2s_i(\tilde{d}_i - \xi_0 \text{sign}(s_i) - \xi_1 [s_i]^p - \xi_2 [s_i]^q) \\ &\leq 2|s_i|(|\tilde{d}_i| - \xi_0) - 2\xi_1 |s_i|^{p+1} - 2\xi_2 |s_i|^{q+1} \\ &\leq -2\xi_1 |s_i|^{p+1} - 2\xi_2 |s_i|^{q+1} \end{aligned} \quad (55)$$

بنابراین برحسب دیدگاه لیاپانوف می‌توان نتیجه گرفت که سیستم کنترل پیشنهادی به طور فراگیر پایدار است زیرا $V_i > 0$ و $\dot{V}_i < 0$ بوده است. برای نشان دادن پایداری فراگیر زمان-ثابت سیستم کنترل پیشنهادی، معادله (۵۵) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

^۶ Globally fixed time stable

$$\dot{V}_i \leq -2\xi_1 |V_i|^{\frac{p+1}{2}} - 2\xi_2 |V_i|^{\frac{q+1}{2}} \quad (56)$$

لم ۱. (برگرفته از مرجع [۱۷]) معادله دیفرانسیل اسکالر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{y} = -a_1 [y]^m - a_2 [y]^n \quad (57)$$

جایی که $a_1, a_2 > 0$ ، $m > 1$ و $0 < n < 1$. آنگاه، سیستم (۵۷) پایدار زمان-ثابت است که کران بالایش از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T_1 < T_{\max} = \frac{1}{a_1} \frac{1}{m-1} + \frac{1}{a_2} \frac{1}{1-n} \quad (58)$$

از تطبیق (۵۶) با صورت لم (۱)، زمان رسیدن به مرحله رسیدن مطابق رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$T_r \leq \frac{1}{2\xi_1} \frac{2}{p-1} + \frac{1}{2\xi_2} \frac{2}{1-q} \quad (59)$$

از تجمیع زمان‌های همگرایی محاسبه‌شده در روابط (۲۱)، (۴۶) و (۵۹) کنترل گر پیشنهادی ما در زمان ثابت با کران زیر به صفر همگرا می‌شود:

$$T = T_s + T_r + T_o \quad (60)$$

۶- شبیه‌سازی و نتایج

برای بررسی عملکرد طرح کنترلی پیشنهادی یک مثال از مأموریت مجاورت ماهواره‌ای در مدار در نظر گرفته شده است. ماهواره‌های تعقیب‌کننده و هدف مشابه هم فرض می‌شوند. مقادیر عددی پارامترهای موجود در مدل حرکت نسبی و شرایط اولیه لازم ماهواره‌های تعقیب‌کننده و هدف، به صورت زیر فرض شده‌اند. بگیریم $\mu_g = GM_e$ و جرم زمین $M_e = 5974 \times 10^{24} \text{kg}$ و ثابت جهانی گرانش $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^2$. مؤلفه‌های نامی جرم و ماتریس اینرسی ماهواره تعقیب‌کننده و هدف مطابق مرجع [۱۸] به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} m_0 &= 60 \text{ kg}, \\ J_0 &= [45, 1.2, 0.9; 1.2, 20, 1.4; 0.9, 1.4, 17] \text{ (kg. m}^2\text{)} \\ m_t &= 5400 \text{ kg}, \\ J_t &= [3336, -135.4, -154.2; -135.4, 3184, -148.5; -154.2, -148.5, 2423] \text{ (kg. m}^2\text{)} \end{aligned}$$

موقعیت نسبی مطلوب به صورت $r_d = [0, 5, 0]^T \text{m}$ تعریف می‌شود. اغتشاشات خارجی که بر حرکت فاصله و جهت‌گیری نسبی تأثیر می‌گذارند، به شکل زیر فرض می‌شود:

$$d_{cf} = [2\sin(0.1t), 2\sin(0.2t), 2\sin(0.3t)]^T \text{ N}$$

$$d_{ct} = [0.02\sin(0.1t), 0.02\sin(0.2t), 0.02\sin(0.3t)]^T \text{ N.m}$$

از آنجا که فاصله بین تعقیب کننده و هدف نسبت به شعاع مدار ماهواره‌ها در مأموریت‌های پهلوگیری فضایی کوچک است؛ ما فرض می‌کنیم که $d_{ct} = d_{tt}$ و $d_{cf} = d_{tf}$ شرایط اولیه حالت‌های سیستم در جدول (۱) ارائه شده‌اند. شرایط اولیه رویتر اغتشاش زمان-ثابت مطابق زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\xi_1(0) = 0.01 \times [1,1,1,1,1,1]^T \quad \xi_2(0) = 0.02 \times [1,1,1,1,1,1]^T$$

پارامترهای طراحی به صورت زیر تنظیم شده‌اند:

$$r_1 = 0.6, \quad r_2 = 1.4, \quad \lambda_1 = 0.7, \quad \lambda_2 = 0.1, \quad \delta = 0.05$$

پارامترهای کنترل کننده که در معادله (۴۹) توصیف شده‌اند، به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$\alpha_1 = 0.01, \quad \beta_1 = 0.04, \quad g_1 = 2.0, \quad p_1 = 0.9$$

$$\alpha_2 = 0.10, \quad \beta_2 = 0.10, \quad g_2 = 1.1, \quad p_2 = 0.6$$

علاوه بر این، تابع علامت با یک تابع اشباع با شیب زیاد جایگزین می‌شود تا پدیده چترینگ کمتر شود. تابع اشباع به صورت زیر تعریف شده است:

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 100x, & |100x| \leq 1 \\ \text{sign}(x), & |100x| > 1 \end{cases}$$

نتایج شبیه‌سازی معادله (۱۷) تحت کنترل کننده معادله (۴۹) در شکل‌های (۲) تا (۶) نشان داده شده‌اند.

جدول ۱- مقادیر اولیه فاصله و جهت‌گیری

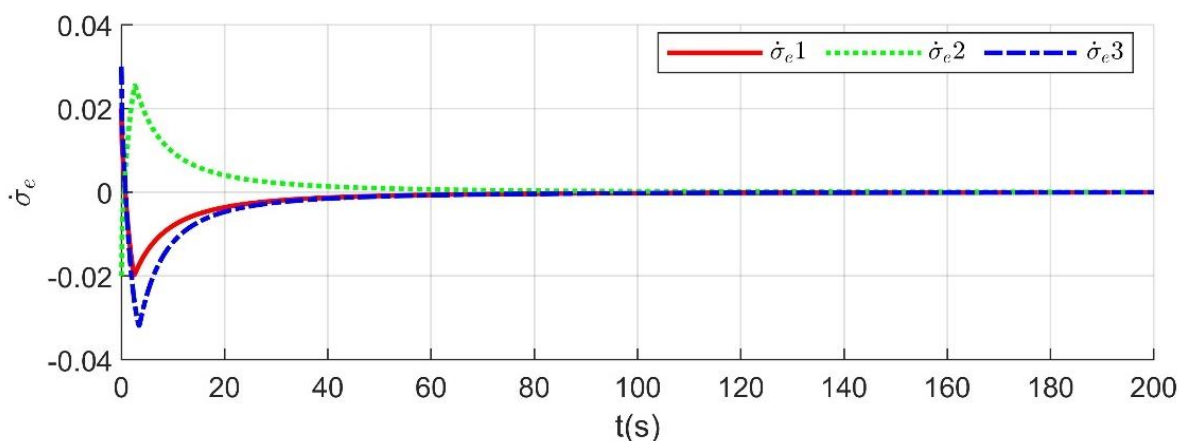
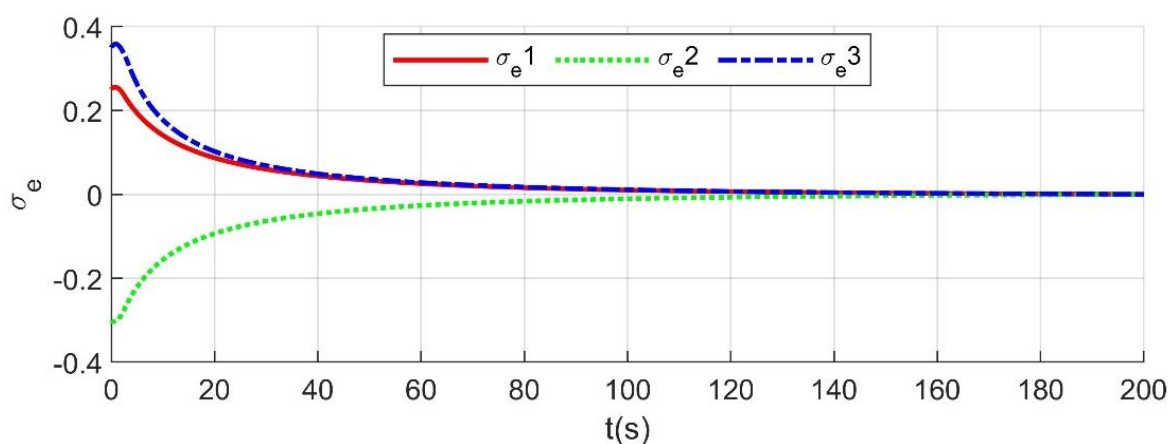
| واحد | مقدار | پارامتر |
|-------|--|---------------------|
| m | $[1, 1, 1]^T \times 7.708 \times 10^6$ | $r(0)$ |
| m/s | $[2, 3, -2]^T \times 10^6$ | $v(0)$ |
| | 0 | $\sigma(0)$ |
| rad/s | 0 | $w(0)$ |
| m | $[30, -20, 10]^T$ | $r_e(0)$ |
| m/s | $[0.25, -0.25, 0.2]^T$ | $\dot{r}_e(0)$ |
| | $[0.25, -0.3, 0.35]^T$ | $\sigma_e(0)$ |
| | $[0.02, -0.02, 0.03]^T$ | $\dot{\sigma}_e(0)$ |

شکل (۲)، تحول جهت‌گیری نسبی و نرخ جهت‌گیری نسبی را نسبت به زمان نمایش می‌دهد. همان‌طور که مشخص است هر دو کمیت به‌طور نمایی و در کمتر از ۲۰۰ ثانیه به مقدار صفر همگرا شده و پایدار مانده‌اند. پاسخ گذرا حدود ۹۰ ثانیه به‌طول انجامیده است. این دقت بالای ردگیری و همگرایی خطاها به سمت صفر به این معنی است که تقریباً هیچ خطایی در جهت‌گیری نسبی بین دو ماهواره باقی نمی‌ماند.

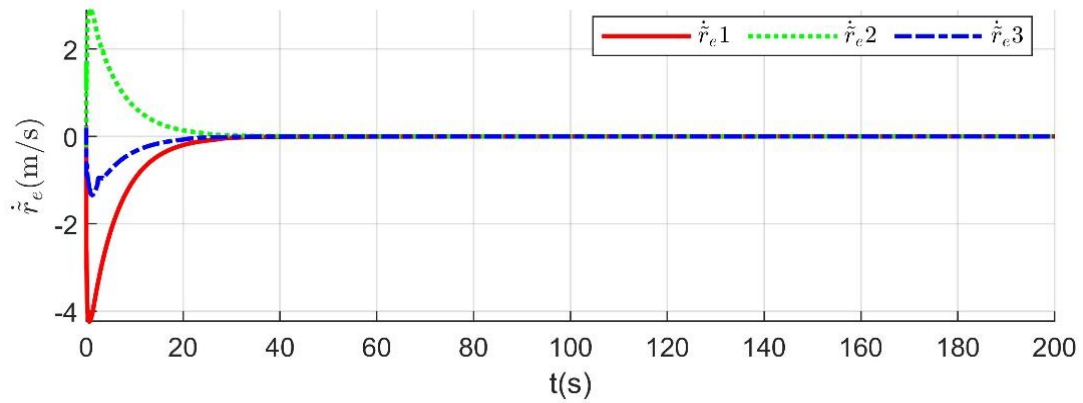
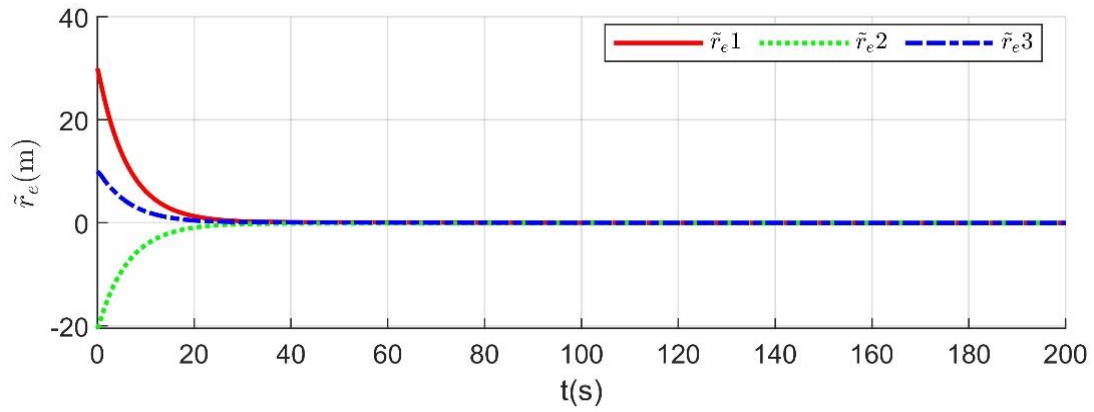
در شکل (۳)، فاصله نسبی و سرعت نسبی دو ماهواره نیز به نزدیکی صفر میل کرده است و این همگرایی در مدت زمان کمتر از ۲۰۰ ثانیه حاصل شده است. به‌علاوه، زمان پاسخ گذرا در این تحول حدوداً ۶۰ ثانیه است. بنابراین تحت عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی، ماهواره به خوبی عملیات مجاورت را اجرا کرده است و فاصله نسبی دلخواه در عملیات نزدیکی به‌دست می‌آید.

شکل (۴) تحول حالت‌های سیستم را به‌سوی سطح لغزش نشان می‌دهد که به سرعت به سطح لغزش رسیده و به‌طور پایدار روی آن باقی می‌مانند. همچنین حرکت به روی سطوح لغزش بدن ایجاد پدیده چترینگ صورت گرفته است که عموماً در کنترل مود لغزشی سنتی این پدیده وجود دارد.

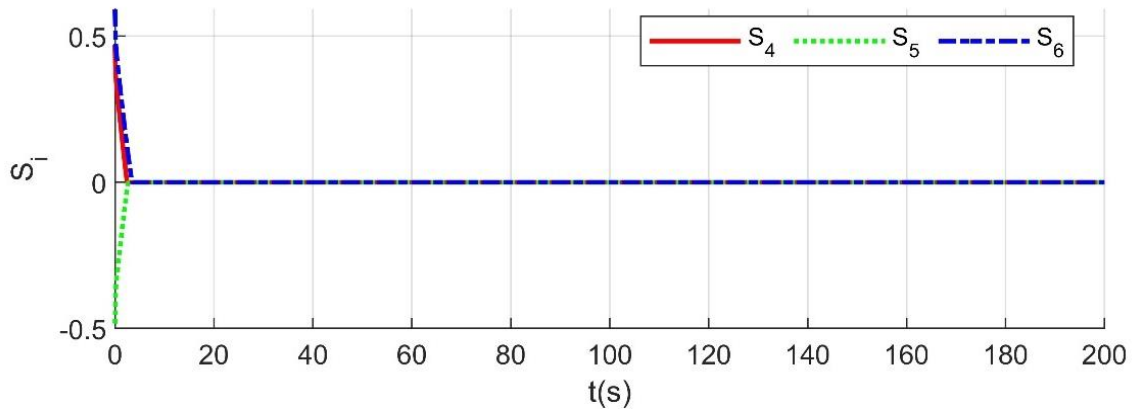
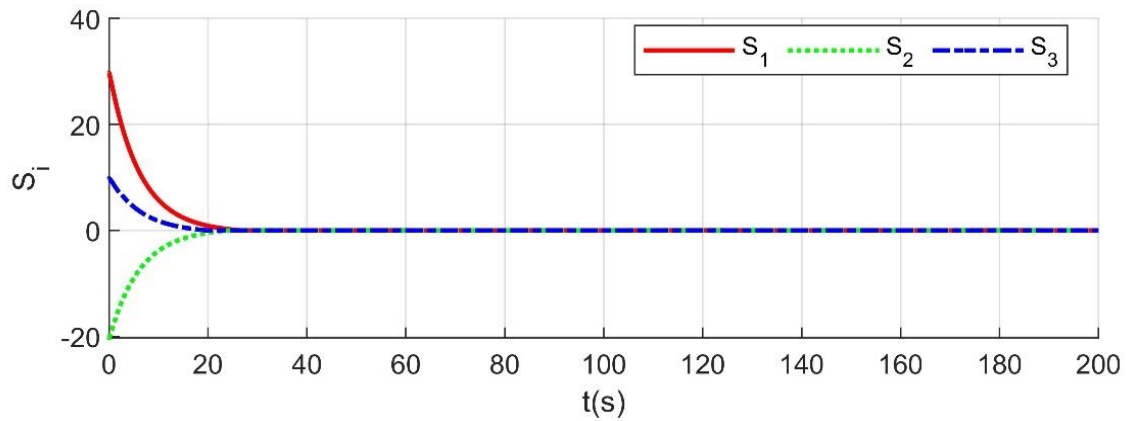
شکل (۵) تحول خطای تخمین رویت‌گر اغتشاشات تجمیعی را نشان می‌دهد. خطای مشاهده کمیت‌های d_a در کمتر از ۵ ثانیه و خطای مشاهده کمیت‌های d_b در کمتر از ۱ ثانیه به صفر میل کرده است. علاوه بر این، زمان همگرایی این رویت‌گر به‌طور قابل ملاحظه‌ای کوتاه‌تر از زمان همگرایی حالت‌های نسبی سیستم است که نشان می‌دهد اثر رویت‌گر زمان-ثابت بر زمان همگرایی دینامیک سیستم بسیار ناچیز است.



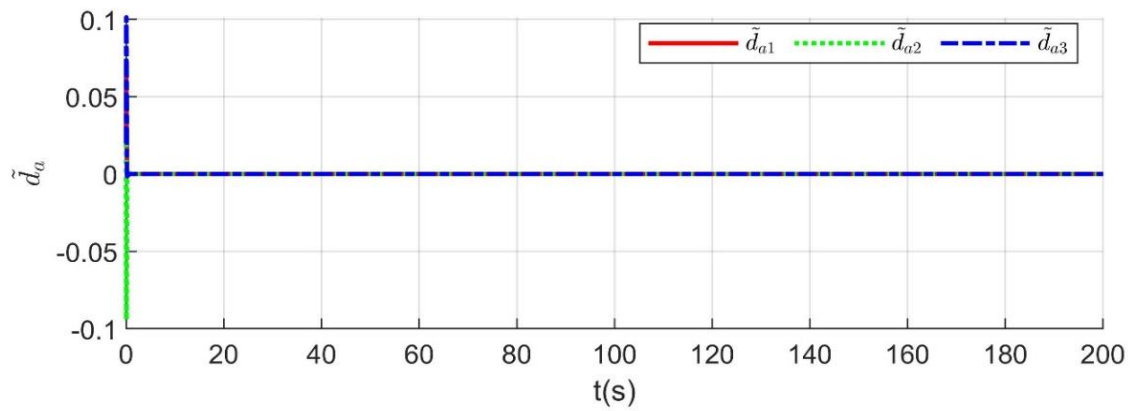
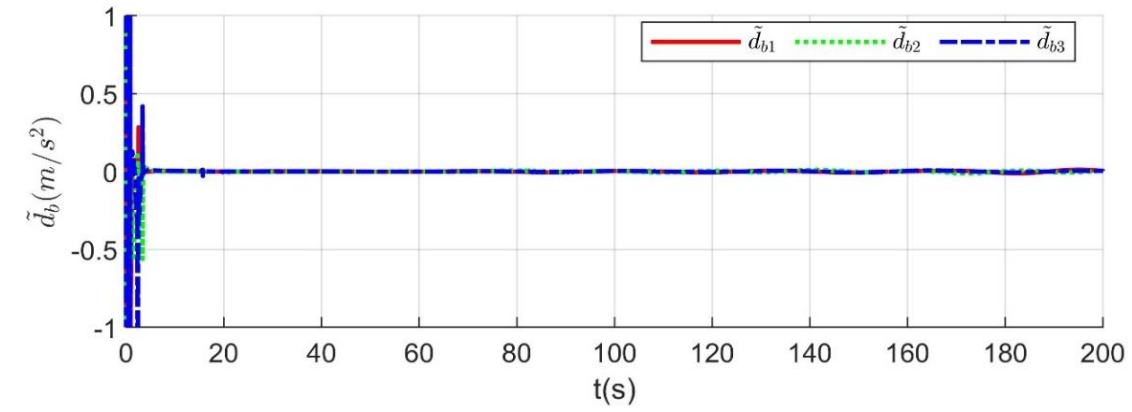
شکل ۲- تحول جهت‌گیری نسبی بین ماهواره و هدف و نرخ تغییرات آن تحت کنترل‌کننده معادله (۴۹)



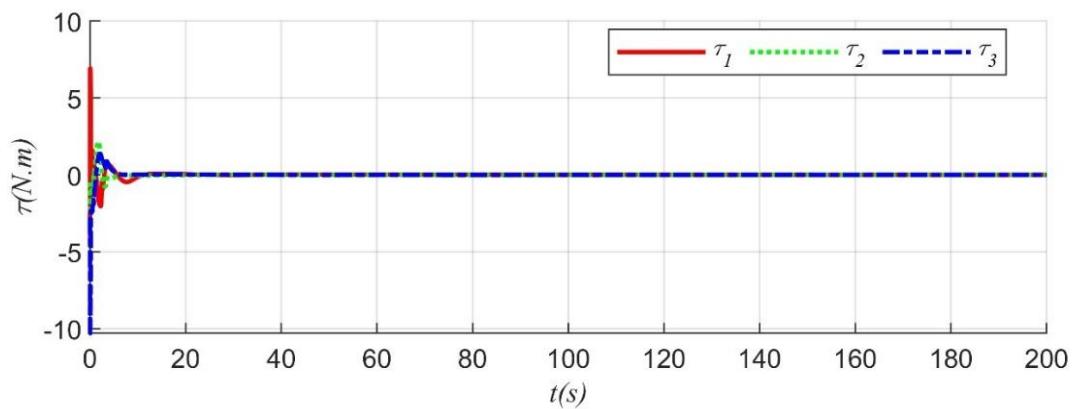
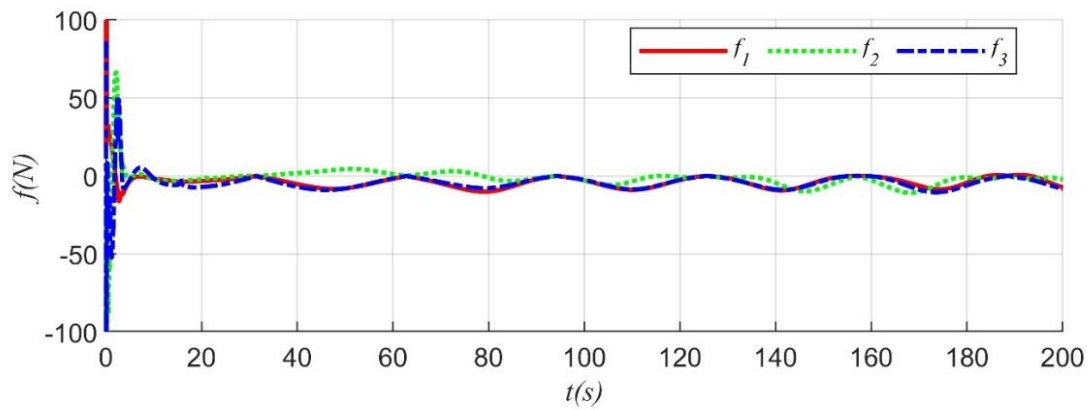
شکل ۳- تحول فاصله و سرعت نسبی بین ماهواره و هدف تحت کنترل کننده (۴۹)



شکل ۴- تحول رسیدن به روی سطح لغزش تحت کنترل کننده معادله (۴۹)



شکل ۵- تحول خطای تخمین رویت گر زمان-ثابت



شکل ۶- تحول ورودی‌های کنترلی نیرو و گشتاور

این مطلب نشان‌گر این است که رویت‌گر زمان-ثابت پیشنهادی برای هدف موردنظر مناسب است و قادر است اغتشاشات را به خوبی و در مدت زمان کوتاهی تخمین بزند و باعث ایجاد تاخیر یا مشکلی در پاسخ کل سیستم نشود.

شکل (۶) نیروها و گشتاورهای کنترلی را نشان می‌دهد. ورودی‌های کنترلی اولیه بزرگ هستند تا ماهواره تعقیب‌کننده را به سرعت به مکان و جهت‌گیری نسبی مطلوب برسانند. پس از آن اعمال ورودی کنترلی عمدتاً برای خنثی کردن اغتشاش صرف می‌شود.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش کنترلی مبتنی بر مود لغزشی زمان-ثابت جدید همراه با یک رویت‌گر اغتشاش زمان-ثابت برای انجام عملیات مجاورت ماهواره‌ها در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری، اغتشاشات خارجی و دینامیک کوپل شده ارائه گشت. رویت‌گر اغتشاش زمان-ثابت به منظور تخمین اغتشاشات تجمعی طراحی شد تا کنترل-کننده مود لغزشی از عملکرد دقیق‌تر و پایداری بیشتری در حضور نامعینی‌ها و اغتشاشات برخوردار شود. با جبران این عدم قطعیت‌ها به صورت به‌هنگام، رویت‌گر اغتشاش همگرایی زمان-ثابت تخمین اغتشاشات تجمعی را تضمین می‌کند و زمینه را برای کنترل دقیق فراهم می‌کند. سپس کنترل‌کننده مود لغزشی زمان-ثابت برای دستیابی به عملکرد ردیابی قوی و مقید به زمان ثابت برای رسیدن به همگرایی طراحی شد که وظیفه آن کنترل هم‌زمان فاصله (مجاورت) و وضعیت میان دو ماهواره فضایی بود. ادغام رویت‌گر با کنترل‌کننده، نه تنها اثرات نامطلوب اغتشاشات بر ردگیری را کاهش داد، بلکه پدیده چترینگ که یک عیب رایج در روش کنترل مود لغزشی است، را به‌طور قابل توجهی از بین برد. متعاقباً این کاهش چترینگ هم دقت کنترل و هم سرعت همگرایی را بهبود بخشید و عملیات مجاورت ماهواره‌ها را روان و پایدار نمود. شبیه‌سازی‌های عددی اثربخشی طرح کنترل پیشنهادی را تأیید کردند. نتایج نشان می‌دهند که ترکیب FTDO و SMC زمان-ثابت، به ردیابی سریع و دقیق فاصله و وضعیت نسبی بین ماهواره تعقیب‌کننده و هدف دست می‌یابد. این یافته‌ها قابلیت راهبرد پیشنهادی را برای افزایش دقت و قابلیت اطمینان عملیات مجاورت ماهواره‌ها در محیط‌های فضایی پیچیده و پویا برجسته می‌کند.

مراجع

- [1] S. Dey, D. K. Giri, K. Gaurav, and V. Laxmi, "Robust Nonsingular Terminal Sliding Mode Attitude Control of Satellites," *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 34, No. 1, 2020, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)AS.1943-5525.0001224](https://doi.org/10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0001224).
- [2] Y. Guo, B. Huang, S.-m. Song, A.-j. Li, and C.-q. Wang, "Robust Saturated Finite-time Attitude Control for Spacecraft using Integral Sliding Mode," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 42, No. 2, 2018, <https://doi.org/10.2514/1.G003520>.
- [3] J. Beyramzad, K. Daneshjou, and E. Khanmirza, "Design a Finite-time Chattering Free Attitude Controller for Rigid Spacecraft's without Angular Velocity Measurement using Interval Type-II Fuzzy Logic Nonsingular Terminal Sliding Mode and Nonlinear Extended

State Observer,"In *21st International Conference of Iranian Aerospace Society*, pp. 1-8, 21-23 Feb., Tehran, Iran, 2023.

[4] Q. Hu, and B. Jiang, "Continuous Finite-time Attitude Control for Rigid Spacecraft Based on Angular Velocity Observer", In *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 54, No. 3, pp. 1082 - 1092, 2018, <https://doi.org/10.1109/TAES.2017.2773340>.

[5] M. Malekzadeh, and H. Sadeghian, "Attitude Control of Spacecraft Simulator without Angular Velocity Measurement," *Control Engineering Practice*, Vol. 84, pp. 72-81, 2019, <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2018.11.011>.

[6] J. Liu, and X. Wang, "*Advanced Sliding Mode Control: Advanced Sliding Mode Control for Mechanical Systems: Design, Analysis and MATLAB Simulation*," 1st Edition, pp. 81-96, 2011, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, Berlin, https://doi.org/10.1007/978-3-642-20907-9_3.

[7] Y. Shtessel, E. C., L. Fridman, and A. Levant, "*Sliding Mode Control and Observation: Control Engineering*," 1st Edition, Vol. 10, 2014, Birkhäuser New York, NY, US, <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4893-0>.

[8] H. Schaub, and J. L. Junkins, "*Analytical Mechanics of Space Systems*", AIAA Education Series, Vol. 1, IAAA (American Institute of Aeronautics and Astronautics), Virginia Polytechnic Institute and State University Blacksburg, Virginia, 2003, ISBN: 1563475634, 9781563475634.

[9] L. Sun, and Z. Zheng, "Disturbance Observer-based Robust Saturated Control for Spacecraft Proximity Maneuvers", In *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 26, No. 2, pp. 684-692, 2018, <https://doi.org/10.1109/TCST.2017.2669145>.

[10] R. Kristiansen, and P. J. Nicklasson, "Spacecraft Formation Flying: A Review and New Results on State Feedback Control," *Acta Astronautica*, Vol. 65, No. 11-12, pp. 1537-1552, 2009, doi: 10.1016/j.actaastro.2009.04.014.

[11] C. Zhang, Wang, J., Sun, R., Zhang, D. and Shao, X., "Multi-spacecraft Attitude Cooperative Control using Model-based Event-triggered Methodology," *Advances in Space Research*, Vol. 62, No. 9, pp. 2620-2630, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.07.019>.

[12] T. T. Nguyen, A. T. Vo, and H.-J. Kang, "A Novel ANSMC Algorithm for Tracking Control of 3-DOF |Planar Parallel Manipulators," *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, Vol. 12, pp. 32-39, 2023, doi: 10.18178/ijmerr.12.1.32-39.

[13] Z. Zhu, Y. Xia, and M. Fu, "Attitude Stabilization of Rigid Spacecraft with Finite-time Convergence," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 21, No. 6, 2011, <https://doi.org/10.1002/rnc.1624>.

[14] T. N. Truong, A. T. Vo, H.-J. Kang, and T. D. Le, "An Observer-based Fixed Time Sliding Mode Controller for a Class of Se," *Intelligent Computing Methodologies*, Vol. 13395, pp. 529–543, 2022, doi: 10.1007/978-3-031-13832-4_44.

- [15] V. I. Utkin, "*Sliding Modes in Control and Optimization*," Springer Science & Business Media, 2013, ISBN: 9783642843792, 3642843794.
- [16] X.-T. Tran, H.-J. Kang, and H.-J. K. Xuan-Toa Tran, "Continuous Adaptive Finite-time Modified Function Projective Lag Synchronization of Uncertain Hyperchaotic Systems," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, Vol. 40, No. 3, pp. 853-860, 2016-10-12, <https://doi.org/10.1177/0142331216670453>.
- [17] Z. Zuo, "Non-singular Fixed-time Terminal Sliding Mode Control of Non-linear Systems," *IET Control Theory & Applications*, Vol. 9, No. 4, pp. 545-552, 2015, <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2014.0202>.
- [18] L. Sun, and W. Huo, "6-DOF Integrated Adaptive Backstepping Control for Spacecraft Proximity Operations," In *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 51, No. 3, pp. 2433 - 2443, 2015, doi: 10.1109/TAES.2015.140339.

Dynamic Modeling and Developing a Sliding Mode Controller Based on a Fixed-Time Disturbance Observer for Simultaneous Control of Distance and Attitude in Spacecraft Proximity Operations

Ahmad Hemmati

PhD Student, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
a.hemmati@tabrizu.ac.ir

*Corresponding author: **Mohammad-Reza Sayyed Noorani**

Associate Professor, Department of Mechatronics Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
smrs.noorani@tabrizu.ac.ir

Jalil Beyramzad

PhD Student, Faculty of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
jalilbeyramzad@gmail.com

Abstract

This paper presents a sliding mode control scheme based on a fixed-time disturbance observer for satellite proximity operations in the presence of parameter uncertainties and external disturbances. The observer is designed to estimate aggregated uncertainties, including kinematic coupling, parameter uncertainties, and environmental disturbances. Based on the observer's output, a sliding mode control is developed to achieve fixed-time convergence, where the observer neutralizes the effect of uncertainties and reduces chattering. Furthermore, the proposed control method enhances convergence speed and improves tracking accuracy. The fixed-time stability of the proposed control system is proven using the Lyapunov method. Additionally, its effectiveness is verified through numerical simulations.

Keywords: Satellite proximity operations, Fixed-time convergence, Sliding mode control, Disturbance observer