

مدل سازی دینامیکی و طراحی سیستم کنترلی برای ربات همکار چرخدار با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل و روش کنترل غیرخطی پیش بین

این مقاله به بررسی مدل سازی و کنترل مسیر یک پایه چرخدار، متشکل از دو بازوی مکانیکی که هر یک از آنها از n عضو صلب تشکیل شده اند، می پردازد. معادلات سیستم مورد مطالعه به شدت غیرخطی و حاوی قیودی از نوع غیرهولونومیک می باشند. چرا که مطالعه این سیستم رباتیکی، بدون در نظر گرفتن اثر کوبلینگ دینامیکی میان بازوهای مکانیکی و پایه چرخدار فاقد ارزش است. در این راستا، در استخراج فرم بسته معادلات حرکت این ربات از روش گیبس-اپل استفاده شده است. دلیل استفاده از این روش برای مدل سازی ریاضی این سیستم رباتیکی، اجتناب از محاسبه ضرایب لاگرانژ است که در فرمولاسیون لاگرانژ، محاسبه این ضرایب به دلیل وجود قیود غیرهولونومیک امری لازم و ضروری است. از سوی دیگر، به منظور ردیابی همزمان مسیر مطلوب پایه چرخدار و مجری های نهایی دو بازوی مکانیکی سمت راست و چپ، قوانین کنترلی در دو بخش سینماتیک و دینامیک با استفاده از روش کنترل پیش بین بهینه طراحی می گردند. در بخش اول یک کنترل کننده سینماتیکی پایدارساز، کنترل خطاهای مربوط به موقعیت مکانی و دورانی پایه چرخدار و بازوهای مکانیکی را بر عهده می گیرد. سپس در بخش دوم، یک کنترل کننده دینامیکی با استفاده از مقادیر مطلوب سرعت محاسبه شده در بخش کنترل کننده سینماتیکی، مقادیر مربوط به گشتاورهای کنترلی در چرخ ها و بازوها را تعیین می کند. در نهایت نتایج شبیه سازی جهت بررسی رفتار سیستم کنترلی طراحی شده برای ردیابی مسیر پایه چرخدار و مجری های نهایی دو بازوی مکانیکی در حضور نامعینگی ها ارائه می گردد. نتایج نشان دهنده توانایی روش ارائه شده در مدل سازی ریاضی و ردیابی همزمان مسیرهای مرجع می باشند.

حسین میرزائی نژاد^۱

دانشیار

علی محمد شافعی^۲

دانشیار

واژه های راهنما: روش گیبس-اپل، کنترل غیرخطی بهینه، ربات چرخدار متحرک، بازوی n عضوی، ردیابی مسیر

^۱ دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران، h_mirzaeinejad@uk.ac.ir

^۲ دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران، shafei@uk.ac.ir

۱- مقدمه

ربات‌های متحرک چرخدار سیستم‌هایی مکانیکی هستند که در عین سادگی ساختار، از قابلیت مانورپذیری بالایی برخوردارند. در دهه‌های اخیر، مدل‌سازی ریاضی و کنترل اینگونه از ربات‌ها، با هدف بهره‌برداری از تمام قابلیت‌های آن، توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است. فرض غلتش بدون لغزش برای اینگونه از ربات‌ها، تحلیلگر را ناچار می‌سازد تا قیود غیرهولونومیک را که در نتیجه این فرض در مدل‌سازی ریاضی سیستم ظاهر می‌شود، در نظر بگیرد. بر اساس تئوری براکت [۱]، طراحی قوانین کنترلی پایدارساز در سیستم‌های غیرهولونومیک کار دشواری است؛ چرا که هیچ فیدبک حالت پیوسته‌ای را نمی‌توان برای پایدارسازی چنین سیستم‌هایی اعمال کرد. از طرفی معادلات سینماتیکی ربات از زیرتحرک بودن آن خبر می‌دهد. بدین معنا که تعداد ورودی‌های کنترلی از تعداد متغیرهای حالتی که باید کنترل شوند، کمتر هستند. از این رو برای تضمین پایداری تمام متغیرها باید به دنبال ورودی کنترلی مناسب بود [۲].

گام نخست در ردیابی مسیر توسط ربات، مدل‌سازی مناسب آن جهت به‌کارگیری در طراحی کنترل‌کننده است. یکی از متداول‌ترین روش‌ها در استخراج معادلات حرکت سیستم‌های رباتیکی، استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ است. با این حال، بکارگیری این روش در استخراج معادلات حرکت سیستم‌های مقید به پیدایش ضرایب لاگرانژ منتهی می‌گردد. حذف این ضرایب از معادلات حرکت، به عملیات ریاضی پیچیده‌ای نیاز دارد. یکی از روش‌هایی که بدون مواجه شدن با ضرایب لاگرانژ به استخراج معادلات حرکت سیستم‌های مقید می‌پردازد، فرمولاسیون گیبس-پل است [۳]. با این حال، به‌رغم مزایای بسیار ارزشمند این روش دینامیکی، کمتر از دیگر روش‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. اخیراً شافعی و همکاران با بکارگیری این روش دینامیکی، مدل‌سازی ریاضی سیستم‌های مختلف رباتیکی همچون ربات پایه سیار [۴]، ربات راه‌رونده [۵]، ربات با عضوهای الاستیک [۶] و ربات با ساختار درختی [۷] را به انجام رسانیده‌اند.

در طراحی کنترل‌کننده برای سیستم‌های رباتیکی دو رویکرد عمده وجود دارد. در رویکرد اول کنترل‌کننده بر اساس مدل سینماتیکی ربات طراحی می‌شود؛ اما در رویکرد دوم که رویکردی کامل‌تر است، معادلات سینماتیکی و دینامیکی به‌صورت توأمان در قانون کنترلی لحاظ می‌شوند. روش‌های کنترلی مانند خطی‌سازی فیدبک [۸ و ۹]، کنترل مود لغزشی [۱۰ و ۱۱]، کنترل پیش‌بین [۱۲ و ۱۳]، کنترل فازی [۱۴ و ۱۵] و ... در زمینه ردیابی مسیر ربات متحرک چرخدار استفاده شده‌اند. مسئله کنترل ردیابی سینماتیکی برای ربات‌های متحرک با فرض لغزش توسط کیماسی و جلال‌زاده در سال ۲۰۱۸ دنبال شده است [۱۶]. در این مقاله برای در نظر گرفتن اثرات لغزش، مدل این پدیده به‌عنوان یک پارامتر ناشناخته وارد معادلات سینماتیک ایده‌آل مسئله می‌گردد. با این حال این نکته را باید در نظر داشت که طراحی کنترل‌کننده بر اساس مدل سینماتیکی سیستم، و نادیده گرفتن اثرات دینامیکی باعث ایجاد خطا در ردیابی خواهد شد. این مسئله زمانی اهمیت بیشتری پیدا می‌کند که ربات بخواهد در سرعت بالا کار کند و یا ساخت ربات در مقیاس بزرگ مد نظر باشد. در طراحی کنترل‌کننده دو روش کلی وجود دارد؛ روش کنترلی مدل مبنا و غیر مدل مبنا. کنترل‌کننده‌های مدل مبنا، به مدل دقیق ریاضی سیستم نیاز دارند. مزایای دقیق بودن مدل سیستم، پایین آمدن درصد خطا و عدم قطعیت‌ها است. در زمینه کنترل دینامیک ربات متحرک چرخدار به روش کنترلی مدل مبنا، روش کنترل ورودی-خروجی فیدبک حالت، کنترل پیش‌بین، کنترل تطبیقی، کنترل مد‌لغزشی بیش از دیگر روش‌ها مورد توجه قرار گرفته‌اند. گاهی اوقات ممکن است به‌دست آوردن

مدل ریاضی سخت و یا حتی غیرممکن باشد. در این حالت روش‌های غیر مدل مبنا در طراحی کنترل‌کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این روش، طراحی کنترل‌کننده به مدل دینامیکی ربات وابستگی ندارد. از روش‌های غیر مدل مبنا، می‌توان به روش‌های کنترل فازی و شبکه عصبی اشاره کرد. در تحقیق Wu و همکاران یک کنترل‌کننده فازی لغزشی گام‌به‌گام برای ردیابی مسیر توسط ربات ارائه شده است. در این تحقیق خطاهای سینماتیکی با روش بازگشت به عقب کنترل می‌شوند. در ادامه قانون مود لغزشی در کنترل سرعت چرخ‌ها استفاده شده است. برای کاهش پدیده چترینگ، ضریب موجود در بخش سوئیچینگ از منطق فازی جایگذاری می‌شود [۱۷]. در تحقیق Guo و همکاران با تمرکز بر مسئله کاهش اثرات اغتشاشات و نامعینی‌ها کنترل‌کننده‌ای بر مبنای مود لغزشی ارائه شده است. سپس با استفاده از یک روئیتگر غیرخطی، نامعینی و اغتشاشات تخمین زده شده و ضرائب مربوطه بر همین اساس و با استفاده از روش جایگذاری قطب محاسبه شده است [۱۸]. در تحقیقی دیگر، مسئله کنترل ردیابی ربات با هدف کم کردن اثرات نامعینی و اغتشاشات بررسی شده است [۱۹]. در این مقاله کنترل‌کننده سینماتیکی با روش عصبی طراحی شده و در بخش دینامیکی، از یک روئیتگر به‌منظور تخمین اغتشاشات استفاده شده تا ضرایب به‌روز تطبیقی به قانون مود لغزشی اعمال شوند. Wang و همکاران ابتدا مدل سینماتیکی و دینامیکی برای ربات متحرک چرخدار محاسبه شده، سپس با اعمال روش کنترل غیرخطی پیش‌بین در ترکیب با فیدبک انتگرال، مقاومت روش کنترلی در حضور اغتشاش و نامعینی در ردیابی مسیر مرجع توسط ربات بهبود یافته است [۲۰]. در تحقیق Wang و همکاران، مسئله کنترل ردیابی ربات با فرض وجود لغزش در چرخ‌ها مورد بررسی قرار گرفته است و در طراحی کنترل‌کننده، روش مود لغزشی تطبیقی به‌کار گرفته شده است [۲۱]. در ادامه این کار در سال ۲۰۲۱، روش لغزشی تطبیقی عصبی با روئیتگر برای کنترل سیستم‌های دارای نامعینی پیشنهاد شده است [۲۲]. در این مقاله برای تقریب نامعینی‌ها از روش عصبی استفاده شده و با هدف پایداری سیستم کنترلی، طراحی کنترل‌کننده با روش مدل‌لغزشی و روئیتگر تکمیل شده است. در تحقیق Guo و همکاران، یک روش کنترل ردیابی مقاوم برای ربات‌های متحرک چرخدار ارائه شده است که در برابر لغزش و اغتشاشات مقاومت می‌کند. برای مدیریت عدم قطعیت ناشی از اغتشاشات و لغزش چرخ‌ها، از کنترل مدل‌لغزشی استفاده شده است [۲۳]. با این حال، از آنجایی که روش مدل‌لغزشی در مواجهه با عدم قطعیت‌های بیشتر به تلاش کنترلی بالاتری نیاز دارد، پدیده چترینگ رخ می‌دهد. برای کاهش چترینگ، یک لایه مرزی در اطراف سطح سوئیچینگ اضافه شده و یک قانون کنترلی پیوسته به‌کار گرفته شده است. در پژوهشی دیگر، به مسئله کنترل ردیابی مقاوم برای ربات‌های متحرک چرخدار که دچار لغزش، سر خوردن و عدم قطعیت‌های پارامتری هستند، پرداخته شده است. یک مشاهده‌گر اغتشاش با زمان ثابت برای تخمین اغتشاشات به کار گرفته شده و یک استراتژی کنترلی مقاوم توسعه یافته است تا دقت ردیابی مسیر تضمین شود [۲۴].

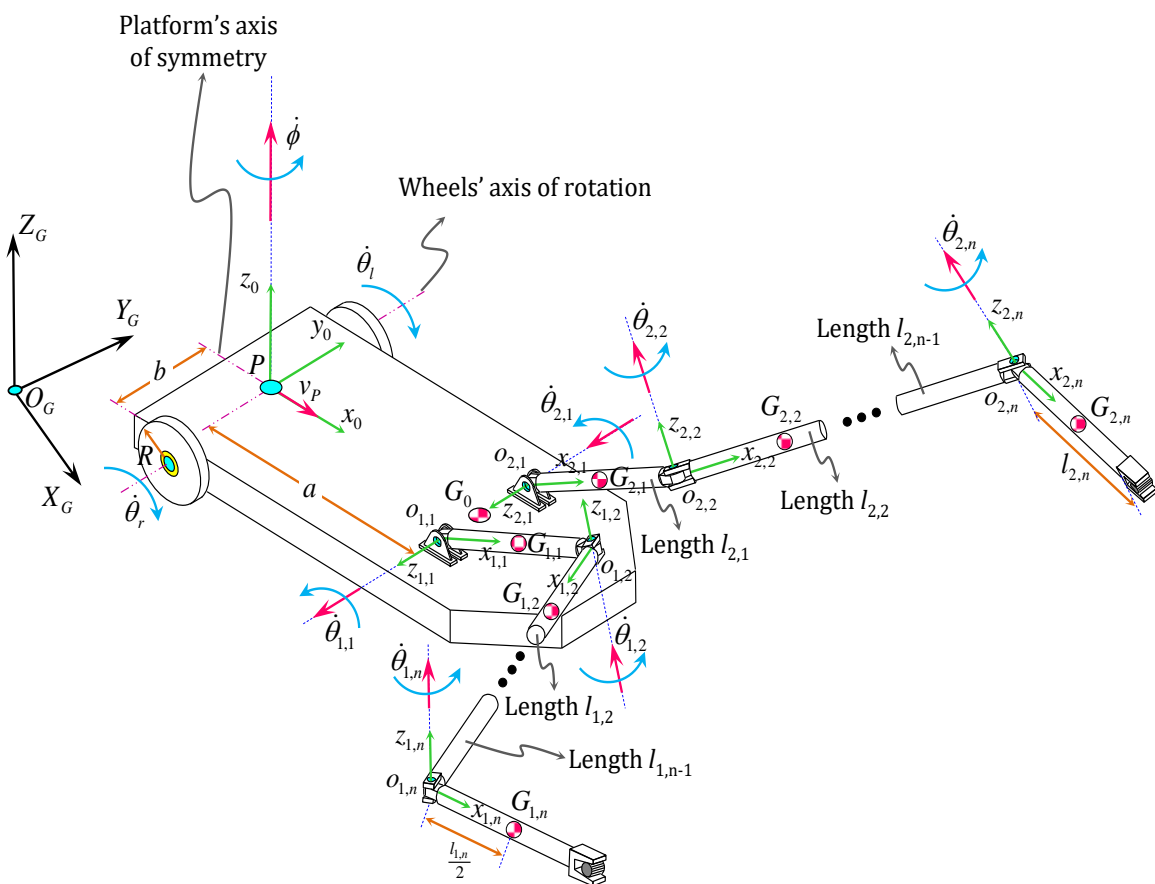
در این تحقیق، از روش کنترل پیش‌بین غیرخطی مبتنی بر بهینه‌سازی استفاده شده که قوانین کنترلی را به‌صورت تحلیلی و در فرم بسته استخراج می‌کند. روش‌های کلاسیک کنترل بهینه، مانند برنامه‌ریزی دینامیکی و حساب تغییرات، برای سیستم‌های غیرخطی با چالش‌هایی مواجه هستند، زیرا حل معادلات دیفرانسیل پیچیده یا یافتن راه‌حل تحلیلی در بسیاری از موارد ممکن نیست.

روش کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل، جایگزینی عملی برای حل این مسائل است؛ اما نیاز به بهینه‌سازی دینامیکی همزمان دارد که باعث تأخیر در سیستم می‌شود. برای کاهش این مشکل، از کنترل پیش‌بین حلقه بسته استفاده شده که در آن پاسخ غیرخطی سیستم با بسط سری تیلور پیش‌بینی و قانون کنترلی به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که خطای ردیابی به حداقل رسد. قوانین کنترلی در دو بخش طراحی خواهند شد. در بخش اول یک کنترل‌کننده سینماتیکی پایدارساز، با هدف کنترل خطاهای مکانی و زاویه‌ای ربات و بازوها طراحی خواهد شد. سپس در بخش دوم، یک کنترل‌کننده دینامیکی با استفاده از مقادیر مطلوب سرعت محاسبه شده در کنترل‌کننده سینماتیکی، مقادیر مناسب برای گشتاورهای اعمالی در چرخ‌ها و بازوها را تعیین می‌کند؛ سپس عملکرد روش کنترلی پیشنهادی با وجود عدم قطعیت‌ها از طریق شبیه‌سازی کامپیوتری مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۲- مدلسازی ریاضی سیستم مورد مطالعه

۲-۱- سینماتیک سیستم

در این بخش سینماتیک یک ربات همکار متشکل از دو بازوی مکانیکی شامل n عضو که بر روی یک پایه چرخدار نصب شده‌اند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. نمائی از این سیستم رباتیکی در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۱- ربات متحرک چرخدار با بازوهای دوگانه n عضوی

برای تحلیل سراسرتر این ربات، به هر عضو در هر بازوی مکانیکی یک دستگاه مختصات متصل می‌گردد. در این صورت، دستگاه مختصاتی است که مطابق استاندارد دناویت-هارتنبرگ به ابتدای عضو i ام از بازوی مکانیکی i ام اختصاص یافته است. از طرفی دستگاه مختصات متصل به پایه چرخدار با نماد x_0, y_0, z_0 در نقطه P (محل تقاطع محور دوران چرخ‌ها با محور تقارن پایه سیار) نصب شده است. در پایان دستگاه مختصات X_G, Y_G, Z_G به‌عنوان دستگاه مختصات ثابت به‌گونه‌ای به زمین متصل می‌گردد تا محوره‌های X_G و Y_G ، تشکیل‌دهنده صفحه‌ای باشند که پایه متحرک تنها مجاز به حرکت در داخل این صفحه است. با فرض عدم حرکت پایه متحرک در امتداد محور دوران چرخ‌ها می‌توان نتیجه گرفت که نقطه P فاقد هرگونه مؤلفه سرعتی در این امتداد است. لذا تنها مؤلفه غیرصفر سرعت این نقطه، آن مؤلفه‌ای است که در امتداد محور تقارن پایه قرار دارد. توصیف این مؤلفه سرعت در دستگاه مختصات x_0, y_0, z_0 عبارت است از:

$${}^0\vec{v}_P = \{v_P \quad 0 \quad 0\}^T = v_P {}^0\vec{x}_0 \quad (1)$$

با استفاده از تئوری انتقال، شتاب مطلق نقطه P با مشتق‌گیری از معادله (۱) نسبت به زمان مطابق رابطه زیر به دست می‌آید:

$${}^0\dot{\vec{v}}_P = \dot{v}_P {}^0\vec{x}_0 + v_P \dot{\phi} {}^0\vec{y}_0 \quad (2)$$

که در آن $\dot{\phi}$ سرعت دورانی پایه متحرک است. اکنون با استفاده از روابط مربوط به شتاب نسبی، شتاب مطلق مرکز جرم مجموعه پایه و چرخ‌ها که در شکل (۱) با نقطه G_0 نشان داده شده است، به صورت زیر در دستگاه مختصات x_0, y_0, z_0 توصیف می‌گردد:

$${}^0\dot{\vec{v}}_{G_0} = (\dot{v}_P - a\dot{\phi}^2) {}^0\vec{x}_0 + (v_P\dot{\phi} + a\ddot{\phi}) {}^0\vec{y}_0 \quad (3)$$

که در آن a فاصله میان دو نقطه P و G_0 است. در این مقاله فرض بر این است که چرخ‌ها دارای حرکت غلتشی محض (بدون لغزش) بر روی زمین هستند. با این فرض، اگر $\dot{\theta}_r$ و $\dot{\theta}_l$ به ترتیب سرعت دورانی چرخ‌های راست و چپ باشد، آنگاه سرعت خطی مرکز این دو چرخ در دستگاه مختصات x_0, y_0, z_0 به صورت زیر ارائه می‌گردند:

$${}^0\vec{v}_{r/l} = R\dot{\theta}_{r/l} {}^0\vec{x}_0 \quad (4)$$

که در آن پارامتر R بیانگر شعاع چرخ‌ها است. از سوی دیگر، با استفاده از روابط مربوط به سرعت دو نقطه از یک جسم صلب، می‌توان سرعت مطلق مرکز چرخ‌ها را به صورت رابطه (۵) نیز ارائه نمود.

$${}^0\vec{v}_{r/l} = (v_p \pm b\dot{\phi}) {}^0\vec{x}_0 \quad (5)$$

که در آن b فاصله میان نقطه e و مرکز چرخها است. از تساوی روابط (۴) و (۵) داریم:

$$\dot{\theta}_{r/l} = \frac{v_p \pm b\dot{\phi}}{R} \quad (6)$$

اکنون با مشتق گیری از معادله (۶)، شتاب دورانی چرخها به صورت زیر حاصل می گردد:

$$\ddot{\theta}_{r/l} = \frac{\dot{v}_p \pm b\ddot{\phi}}{R} \quad (7)$$

پس از ارائه روابط سینماتیکی مربوط به پایه چرخدار، به تحلیل سینماتیکی دو بازوی مکانیکی نصب شده بر روی این پایه متحرک می پردازیم. سرعت دورانی و شتاب دورانی عضو i ام از بازوی مکانیکی i ام در دستگاه مختصات $x_0y_0z_0$ به صورت زیر ارائه می گردد [۲۵]:

$${}^i\vec{\omega}_{j,i} = {}^iR_{j,i-1} {}^{i-1}\vec{\omega}_{j,i-1} + \dot{\theta}_{j,i} {}^i\vec{z}_{j,i} \quad (8)$$

$${}^i\dot{\vec{\omega}}_{j,i} = {}^iR_{j,i-1} {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{j,i-1} + \ddot{\theta}_{j,i} {}^i\vec{z}_{j,i} + {}^iR_{j,i-1} {}^{i-1}\vec{\omega}_{j,i-1} \times \dot{\theta}_{j,i} {}^i\vec{z}_{j,i} \quad (9)$$

که در آن ماتریس ${}^iR_{j,i-1}$ 3×3 ایست که دوران دو دستگاه مختصات $x_{j,i-1}y_{j,i-1}z_{j,i-1}$ و $x_{j,i}y_{j,i}z_{j,i}$ را نسبت به یکدیگر توصیف می کند. همچنین $\dot{\theta}_{j,i}$ و $\ddot{\theta}_{j,i}$ به ترتیب بیانگر سرعت دورانی و شتاب دورانی موتور نصب شده در مفصل i ام از بازوی مکانیکی i ام است. در روابط (۸) و (۹) با قرار دادن $i=1$ ، عبارات ${}^0\vec{\omega}_{j,0}$ و ${}^0\dot{\vec{\omega}}_{j,0}$ ظاهر می گردند که به ترتیب بیانگر سرعت دورانی و شتاب دورانی پایه ربات همکار هستند. لذا داریم:

$${}^0\vec{\omega}_{j,0} = {}^0\vec{\omega}_0 = \dot{\phi} {}^0\vec{z}_0 \quad (10)$$

$${}^0\dot{\vec{\omega}}_{j,0} = {}^0\dot{\vec{\omega}}_0 = \ddot{\phi} {}^0\vec{z}_0 \quad (11)$$

اکنون با در اختیار داشتن سرعت دورانی و شتاب دورانی هر عضو، شتاب مرکز جرم عضو i ام از بازوی مکانیکی i ام به صورت زیر حاصل می گردد:

$${}^i\dot{\vec{v}}_{G_{j,i}} = {}^i\dot{\vec{v}}_{O_{j,i}} + {}^i\dot{\vec{\omega}}_{j,i} \times {}^i\vec{r}_{G_{j,i}/O_{j,i}} + {}^i\vec{\omega}_{j,i} \times ({}^i\vec{\omega}_{j,i} \times {}^i\vec{r}_{G_{j,i}/O_{j,i}}) \quad (12)$$

که در آن ${}^i\vec{r}_{G_{j,i}/O_{j,i}} = \frac{l_{j,i}}{2} \vec{x}_{j,i}$ است (منظور از $l_{j,i}$ طول عضو i ام از بازوی مکانیکی زام است). همچنین ${}^i\dot{\vec{v}}_{O_{j,i}}$ شتاب مطلق مبدأ دستگاه مختصات $x_{j,i}, y_{j,i}, z_{j,i}$ است.

۲-۲- دینامیک سیستم

همانگونه که در فرمولاسیون لاگرانژ با محاسبه تابع انرژی جنبشی به استخراج معادلات حرکت می پردازیم، در روش گیبس-اپل نیز باید در ابتدای امر انرژی شتاب سیستم محاسبه گردد. عبارت مربوط به انرژی شتاب یک جسم صلب به جرم M و ممان اینرسی جرمی I_G که دارای شتاب دورانی $\dot{\vec{\omega}}$ و شتاب خطی $\dot{\vec{v}}_G$ است، به صورت زیر ارائه می گردد:

$$S = \frac{1}{2} M \dot{\vec{v}}_G \cdot \dot{\vec{v}}_G + \frac{1}{2} \dot{\vec{\omega}} \cdot I_G \dot{\vec{\omega}} + \dot{\vec{\omega}} \cdot \tilde{\omega} I_G \bar{\omega} \quad (13)$$

ریات مورد مطالعه در این مقاله از $2n+3$ جسم صلب، شامل یک پایه چرخدار به جرم M_0 و ممان اینرسی جرمی I_{G_0} ، دو چرخ با ممان اینرسی جرمی I_w و $2n$ عضو صلب به جرم $M_{j,i}$ و ممان اینرسی جرمی $I_{G_{j,i}}$ تشکیل شده است. لذا تابع انرژی شتاب برای این ربات همکار پایه متحرک به صورت زیر ارائه می گردد:

$$S = \frac{1}{2} M_0 {}^0\dot{\vec{v}}_{G_0} \cdot {}^0\dot{\vec{v}}_{G_0} + \frac{1}{2} {}^0\dot{\vec{\omega}} \cdot I_{G_0} {}^0\dot{\vec{\omega}} + \frac{1}{2} {}^0\dot{\vec{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_0 I_{G_0} {}^0\dot{\vec{\omega}} + \frac{1}{2} I_w (\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2) + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} M_{j,i} {}^i\dot{\vec{v}}_{G_{j,i}} \cdot {}^i\dot{\vec{v}}_{G_{j,i}} + \frac{1}{2} {}^i\dot{\vec{\omega}}_{j,i} \cdot I_{G_{j,i}} {}^i\dot{\vec{\omega}}_{j,i} + {}^i\dot{\vec{\omega}}_{j,i} \cdot \tilde{\omega}_{j,i} I_{G_{j,i}} {}^i\dot{\vec{\omega}}_{j,i} \right] \quad (14)$$

همانگونه که پیشتر نیز اشاره شد، نقطه G_0 بیانگر مرکز جرم پایه چرخدار محسوب می شود. لذا انرژی شتاب ناشی از حرکت انتقالی و دورانی این پایه، سه ترم اول معادله (۱۴) را شامل می شود. ترم چهارم بیانگر انرژی دورانی چرخهای ربات به دلیل چرخش آنها حول محور دورانشان است. در نهایت ترم پنجم، انرژی شتاب ناشی از حرکت دورانی و انتقالی عضوهای تشکیل دهنده هر دو بازوی مکانیکی سمت راست و چپ را شامل می شود.

با جایگزین کردن معادلات (۳)، (۷) و (۱۱) در رابطه (۱۴) تابع شتاب ربات همکار پایه متحرک بر حسب $\dot{\vec{v}}_p$ ، $\ddot{\phi}$ ، $\ddot{\theta}_{j,i}$ به صورت زیر حاصل می گردد.

$$S = \frac{1}{2} M_0 \left[(\dot{v}_p - a\dot{\phi}^2)^2 + (v_p\dot{\phi} + a\ddot{\phi})^2 \right] + \frac{1}{2} I_{G_0} \ddot{\theta}^2 + \frac{I_w}{R^2} (\dot{v}_p^2 + b^2\ddot{\phi}^2) + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} M_{j,i} {}^i\dot{\vec{v}}_{O_{j,i}} \cdot {}^i\dot{\vec{v}}_{O_{j,i}} - {}^i\dot{\vec{v}}_{O_{j,i}} \cdot B'_{j,i} {}^i\dot{\vec{\omega}}_{j,i} - {}^i\dot{\vec{v}}_{O_{j,i}} \cdot \tilde{\omega}_{j,i} B'_{j,i} {}^i\dot{\vec{\omega}}_{j,i} + \frac{1}{2} {}^i\dot{\vec{\omega}}_{j,i} \cdot (B''_{j,i} + I_{G_{j,i}}) {}^i\dot{\vec{\omega}}_{j,i} + {}^i\dot{\vec{\omega}}_{j,i} \cdot \tilde{\omega}_{j,i} (B''_{j,i} + I_{G_{j,i}}) {}^i\dot{\vec{\omega}}_{j,i} \right] \quad (15)$$

که در آن

$$B'_{j,i} = M_{j,i} {}^i \tilde{r}_{G_{j,i}/O_{j,i}} \quad (16)$$

$$B''_{j,i} = M_{j,i} {}^i \tilde{r}_{G_{j,i}/O_{j,i}}^T {}^i \tilde{r}_{G_{j,i}/O_{j,i}} \quad (17)$$

با مشتق گیری از تابع انرژی شتاب به دست آمده در معادله (۱۵) نسبت به شبه شتابهای مستقل، ترمهای اینرسی در معادلات حرکت به صورت زیر حاصل می گردد:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{v}_P} = M_0 (\dot{v}_P - a \dot{\phi}^2) + \frac{2I_w}{R^2} \dot{v}_P + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^i \dot{v}_{O_{j,i}}}{\partial \dot{v}_P} \cdot {}^i \bar{S}_{j,i} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \dot{\phi}} = & \left(M_0 a^2 + \frac{2I_w}{R^2} b^2 + I_{G_0} \right) \ddot{\phi} + M_0 a v_P \dot{\phi} \\ & + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^i \dot{v}_{O_{j,i}}}{\partial \dot{\phi}} \cdot {}^i \bar{S}_{j,i} + \frac{\partial^i \dot{\omega}_{j,i}}{\partial \dot{\phi}} \cdot {}^i \bar{R}_{j,i} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}_{j,i}} = \sum_{k=i+1}^n \frac{\partial^k \dot{v}_{O_{j,k}}}{\partial \ddot{\theta}_{j,i}} \cdot {}^k \bar{S}_{j,k} + \sum_{k=i}^n \frac{\partial^k \dot{\omega}_{j,k}}{\partial \ddot{\theta}_{j,i}} \cdot {}^k \bar{R}_{j,k} \quad (20)$$

که در آن

$${}^k \bar{S}_{j,k} = M_{j,k} {}^k \dot{v}_{O_{j,k}} - B'_{j,k} {}^k \dot{\omega}_{j,k} - {}^k \tilde{\omega}_{j,k} B'_{j,k} {}^k \bar{\omega}_{j,k} \quad (21)$$

$${}^k \bar{R}_{j,k} = B'_{j,k} {}^k \dot{v}_{O_{j,k}} + (B''_{j,k} + I_{G_{j,k}}) {}^k \dot{\omega}_{j,k} + {}^k \tilde{\omega}_{j,k} (B'_{j,k} + I_{G_{j,k}}) {}^k \bar{\omega}_{j,k} \quad (22)$$

در ادامه به دنبال رابطه ای برای نیروهای تعمیم یافته وارد بر سیستم هستیم. اگر گشتاورهای خارجی اعمالی به این ربات همکار چرخدار محدود به τ_r, τ_l (گشتاور اعمالی به چرخ راست و چپ) و $\tau_{j,i}$ (گشتاور اعمالی به مفصل i ام از بازوی مکانیکی j ام) شود، آنگاه کار مجازی این گشتاورهای خارجی عبارتند از:

$$\delta W = \bar{\tau}_r \cdot \delta \bar{\theta}_r + \bar{\tau}_l \cdot \delta \bar{\theta}_l + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n \bar{\tau}_{j,i} \cdot \delta \bar{\theta}_{j,i} \quad (23)$$

با استفاده از رابطه (۶)، عبارت مربوط به کار مجازی سیستم بر حسب شبه سرعتها به صورت زیر حاصل می گردد:

$$\delta W = \frac{\delta \vec{r}_p + b \delta \vec{\phi}}{R} \cdot \vec{\tau}_r + \frac{\delta \vec{r}_p - b \delta \vec{\phi}}{R} \cdot \vec{\tau}_l + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n \delta \vec{\theta}_{j,i} \cdot \vec{\tau}_{j,i} \quad (24)$$

با مرتب کردن عبارت مربوط به کار مجازی بر حسب نیروهای تعمیم یافته داریم:

$$\delta W = \underbrace{\frac{\tau_r + \tau_l}{R}}_{Q_{v_p}} \delta r_p + \underbrace{\frac{b(\tau_r - \tau_l)}{R}}_{Q_{\dot{\phi}}} \delta \phi + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n \underbrace{\tau_{j,i}}_{Q_{\dot{\theta}_{j,i}}} \delta \theta_{j,i} \quad (25)$$

که در آن نیروهای تعمیم یافته Q_{v_p} ، $Q_{\dot{\phi}}$ و $Q_{\dot{\theta}_{j,i}}$ در رابطه (25) معرفی شده اند. اکنون $2n+2$ معادله دیفرانسیلی حرکت به فرم معکوس به صورت زیر ارائه می گردد:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{v}_p} = Q_{v_p} \quad (26)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\phi}} = Q_{\dot{\phi}} \quad (27)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\theta}_{j,i}} = Q_{\dot{\theta}_{j,i}} \quad j = 1, 2; i = 1, \dots, n \quad (28)$$

با بازنویسی معادلات (26) تا (28) به فرم مستقیم داریم:

$$I(\vec{\Theta}) \ddot{\vec{\Theta}} = \vec{Re}(\vec{\Theta}, \dot{\vec{\Theta}}) + \vec{\tau} \quad (29)$$

که در آن $I(\vec{\Theta})$ ماتریس اینرسی کل سیستم، $\vec{\Theta}$ بردار مربوط به شبه شتابها، $\vec{Re}(\vec{\Theta}, \dot{\vec{\Theta}})$ ترمهای شامل اثرات کوریولیس، جانب مرکز و گرانش و $\vec{\tau}$ بردار گشتاور اعمالی به مفاصل و چرخهای ربات همکار هستند که به صورت زیر ارائه می گردند.

$$I(\vec{\Theta}) = \begin{bmatrix} I_{1,1} & \cdots & I_{1,n} & I_{1,n+1} & \cdots & I_{1,2n} & I_{1,2n+1} & I_{1,2n+2} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & I_{n,n} & I_{n,n+1} & \cdots & I_{n,2n} & I_{n,2n+1} & I_{n,2n+2} \\ & & & I_{n+1,n+1} & \cdots & I_{n+1,2n} & I_{n+1,2n+1} & I_{n+1,2n+2} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Sym & & & & & I_{2n,2n} & I_{2n,2n+1} & I_{2n,2n+2} \\ & & & & & & I_{2n+1,2n+1} & I_{2n+1,2n+2} \\ & & & & & & & I_{2n+2,2n+2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

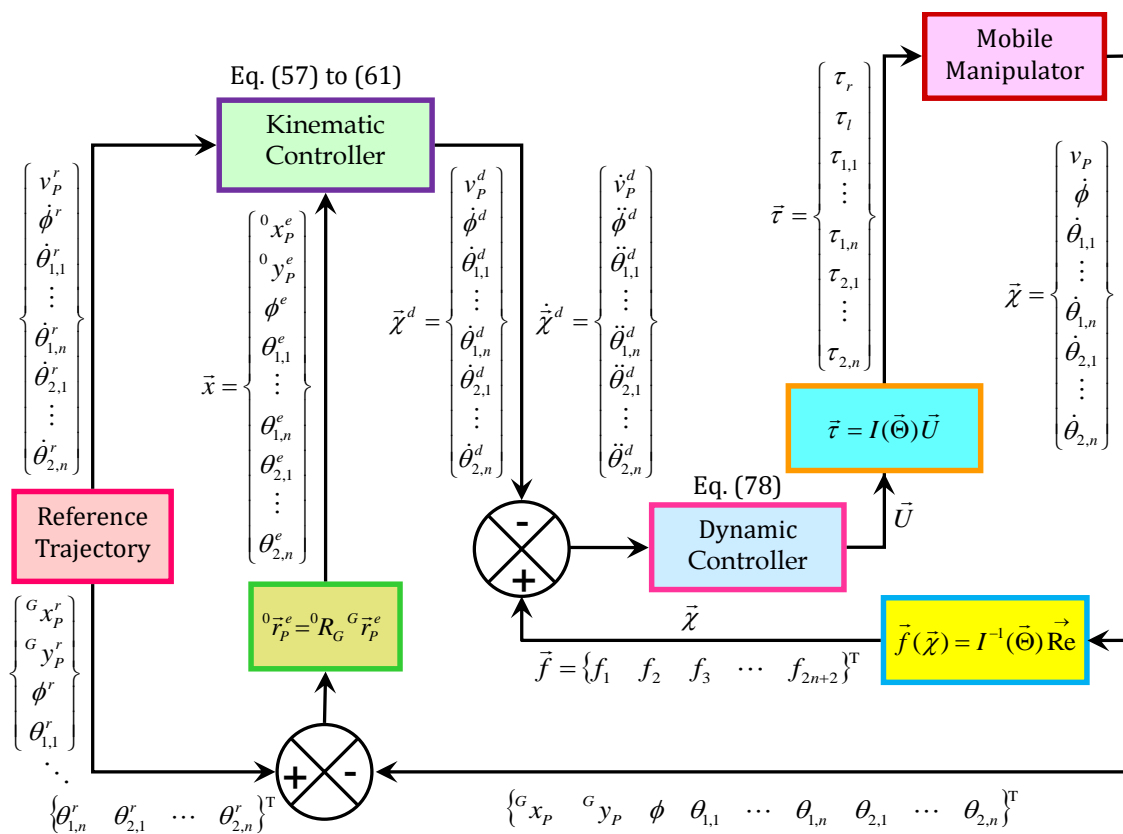
$$\ddot{\Theta} = \left\{ \ddot{v}_p \quad \ddot{\phi} \quad \ddot{\theta}_{1,1} \quad \dots \quad \ddot{\theta}_{1,n} \quad \ddot{\theta}_{2,1} \quad \dots \quad \ddot{\theta}_{2,n} \right\}^T \quad (31)$$

$$\bar{\tau} = \left\{ \frac{\tau_r + \tau_l}{R} \quad \frac{b(\tau_r - \tau_l)}{R} \quad \tau_{1,1} \quad \dots \quad \tau_{1,n} \quad \tau_{2,1} \quad \dots \quad \tau_{2,n} \right\}^T \quad (32)$$

$$\text{Re}(\ddot{\Theta}, \dot{\Theta}) = \left\{ \text{Re}_{\dot{v}_p} \quad \text{Re}_{\dot{\phi}} \quad \text{Re}_{\dot{\theta}_{1,1}} \quad \dots \quad \text{Re}_{\dot{\theta}_{1,n}} \quad \text{Re}_{\dot{\theta}_{2,1}} \quad \dots \quad \text{Re}_{\dot{\theta}_{2,n}} \right\}^T \quad (33)$$

۳- توصیف مسئله و طراحی سیستم کنترلی

برای درک بهتر مراحل طراحی سیستم کنترلی، دیاگرام بلوکی آن در شکل (۲) نشان داده شده است. همان گونه که در این شکل مشاهده می گردد، قانون کنترلی پیشنهادی در این تحقیق از دو قسمت سینماتیکی و دینامیکی تشکیل شده است. در ابتدا پس از تعریف مسیر مرجع و مشخص شدن خطای میان موقعیت مرجع و موقعیت واقعی ربات، یک کنترل کننده سینماتیکی طراحی می گردد. هدف از طراحی این کنترل کننده، تعیین سرعت های خطی و دورانی سیستم شامل v_p ، $\dot{\phi}$ و $\dot{\theta}_{j,i}$ به عنوان ورودی های کنترلی این بخش بگونه ای است تا خطاهای سیستم شامل خطای موقعیت پایه چرخدار (${}^0x_p^e, {}^0y_p^e, \phi^e$) و خطای موقعیت دورانی عضوهای بازوهای مکانیکی سمت راست و چپ ($\theta_{j,i}^e$) صفر شوند. سپس در بخش دوم بر روی طراحی کنترل کننده دینامیکی متمرکز می شویم.



شکل ۲- دیاگرام بلوکی سیستم کنترلی پیشنهادی شامل کنترل کننده های سینماتیکی و دینامیکی

در این بخش ورودی‌های کنترل‌کننده سینماتیکی به‌عنوان مقادیر مطلوب $(v_p^d, \dot{\phi}_{j,i}^d, \theta_{j,i}^d)$ در نظر گرفته می‌شوند که بایستی توسط ورودی‌های کنترل‌کننده دینامیکی ردیابی شوند. در واقع هدف از طراحی این بخش آن است تا با تعیین گشتاورهای ورودی به سیستم (شامل گشتاور اعمالی به چرخ‌های چپ و راست و نیز گشتاور اعمالی به عضوهای واقع شده در هر بازوی مکانیکی) کل سیستم شامل پایه چرخدار و نیز هر دو عملگر نهایی بازوهای مکانیکی، مسیرهای از پیش تعیین شده مرجع را ردیابی کنند.

۳-۱- فرمولاسیون خطای ردیابی مسیر

در ابتدا قبل از طراحی کنترل‌کننده سینماتیکی پایدارساز لازم است تا به استخراج روابط مربوط به خطای ردیابی مسیر (شامل خطای ردیابی پایه چرخدار و نیز خطای ردیابی دو عملگر نهایی بازوهای مکانیکی) بپردازیم. همانگونه که در شکل (۳) مشاهده می‌گردد، بردار \vec{r}_P^e بیانگر اختلاف میان موقعیت مرجع و موقعیت واقعی نقطه P از پایه چرخدار است که در دستگاه مختصات $x_0y_0z_0$ به‌صورت زیر توصیف می‌گردد:

$${}^0\vec{r}_P^e = {}^0R_G \left(G\vec{r}_P^r - G\vec{r}_P^a \right) = {}^0x_P^e \vec{x}_0 + {}^0y_P^e \vec{y}_0 \quad (34)$$

که در آن 0R_G ماتریس 3×3 ایست که دوران دو دستگاه مختصات $x_0y_0z_0$ و $X_GY_GZ_G$ را نسبت به یکدیگر توصیف می‌کند. همچنین اختلاف میان 0 موقعیت دورانی در دو وضعیت مرجع و واقعی برای پایه چرخدار و عضوهای هر دو بازوی مکانیکی به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\phi^e = \theta_{j,0}^e = \phi^r - \phi^a \quad (35)$$

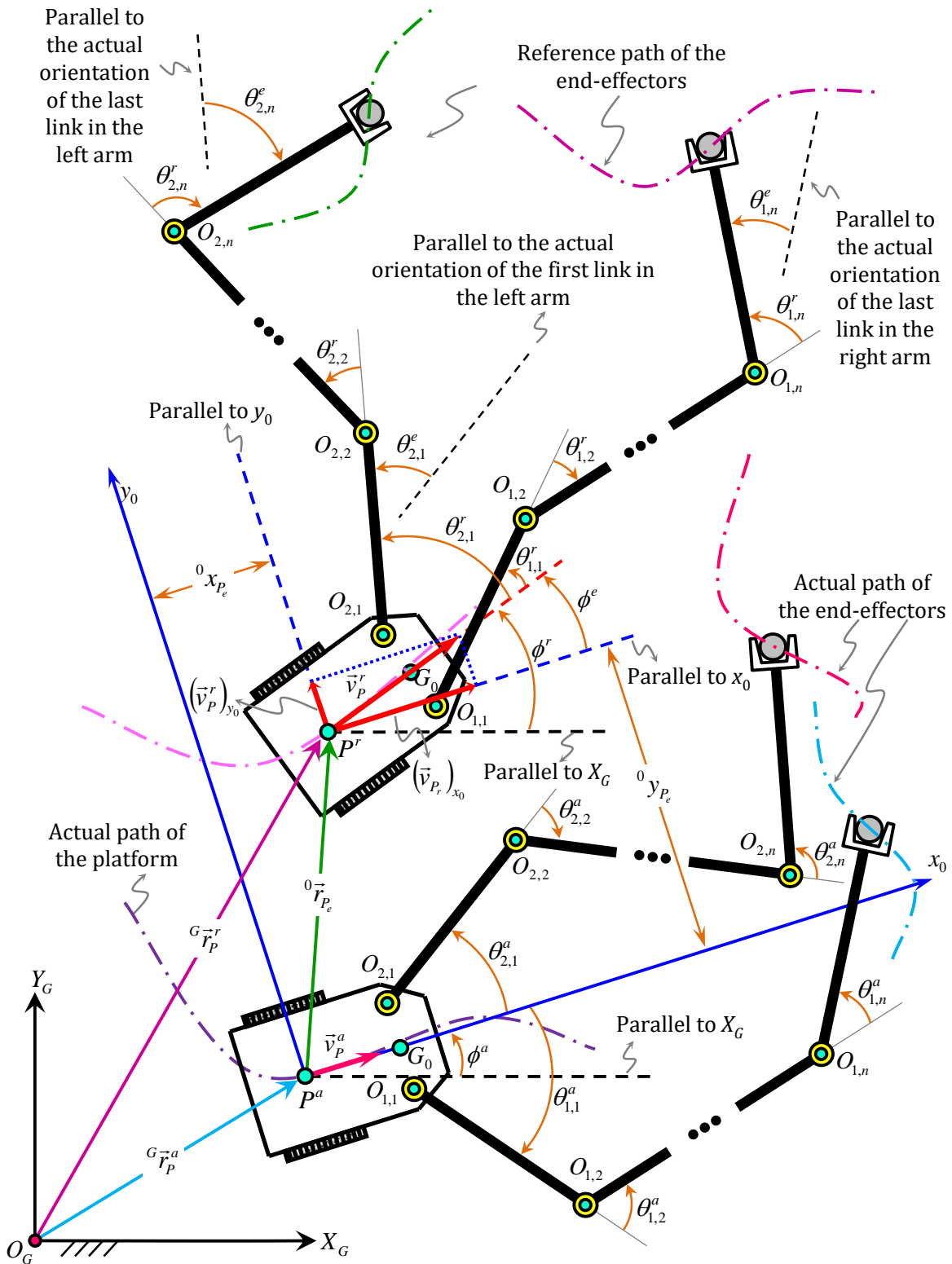
$$\theta_{j,i}^e = \theta_{j,i-1}^e + \theta_{j,i}^r - \theta_{j,i}^a \quad j=1,2; i=1,\dots,n \quad (36)$$

اختلاف میان سرعت مرجع نقطه P و سرعت واقعی این نقطه، با مشتق‌گیری از رابطه (۳۴) و نیز با بکارگیری تئوری انتقال، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$${}^0\dot{\vec{r}}_P^e = {}^0\dot{\vec{v}}_P^e = \left({}^0\dot{x}_P^e - {}^0y_P^e \dot{\phi}^a \right) \vec{x}_0 + \left({}^0\dot{y}_P^e + {}^0x_P^e \dot{\phi}^a \right) \vec{y}_0 \quad (37)$$

از سوی دیگر با توجه به شکل (۳)، اختلاف میان سرعت مرجع نقطه P و سرعت واقعی این نقطه به‌صورت رابطه زیر نیز قابل ارائه است:

$${}^0\dot{\vec{v}}_P^e = {}^0\dot{\vec{v}}_P^r - {}^0\dot{\vec{v}}_P^a = \left(v_P^r \cos \phi^e - v_P^a \right) \vec{x}_0 + v_P^r \sin \phi^e \vec{y}_0 \quad (38)$$



شکل ۳- موقعیت‌های واقعی و مرجع ربات متحرک

اکنون با مساوی قرار دادن معادلات (۳۷) و (۳۸)، نرخ تغییرات خطای موقعیت خطی پایه چرخدار نسبت به زمان مطابق رابطه زیر به دست می‌آید:

$${}^0\dot{x}_P^e = v_P^r \cos\phi^e - v_P^a + {}^0y_P^e \dot{\phi}^a \quad (39)$$

$${}^0 \dot{y}_p^e = v_p^r \sin \phi^e - {}^0 x_p^e \dot{\phi}^a \quad (40)$$

همچنین نرخ تغییرات خطای موقعیت دورانی پایه چرخدار و دو بازوی مکانیکی نصب شده بر روی این پایه با مشتق گیری از روابط (۳۵) و (۳۶) نسبت به زمان، به صورت زیر حاصل می گردد:

$$\dot{\phi}^e = \dot{\theta}_{j,0}^e = \dot{\phi}^r - \dot{\phi}^a \quad (41)$$

$$\dot{\theta}_{j,i}^e = \dot{\theta}_{j,i-1}^e + \dot{\theta}_{j,i}^r - \dot{\theta}_{j,i}^a \quad j=1,2; i=1,\dots,n \quad (42)$$

معادلات (۳۹) تا (۴۲)، که شامل $2n+3$ معادله دیفرانسیلی مرتبه اول می باشند، به عنوان معادلات خطای ردیابی مسیر معرفی می گردند. از این معادلات برای طراحی کنترل کننده سینماتیکی پایدار ساز استفاده خواهد شد که جزئیات آن در بخش بعد ارائه می گردد.

۳-۲- طراحی کنترل کننده سینماتیکی

به منظور توصیف سیستم در فضای حالت، بردار متغیرهای حالت و بردار ورودی های کنترلی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\bar{x} = \left\{ \underbrace{{}^0 x_p^e}_{x_1} \quad \underbrace{{}^0 y_p^e}_{x_2} \quad \underbrace{\phi^e}_{x_3} \quad \underbrace{\theta_{1,1}^e}_{x_4} \quad \dots \quad \underbrace{\theta_{1,n}^e}_{x_{n+3}} \quad \underbrace{\theta_{2,1}^e}_{x_{n+4}} \quad \dots \quad \underbrace{\theta_{2,n}^e}_{x_{2n+3}} \right\}^T \quad (43)$$

$$\bar{u} = \left\{ \underbrace{v_p^r}_{u_1} \quad \underbrace{\dot{\phi}^e}_{u_2} \quad \underbrace{\dot{\theta}_{1,1}^e}_{u_3} \quad \dots \quad \underbrace{\dot{\theta}_{1,n}^e}_{u_{n+2}} \quad \underbrace{\dot{\theta}_{2,1}^e}_{u_{n+3}} \quad \dots \quad \underbrace{\dot{\theta}_{2,n}^e}_{u_{2n+2}} \right\}^T \quad (44)$$

با توجه به متغیرهای تعریف شده در معادلات (۴۳) و (۴۴)، معادلات مربوط به خطای ردیابی مسیر که پیشتر در روابط (۳۹) تا (۴۲) ارائه گردید، بر حسب متغیرهای فضای حالت، به صورت زیر ارائه می گردد:

$$\dot{x}_1 = v_p^r \cos x_3 - u_1 + x_2 u_2 \quad (45)$$

$$\dot{x}_2 = v_p^r \sin x_3 - x_1 u_2 \quad (46)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\phi}^r - u_2 \quad (47)$$

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{i-1} + \dot{\theta}_{1,i-3}^r - u_{i-1} \quad i = 4, \dots, n+3 \quad (48)$$

$$\dot{x}_{n+4} = \dot{x}_3 + \dot{\theta}_{2,1}^r - u_{n+3} \quad (49)$$

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{i-1} + \dot{\theta}_{2,i-n-3}^r - u_{i-1} \quad i = n+5, \dots, 2n+3 \quad (50)$$

اکنون به دنبال طراحی یک کنترل کننده پایدار ساز سینماتیکی به گونه ای هستیم تا خطای میان موقعیت واقعی و مطلوب این ربات همکار به سمت صفر میل کند (یعنی اگر $t \rightarrow \infty$ آنگاه $\bar{x} \rightarrow \bar{0}$). در بحث مربوط به پایدار سازی یک سیستم، می توان خروجی های سیستم را به نحوی انتخاب کرد تا سیستم مورد مطالعه تحت اثر کنترل کننده فیدبک طراحی شده پایدار گردد. بدین منظور خروجی های سیستم به صورت زیر تعریف می شوند:

$$y_1 = x_1 - \beta x_2 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}^r) \quad (51)$$

$$y_i = x_{i+1} \quad i = 2, \dots, 2n+2 \quad (52)$$

که در آن β یک ثابت با مقدار بزرگتر از صفر است. در ادامه با استفاده از روش کنترل پیش بین، به دنبال طراحی کنترل کننده سینماتیکی هستیم تا به صفر شدن خروجی های تعریف شده در روابط (51) و (52) منجر گردد. برای این منظور ابتدا پاسخ خروجی سیستم با استفاده از بسط تیلور برای بازه زمانی بعدی پیش بینی می شود. سپس ورودی های کنترلی فعلی با کمینه کردن یک شاخص عملکرد که در برگیرنده خروجی ها و انرژی کنترلی سیستم است، تعیین می شوند [26-28]. بسط سری تیلور تا مرتبه k_i برای خروجی y_i عبارت است از:

$$y_i(t+h) = y_i(t) + h\dot{y}_i(t) + \frac{h^2}{2!}\ddot{y}_i(t) + \dots + \frac{h^{k_i}}{k!}y_i^{(k_i)}(t) \quad (53)$$

که در آن h زمان پیش بین است. در اینجا به دنبال تعیین مرتبه بسط سری تیلور یعنی k_i هستیم. می دانیم که مرتبه k_i برابر با مرتبه کنترلی به علاوه درجه نسبی سیستم است. درجه نسبی هر خروجی y_i ، عبارت است از کمترین مرتبه مشتق آن خروجی؛ به گونه ای که به ازاء آن، ورودی برای اولین بار به صورت صریح ظاهر شود. از سوی دیگر مرتبه کنترلی، درجه چند جمله ای ورودی کنترلی در بازه زمانی پیش بین h می باشد. برای سیستم ها با درجه نسبی پایین (مثلاً درجات نسبی کمتر از چهار که سیستم های خوش تعریف نامیده می شوند)، با مرتبه کنترلی صفر نتایج خوبی حاصل می گردد. زیرا این امر باعث می شود تا مشتق ورودی کنترلی در پیش بینی هر خروجی صفر شود. لذا در این حالت عملکرد نسبتاً مناسبی برای

سیستم‌های غیرخطی با درجات نسبی پایین حاصل می‌شود. بنابراین با توجه به خروجی‌های سیستم و معادلات (۴۵) تا (۵۰) درجه نسبی سیستم نسبت به هر خروجی برابر یک است. از طرفی با توجه به انتخاب مرتبه کنترلی صفر، مرتبه k_i در بسط سری تیلور برای هر خروجی برابر یک می‌گردد. در نتیجه داریم:

$$y_i(t+h) = y_i(t) + h\dot{y}_i(t) \quad i=1, \dots, 2n+2 \quad (54)$$

شاخص عملکرد، که خروجی‌های پیش‌بینی شده آتی را جریمه می‌کند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n+2} w_i y_i^2(t+h) \quad (55)$$

که در آن w_i ها ضرایب وزنی مربوط به خروجی‌ها هستند. از آنجاکه در تابع هدف ارائه شده، ورودی‌های کنترلی ظاهر نشده‌اند (استراتژی کنترل ارزان)، لذا مسئله ردیابی کامل مسیر بدون هیچ‌گونه محدودیتی بر روی ورودی‌های کنترلی انجام می‌پذیرد.

با مشتق‌گیری از روابط (۵۱) و (۵۲) و جایگذاری روابط حاصله در معادله (۵۴)، توابع خروجی در لحظه $t+h$ بر حسب متغیرهای حالت و ورودی‌های کنترلی تعیین می‌گردد. اکنون با در اختیار داشتن این توابع و جایگذاری آنها در رابطه (۵۵)، شاخص عملکرد به صورت تابعی از ورودی‌های کنترلی خواهد شد. با اعمال شرط لازم برای بهینگی داریم:

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u_i} = 0 \quad i=1, \dots, 2n+2 \quad (56)$$

بدین ترتیب قوانین کنترلی به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$u_1 = \frac{1}{h} \left[x_1 - \beta x_2 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}^r) + h v_p^r (\cos x_3 - \beta \sin x_3 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}^r)) + (x_2 + \beta x_1 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}^r))(x_3 + h\dot{\phi}^r) \right] \quad (57)$$

$$u_2 = \frac{1}{h} (x_3 + h\dot{\phi}^r) \quad (58)$$

$$u_i = \dot{\theta}_{1,i-2}^r + \frac{1}{h} (x_{i+1} - x_i) \quad i=3, \dots, n+2 \quad (59)$$

$$u_{n+3} = \dot{\theta}_{2,1}^r + \frac{1}{h} (x_{n+4} - x_3) \quad (60)$$

$$u_i = \dot{\theta}_{2,i-n-2}^r + \frac{1}{h}(x_{i+1} - x_i) \quad i = n+4, \dots, 2n+2 \quad (61)$$

لازم به ذکر است که در طراحی صورت گرفته، برای اینکه نشان دهیم تمامی خروجی های کنترلی از اهمیت یکسانی برخوردار هستند، همه ضرائب وزنی $w_i; i=1, \dots, 2n+2$ برابر یک در نظر گرفته شده اند. در ادامه پایداری سیستم تحت اعمال ورودی های کنترلی ارائه شده در روابط (57) تا (61) اثبات می گردد. بدین منظور، روابط (45) و (46) در مشتق خروجی اول (یعنی رابطه (51)) جایگزین می گردد. لذا داریم:

$$\dot{y}_1 = v_p^r \cos x_3 - u_1 + x_2 u_2 - \beta \operatorname{sgn}(\dot{\phi}^r) (v_p^r \sin x_3 - x_1 u_2) \quad (62)$$

با جایگذاری u_1 و u_2 از معادله (57) و (58) در معادله فوق داریم:

$$\dot{y}_1 + \frac{1}{h} y_1 = 0 \quad (63)$$

با جایگذاری دیگر ورودی های به دست آمده (روابط (59) تا (61)) در مشتق دیگر خروجی های سیستم (یعنی $\dot{y}_i; i=2, \dots, 2n+2$)، دقیقاً نتیجه به دست آمده در رابطه (63) تکرار می گردد. به عبارتی داریم:

$$\dot{y}_i + \frac{1}{h} y_i = 0 \quad i = 2, \dots, 2n+2 \quad (64)$$

در روابط (63) و (64) به ازاء h های مثبت داریم:

$$\text{if } t \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} y_1 \rightarrow 0 & \xrightarrow{\text{Eq. (51)}} x_1 \rightarrow \beta x_2 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}^r) \\ y_i \rightarrow 0 & \xrightarrow{\text{Eq. (52)}} x_{i+1} \rightarrow 0 \quad i = 2, \dots, 2n+2 \end{cases} \quad (65)$$

حال اگر قوانین کنترلی به دست آمده در روابط (57) تا (61) در معادلات خطای ردیابی (روابط (45) تا (50)) جایگذاری گردد؛ و به طور همزمان از نتایج به دست آمده در رابطه (65) نیز استفاده گردد، آنگاه داریم:

$$\dot{x}_i + \beta \dot{\phi}^r \operatorname{sgn}(\dot{\phi}^r) x_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (66)$$

$$\dot{x}_i + \frac{1}{h} x_i = 0 \quad i = 3, \dots, 2n+2 \quad (67)$$

معادله (۶۶) برای هر $\dot{\phi}^r \neq 0$ و $\beta > 0$ به صورت نمایی پایدار است. از طرفی معادله (۶۷) نیز برای هر $h > 0$ پایدار است؛ بدین معنا که با گذشت زمان تمامی خطاهای ردیابی مسیر یعنی $x_i; i=1, \dots, 2n+3$ به سمت صفر میل می کنند. از این رو هدف ردیابی مسیر حرکت محقق می گردد. در ادامه در بخش بعدی، با طراحی یک کنترل کننده دینامیکی به دنبال آن هستیم تا ورودی های کنترلی به دست آمده در این بخش (روابط (۵۷) تا (۶۱))، به عنوان مقادیر مطلوب، ردیابی گردند.

۳-۳- طراحی کنترل کننده دینامیکی

در این بخش یک کنترل کننده دینامیکی با استفاده از روش کنترل غیرخطی پیش بین طراحی می گردد. هدف از طراحی این کنترل کننده، تعیین گشتاورهای کنترلی به منظور اعمال به سیستم رباتیکی مورد مطالعه در این مقاله است. فرم فضای حالت معادلات دینامیکی حرکت این سیستم رباتیکی که پیشتر توسط معادلات (۲۹) ارائه گردید، به صورت زیر می باشد:

$$\dot{\chi}_i = f_i(\bar{\chi}) + U_i \quad i = 1, \dots, 4n+3 \quad (68)$$

که در آن متغیرهای حالت و بردارهای $\bar{f}(\bar{\chi})$ و \bar{U} به صورت زیر تعریف می گردند:

$$\bar{\chi} = \left\{ \underbrace{v_P}_{\chi_1}, \underbrace{\phi}_{\chi_2}, \underbrace{\dot{\phi}}_{\chi_3}, \underbrace{\theta_{1,1}}_{\chi_4}, \underbrace{\dot{\theta}_{1,1}}_{\chi_5}, \dots, \underbrace{\theta_{1,n}}_{\chi_{2n+2}}, \underbrace{\dot{\theta}_{1,n}}_{\chi_{2n+3}}, \underbrace{\theta_{2,1}}_{\chi_{2n+4}}, \underbrace{\dot{\theta}_{2,1}}_{\chi_{2n+5}}, \dots, \underbrace{\theta_{2,n}}_{\chi_{4n+2}}, \underbrace{\dot{\theta}_{2,n}}_{\chi_{4n+3}} \right\}^T \quad (69)$$

$$\ddot{\Theta} = I^{-1}(\bar{\Theta})\vec{Re} + I^{-1}(\bar{\Theta})\vec{\tau} \Rightarrow \ddot{\Theta} = \bar{f}(\bar{\chi}) + \bar{U} \quad (70)$$

همانگونه که پیشتر نیز گفته شد، هدف از این بخش تعیین گشتاورهای اعمالی به سیستم به گونه ای است تا مقادیر ورودی های کنترل کننده سینماتیکی در بخش قبل ردیابی شوند. بدین منظور بردار خروجی های مطلوب سیستم به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\bar{Y}^d = \left\{ \underbrace{v_P^d}_{Y_1^d}, \underbrace{\dot{\phi}^d}_{Y_2^d}, \underbrace{\dot{\theta}_{1,1}^d}_{Y_3^d}, \dots, \underbrace{\dot{\theta}_{1,n}^d}_{Y_n^d}, \underbrace{\dot{\theta}_{2,1}^d}_{Y_{n+1}^d}, \dots, \underbrace{\dot{\theta}_{2,n}^d}_{Y_{2n+2}^d} \right\}^T \quad (71)$$

خطای ردیابی در زمان $t + \hbar$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\varepsilon_i(t + \hbar) = Y_i(t + \hbar) - Y_i^d(t + \hbar) \quad i = 1, \dots, 2n+2 \quad (72)$$

که در آن \hbar افق پیش بین است. با توجه به رابطه (۷۲) نیاز است تا خروجی های واقعی و مطلوب سیستم توسط بسط تیلور پیش بینی گردند. با توجه به معادلات سیستم و توضیحاتی که در مورد مرتبه کنترلی و

درجه نسبی سیستم در بخش قبل ارائه گردید، از بسط مرتبه اول سری تیلور برای پیش‌بینی خروجی‌های سیستم و مقادیر مطلوبشان در بازه زمانی بعدی استفاده می‌گردد. در این صورت داریم:

$$Y_i(t + \hbar) = Y_i(t) + \hbar \dot{Y}_i(t) = \chi_i + \hbar \dot{\chi}_i = \chi_i + \hbar(f_i + U_i) \quad (73)$$

$$Y_i^d(t + \hbar) = Y_i^d(t) + \hbar \dot{Y}_i^d(t) = \chi_i^d + \hbar \dot{\chi}_i^d \quad (74)$$

اکنون با جایگذاری روابط (73) و (74) در رابطه (72)، خطای ردیابی به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\varepsilon_i(t + \hbar) = (\chi_i - \chi_i^d) + \hbar(f_i + U_i - \dot{\chi}_i^d) \quad (75)$$

در اینجا نیز از یک تابع عملکرد درجه دوم بر حسب خطای ردیابی به صورت زیر استفاده می‌گردد:

$$\mathfrak{J}(\bar{U}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n+2} \psi_i \varepsilon_i^2(t + \hbar) \quad (76)$$

که در آن ضرایب وزنی ψ_i ها مقادیر مثبتی فرض می‌شوند. اکنون با جایگذاری رابطه (75) در معادله (76) داریم:

$$\mathfrak{J}(\bar{U}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n+2} \psi_i [(\chi_i - \chi_i^d) + \hbar(f_i + U_i - \dot{\chi}_i^d)]^2 \quad (77)$$

حال با اعمال شرط بهینگی $\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial U_i} = 0; i = 1, \dots, 2n+2$ و انتخاب $\psi_i = 1; i = 1, \dots, 2n+2$ مقادیر U_i ها به صورت زیر حاصل می‌گردند:

$$U_i = -\frac{1}{\hbar} [\varepsilon_i + \hbar(f_i - \dot{\chi}_i^d)] \quad i = 1, \dots, 2n+2 \quad (78)$$

اکنون با پیدا کردن قوانین کنترلی دینامیکی ارائه شده در رابطه (78) و با در اختیار داشتن ماتریس اینرسی سیستم یعنی $I(\bar{\Theta})$ ، بردار گشتاورهای اعمالی به سیستم با استفاده از رابطه $\bar{\tau} = I(\bar{\Theta})\bar{U}$ تعیین می‌گردد. با داشتن این بردار که درایه‌های آن پیشتر در رابطه (32) ارائه شده بود، می‌توان گشتاورهای اعمالی به چرخ‌های پایه سیار و مفاصل دو بازوی مکانیکی را محاسبه نمود.

$$\tau_r = \frac{R}{2b} [b \bar{\tau}(1,1) + \bar{\tau}(2,1)] \quad (79)$$

$$\tau_i = \frac{R}{2b} [b\bar{\tau}(1,1) - \bar{\tau}(2,1)] \quad (۸۰)$$

$$\tau_{1,i} = \bar{\tau}(i+2,1) \quad i=1, \dots, n \quad (۸۱)$$

$$\tau_{2,i} = \bar{\tau}(i+n+2,1) \quad i=1, \dots, n \quad (۸۲)$$

در ادامه پایداری سیستم حلقه بسته استخراج شده مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با اعمال قوانین کنترلی به دست آمده از مقادیر نامی (معادله (۷۸)) در مدل واقعی سیستم (رابطه (۶۸))، رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\dot{\chi}_i = f_i - \frac{1}{h} [\varepsilon_i + h(\hat{f}_i - \chi_i^d)] \quad i=1, \dots, 2n+2 \quad (۸۳)$$

که علامت « \wedge » بیانگر مقادیر نامی است. با مرتب کردن رابطه (۸۳)، معادله زیر به دست می‌آید.

$$\dot{\chi}_i - \dot{\chi}_i^d + \frac{1}{h} \varepsilon_i = f_i - \hat{f}_i \quad i=1, \dots, 2n+2 \quad (۸۴)$$

رابطه (۸۴) بر حسب خطای ردیابی به صورت رابطه زیر ارائه می‌گردد:

$$\dot{\varepsilon}_i + \frac{1}{h} \varepsilon_i = f_i - \hat{f}_i \quad i=1, \dots, 2n+2 \quad (۸۵)$$

برای مقادیر مشخصی از عدم قطعیت‌ها، اختلاف بین f_i و \hat{f}_i توسط یک مقدار ثابت یعنی $H_i > 0$ به صورت زیر محدود می‌شود.

$$|f_i - \hat{f}_i| < H_i \quad i=1, \dots, 2n+2 \quad (۸۶)$$

با اعمال کران به دست آمده از معادله (۸۶) در سمت راست دینامیک خطای ردیابی، رابطه زیر حاصل می‌گردد.

$$\dot{\varepsilon}_i + \frac{1}{h} \varepsilon_i \leq H_i \quad i=1, \dots, 2n+2 \quad (۸۷)$$

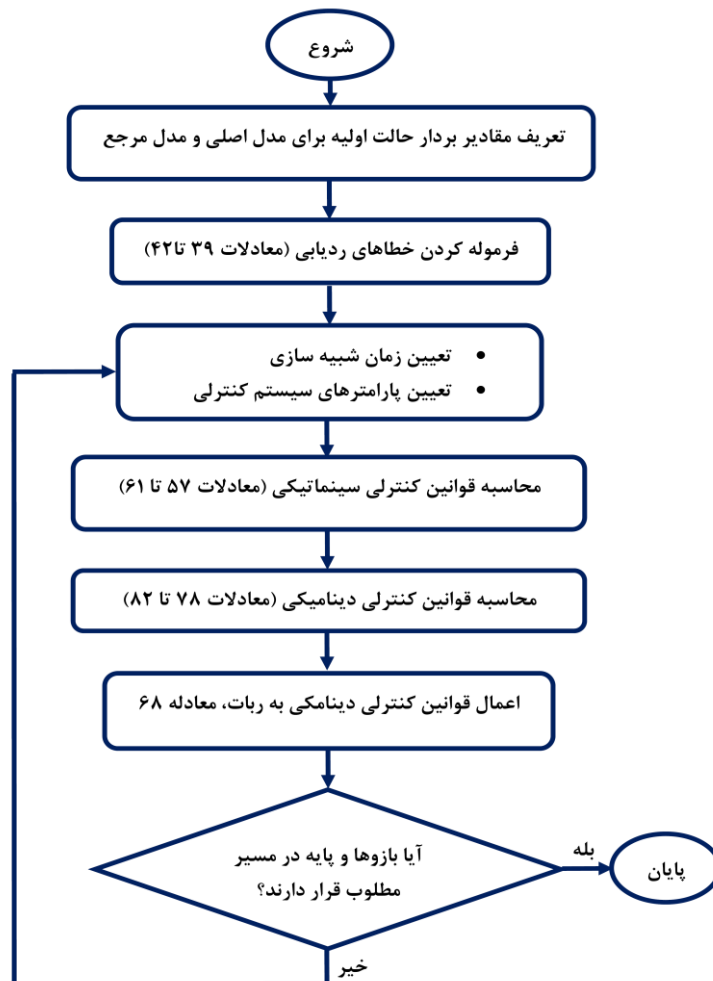
بدیهی است معادلات دیفرانسیلی خطای ارائه شده توسط رابطه (۸۷) نیز دارای پاسخ‌هایی کراندار هستند. با مساوی صفر قرار دادن ترم‌هایی از معادله (۸۷) که در آنها مشتق نسبت به زمان ظاهر شده است، پاسخ حالت ماندگار سیستم به صورت رابطه (۸۸) حاصل می‌گردد.

$$\varepsilon_i \leq hH_i \quad i = 1, \dots, 2n+2 \quad (88)$$

تحلیل حالت یکنواخت نشان می‌دهد که عدم قطعیت‌ها باعث ایجاد خطای ماندگار در پاسخ سیستم می‌شوند. با این وجود، با تنظیم مناسب پارامتر h ، می‌توان یک مصالحه بین کاهش خطای ماندگار و مقدار ورودی‌های کنترلی به وجود آورد. در حالت خاصی که هیچ‌گونه نامعینی وجود نداشته باشد، سمت راست معادله (۸۵) صفر شده و لذا خواهیم داشت:

$$\dot{\varepsilon}_i + \frac{1}{h} \varepsilon_i = 0 \quad i = 1, \dots, 2n+2 \quad (89)$$

معادله فوق نشان می‌دهد که دینامیک سیستم حلقه بسته به ازاء $h > 0$ به صورت نمایی پایدار است. در این حالت خاص، قانون کنترلی منجر به خطی‌سازی ورودی-خروجی می‌گردد. طبق معادله (۸۹)، هنگامی که خطای اولیه صفر باشد، ردیابی کامل برای تمامی زمان‌ها بدست می‌آید. شکل (۴) نمودار جریان‌ی طراحی سیستم کنترلی را نشان می‌دهد.



شکل ۴- نمودار جریان‌ی طراحی سیستم کنترلی

۴- نتایج شبیه‌سازی

در این قسمت نتایج شبیه‌سازی انجام شده با استفاده از سیمولینک نرم‌افزار متلب برای نشان دادن عملکرد سیستم کنترلی طراحی شده به‌منظور ردیابی مسیر مطلوب تعیین شده برای پایه چرخدار و نیز دو بازوی مکانیکی نصب شده بر روی آن (که هر یک از دو عضو صلب تشکیل شده‌اند) بررسی خواهد شد. مقادیر نامی برای ربات همکار متحرک مورد مطالعه در این مقاله در جدول (۱) ارائه شده است. لازم به ذکر است مقادیر مربوط به پایه متحرک بر اساس ربات اسکات موجود در آزمایشگاه تحقیقاتی رباتیک دانشگاه علم و صنعت ایران انتخاب شده است.

مسیرهای مرجع به‌ترتیب برای پایه چرخدار و مجری نهایی بازوی سمت راست (بازوی مکانیکی با زیرنویس (۱)) و بازوی سمت چپ (بازوی مکانیکی با زیرنویس (۲)) به‌صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$\begin{aligned}x_p^r &= \sin(0.6t) \\ y_p^r &= \sin(1.2t)\end{aligned}\quad (90)$$

$$\begin{aligned}x_{E_1}^r &= 2 + \sin^3 t \\ y_{E_1}^r &= 1 + 0.924 \cos t - 0.33 \cos 2t - 0.198 \cos 3t - 0.066 \cos 4t\end{aligned}\quad (91)$$

$$\begin{aligned}x_{E_2}^r &= -2 + \sin^3 t \\ y_{E_2}^r &= 1 + 0.924 \cos t - 0.33 \cos 2t - 0.198 \cos 3t - 0.066 \cos 4t\end{aligned}\quad (92)$$

جدول ۱- پارامترهای مورد نیاز جهت شبیه‌سازی ربات متحرک با دو بازوی مجزای دو عضوی

پارامترها	مقادیر
طول اعضا	$l_{1,1} = l_{1,2} = l_{2,1} = l_{2,2} = 2.5 m$
جرم اعضا	$M_{1,1} = M_{1,2} = M_{2,1} = M_{2,2} = 0.25 Kg$
جرم پایه و چرخها	$M_0 = 6.64 Kg$
ممان اینرسی جرمی پایه و چرخها حول محور z_0	$I_{G_0} = 0.06363 Kg \cdot m^2$
ممان اینرسی چرخها	$I_w = 0.001 Kg \cdot m^2$
شعاع چرخها	$R = 0.08 m$
فاصله بین نقاط P و G_0	$a = 0.2 m$
فاصله بین نقطه P و مرکز چرخها	$b = 0.2 m$
فاصله بین نقطه G_0 و A	$c = 0.1 m$

سرعت‌های مرجع خطی و دورانی پایه چرخدار به صورت زیر حاصل می‌گردند:

$$v_p^r = \left((\dot{x}_p^r)^2 + (\dot{y}_p^r)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (93)$$

$$\phi^r = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}_p^r}{\dot{x}_p^r} \right) \xrightarrow{\text{diff}} \dot{\phi}^r = \frac{\ddot{y}_p^r \dot{x}_p^r - \ddot{x}_p^r \dot{y}_p^r}{(\dot{x}_p^r)^2 + (\dot{y}_p^r)^2} \quad (94)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که موقعیت دورانی مرجع مفاصل اول و دوم در بازوهای سمت راست و چپ به صورت روابط (۹۵) تا (۹۸) ارائه می‌گردند.

$$\theta_{1,1}^r(t) = \tan^{-1} \left(\frac{Y_1^r}{X_1^r} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{K_{1,2}}{K_{1,1}} \right) - \phi^r \quad (95)$$

$$\theta_{1,2}^r(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\cos \theta_{1,2}^r}{\sin \theta_{1,2}^r} \right) \quad (96)$$

$$\theta_{2,1}^r(t) = \tan^{-1} \left(\frac{Y_2^r}{X_2^r} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{K_{2,2}}{K_{2,1}} \right) - \phi^r \quad (97)$$

$$\theta_{2,2}^r(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\cos \theta_{2,2}^r}{\sin \theta_{2,2}^r} \right) \quad (98)$$

که در آن

$$\begin{aligned} X_1^r &= x_{E_1}^r - x_p^r - a \cos \phi^r - c \sin \phi^r \\ Y_1^r &= y_{E_1}^r - y_p^r - a \sin \phi^r + c \cos \phi^r \\ X_2^r &= x_{E_2}^r - x_p^r - a \cos \phi^r + c \sin \phi^r \\ Y_2^r &= y_{E_2}^r - y_p^r - a \sin \phi^r - c \cos \phi^r \\ \cos \theta_{1,2}^r &= \frac{(X_1^r)^2 + (Y_1^r)^2 - l_{1,1}^2 - l_{1,2}^2}{2l_{1,1}l_{1,2}} \\ \sin \theta_{1,2}^r &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{1,2}^r} \\ \cos \theta_{2,2}^r &= \frac{(X_2^r)^2 + (Y_2^r)^2 - l_{2,1}^2 - l_{2,2}^2}{2l_{2,1}l_{2,2}} \\ \sin \theta_{2,2}^r &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{2,2}^r} \end{aligned} \quad (99)$$

$$K_{1,1} = l_{1,1} + l_{1,2} \cos \theta_{1,2}^r$$

$$K_{1,2} = l_{1,2} \sin \theta_{1,2}^r$$

$$K_{2,1} = l_{2,1} + l_{2,2} \cos \theta_{2,2}^r$$

$$K_{2,2} = l_{2,2} \sin \theta_{2,2}^r$$

اکنون با در اختیار داشتن $\theta_{1,1}^r, \theta_{1,2}^r, \theta_{2,1}^r$ و $\theta_{2,2}^r$ ، سرعت‌های دورانی مرجع مفاصل اول و دوم در بازوهای سمت راست و چپ با مشتق‌گیری عددی از معادلات (۹۵) تا (۹۸) حاصل می‌گردند. در جدول (۲)، موقعیت‌های اولیه به انضمام سرعت‌های اولیه ربات مرجع و ربات واقعی ارائه شده‌اند. اختلاف نسبتاً زیاد بین مقادیر واقعی و مرجع تنها به‌منظور بررسی عملکرد کنترلر طراحی شده در مواجهه با مقادیر بزرگ خطا انتخاب شده است.

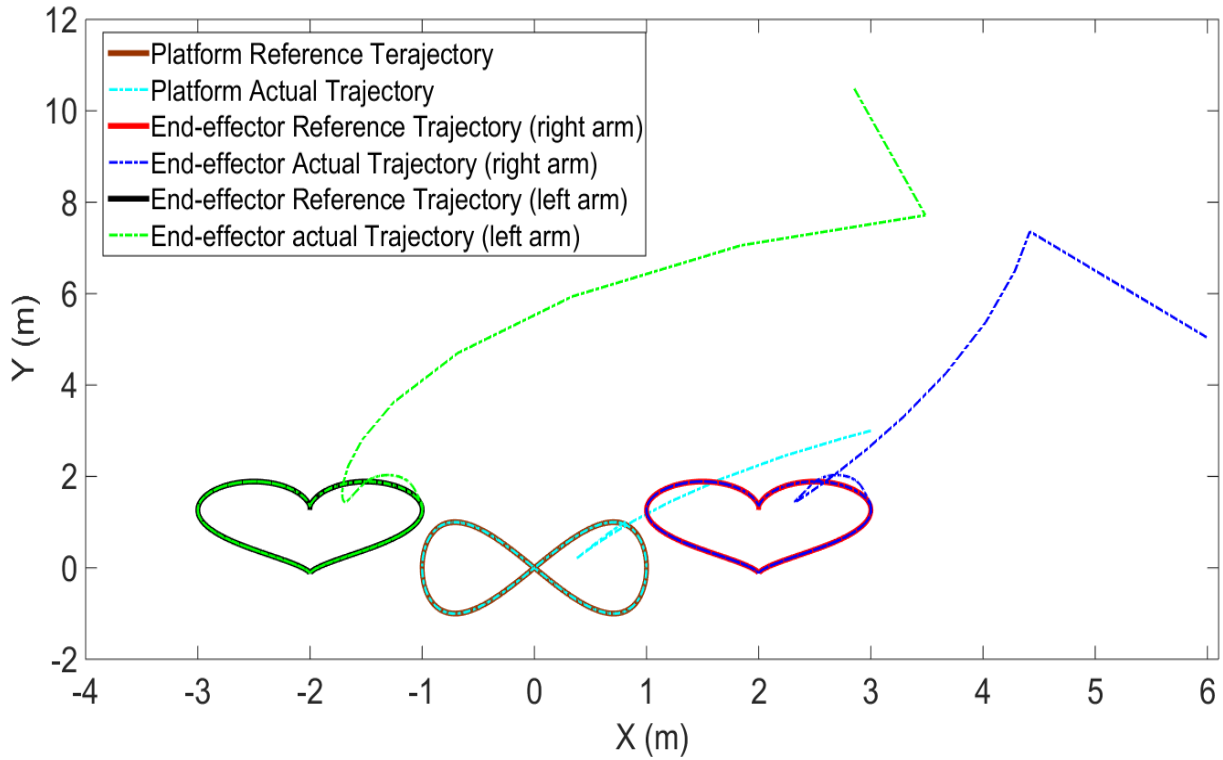
همچنین پارامترهای آزاد قوانین کنترلی به‌صورت $h = \dot{h} = 0.01s$ و $\beta = 2$ انتخاب می‌شوند. شکل (۵) مسیر واقعی و مسیر مرجع پایه چرخدار و مجری نهایی بازوهای مکانیکی سمت راست و چپ را نشان می‌دهد. از طرفی خطاهای ردیابی برای موقعیت و جهت‌گیری پایه چرخدار و بازوهای ربات $({}^0x_p^e, {}^0y_p^e, \phi^e, \theta_{1,1}^e, \theta_{1,2}^e, \theta_{2,1}^e, \theta_{2,2}^e)$ در شکل (۶) نشان داده شده‌اند. همانگونه که مشاهده می‌گردد، قوانین کنترلی سینماتیکی ارائه شده در بخش قبل با استفاده از معادلات (۵۷) تا (۶۱) ردیابی مسیر هدف را با دقت قابل قبولی انجام می‌دهند.

همانگونه که قبلاً اشاره شد، سرعت خطی و دورانی مطلوب پایه چرخدار و نیز سرعت‌های دورانی مطلوب عضوهای ربات با اعمال قوانین کنترل سینماتیکی که توسط روابط (۵۷) تا (۶۱) ارائه گردید، محاسبه می‌شوند. شکل (۷) توانایی کنترل‌کننده دینامیکی ارائه شده در معادله (۷۸) را در ردیابی مؤثر پاسخ‌های مطلوب $(v_p^d, \dot{\phi}^d, \dot{\theta}_{1,1}^d, \dot{\theta}_{1,2}^d, \dot{\theta}_{2,1}^d, \dot{\theta}_{2,2}^d)$ نشان می‌دهد.

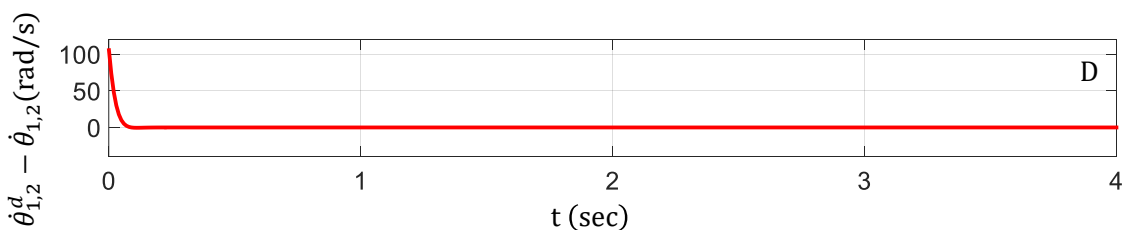
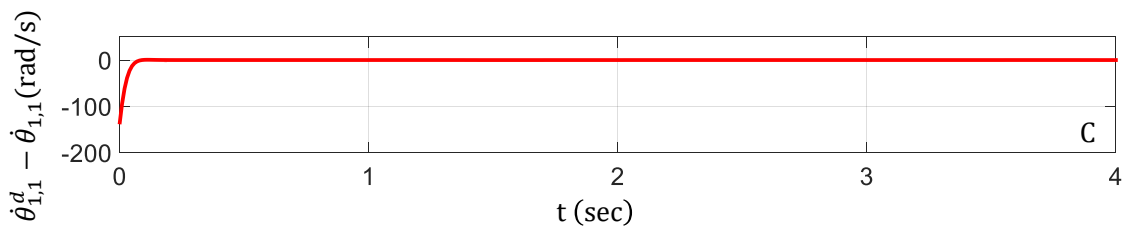
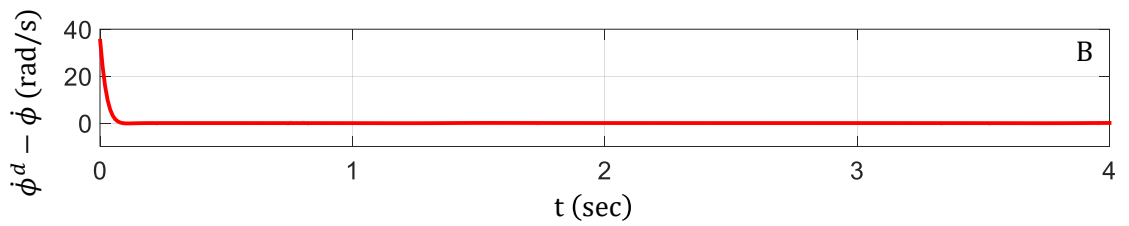
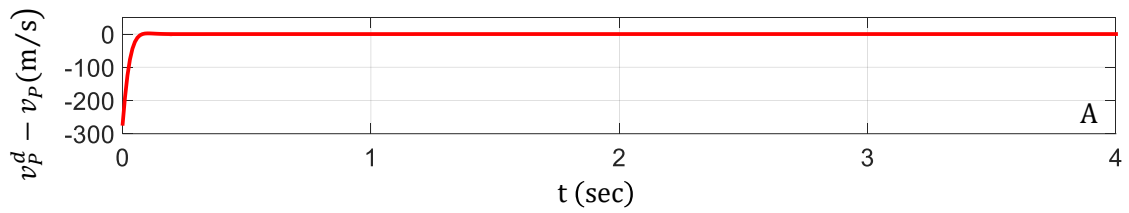
در پایان در شکل (۸)، گشتاورهای اعمالی به چرخ‌های سمت راست و چپ و نیز گشتاور اعمالی به مفاصل اول و دوم بازوهای مکانیکی ربات را نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، ورودی‌های کنترلی به‌دست‌آمده توابعی نرم هستند و لذا برای اهداف کاربردی مناسب به نظر می‌رسند.

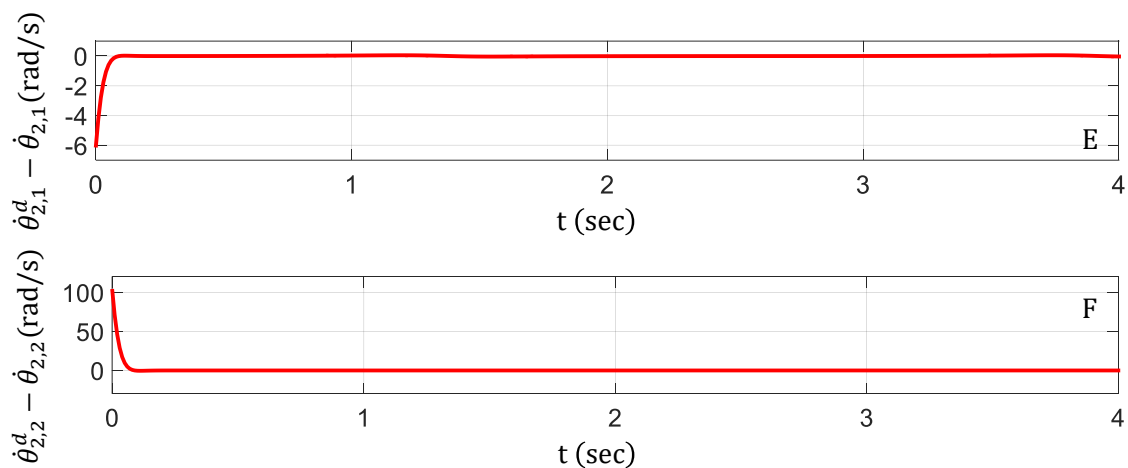
جدول ۲- موقعیت‌ها و سرعت‌های اولیه برای ربات مرجع و ربات واقعی

ربات واقعی	ربات مرجع
$(x_p, y_p) _{t=0} = (3, 3)m$	$(x_p^r, y_p^r) _{t=0} = (0, 0)m$
$(\phi, \theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \theta_{2,1}, \theta_{2,2}) _{t=0}$ $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})rad$	$(\phi^r, \theta_{1,1}^r, \theta_{1,2}^r, \theta_{2,1}^r, \theta_{2,2}^r) _{t=0}$ $= (1.10, -1.64, 2.23, 0.43, 2.19)rad$
$v_p _{t=0} = 1m/s$	$v_p^r _{t=0} = 1.3416m/s$
$(\dot{\phi}, \dot{\theta}_{1,1}, \dot{\theta}_{1,2}, \dot{\theta}_{2,1}, \dot{\theta}_{2,2})$ $= (1, 1, 1, 1, 1)rad/s$	$(\dot{\phi}^r, \dot{\theta}_{1,1}^r, \dot{\theta}_{1,2}^r, \dot{\theta}_{2,1}^r, \dot{\theta}_{2,2}^r)$ $= (-0.002, -0.55, 0.51, 0.57, 0.01)rad/s$

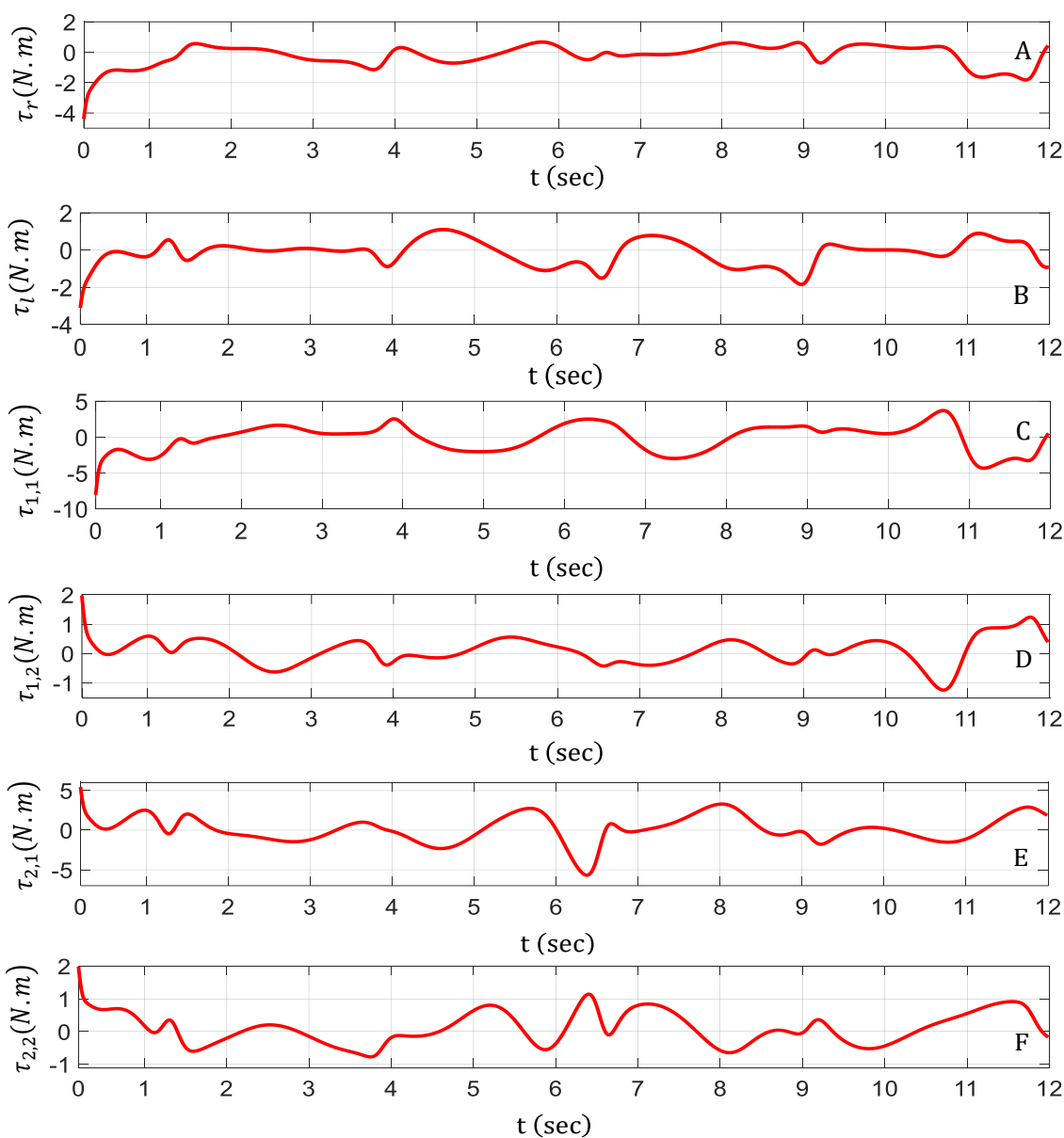


شکل ۵- مسیر واقعی و مرجع پایه متحرک و مجری های نهایی هر دو بازو





شکل ۷ خطاهای ردیابی مربوط به (A,B) سرعت های خطی و زاویه ای پایه متحرک و (C,D,E,F) سرعت های زاویه ای عضوهای ربات



شکل ۸- گشتاورهای ورودی (A,B) چرخ های سمت راست و چپ و (C,D,E,F) مفاصل اول و دوم بازوهای مکانیکی سمت راست و چپ

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا مدل‌سازی دینامیکی یک ربات چرخدار متحرک متشکل از دو بازوی مکانیکی n عضوی با استفاده از روش گیبس-اپل ارائه گردید. در مدل‌سازی این سیستم رباتیکی، تعداد اعضا در هر بازوهای مکانیکی محدود به تعداد خاصی نیست. لذا بر اساس دانش نویسندگان، این اولین بار است که مدل‌سازی سینماتیکی و دینامیکی ربات چرخدار متحرک متشکل از دو بازوی رباتیکی مجزا (دارای $2n$ عضو صلب) بر اساس روش گیبس-اپل بازگشتی ارائه شده است. در ادامه از روش کنترل غیرخطی بهینه پیش‌بین برای توسعه قوانین کنترلی سینماتیکی و دینامیکی برای تعقیب مسیر مرجع پایه چرخدار و نیز عملکرد نهایی هر دو بازو استفاده گردید. مهمترین ویژگی قوانین کنترلی توسعه یافته در این مقاله، فرم بازگشتی آن است که آن را قابل استفاده برای سیستمی متشکل از هر تعداد عضو می‌سازد. در پایان، نتایج شبیه‌سازی سیستم کنترلی طراحی شده در ردیابی مسیر مرجع نشان می‌دهد که ردیابی مسیر مطلوب پایه چرخدار و مجری نهایی هر دو بازو با موفقیت انجام پذیرفت.

اگرچه در این مقاله معادلات سینماتیکی و دینامیکی ربات‌های همکار در کلی‌ترین شکل آن ارائه گردید، اما معادلات خطای ارائه شده (رابطه (۳۶)) تنها در حالتی اعتبار دارد که بازوهای ربات دارای حرکت صفحه‌ای باشد. به‌همین دلیل شبیه‌سازی صورت گرفته در متن مقاله نیز محدود به رباتی شد که دارای حرکت صفحه‌ای است. ارائه معادلات خطا برای حرکت فضائی بازوهای مکانیکی و به‌دنبال آن کنترل و شبیه‌سازی اینگونه از ربات‌ها ایده بسیار جذابی است که می‌تواند به عنوان یک کار تحقیقاتی مستقل در آینده دنبال شود.

در پیاده‌سازی عملی یکی از چالش‌ها بحث عدم قطعیت‌هاست که شامل عدم قطعیت‌های پارامتریک و غیرپارامتریک می‌باشد. مورد اول در اثر اختلاف پارمترهای بین سیستم کنترلی و سیستم اصلی و مورد دوم در اثر در نظر نگرفتن برخی از دینامیک‌های سیستم اصلی در طراحی سیستم کنترلی می‌باشد. در این روش کنترلی تا حدودی می‌توان با کاهش زمان پیش‌بین اثرات نامعینی را کاهش داد. اما در تحقیقات آتی برای بهبود عملکرد سیستم کنترلی استفاده از روش‌های تخمین نامعینی توسط روش‌های عصبی و فازی در ترکیب با روش مورد مطالعه، پیشنهاد می‌گردد.

مراجع

- [1] R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussmann, "Asymptotic Stability and Feedback Stabilization," *Differential Geometric Control Theory*, Boston MA: Birkhuser, Vol. 27, No. 1, 181–191, 1983, [Brockett83.pdf](#).
- [2] N. H. Amer, H. Zamzuri, K. Hudha, and Z.A. Kadir, "Modelling and Control Strategies in Path Tracking Control for Autonomous Ground Vehicles: A Review of State of the Art and Challenges," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 86, pp. 225–254, 2017, <https://doi.org/10.1007/s10846-016-0442-0>.

- [3] H. Baruh, “Analytical Dynamics”, WCB/McGraw-Hill, Boston, 1999, <https://www.amazon.co.uk/Analytical-Dynamics-McGraw-Hill-International-Editions/dp/0071160949>.
- [4] A. M. Shafei, and H. Mirzaeinejad, “A Novel Recursive Formulation for Dynamic Modeling and Trajectory Tracking Control of Multi-rigid-link Robotic Manipulators Mounted on a Mobile Platform”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 235, No. 7, pp. 1204-1217, 2021, <https://doi.org/10.1177/0959651820973900>.
- [5] R. Fazel, A. M. Shafei, and S. R. Nekoo, “Kinematic Analysis of Flexible Bipedal Robotic Systems”, *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 45, No. 5, pp. 795-818, 2024, <https://doi.org/10.1007/s10483-024-3081-8>.
- [6] A. M. Shafei, and H. R. Shafei. “Dynamic Behavior of Flexible Multiple Links Captured Inside a Closed Space”, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Transactions of the ASME*, Vol. 11, No. 5, pp. 1-13, 2016, <https://doi.org/10.1115/1.4032388>.
- [7] A. M. Shafei, and H. R. Shafei, “Planar Multibranch Open-loop Robotic Manipulators Subjected to Ground Collision”, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Transactions of the ASME*, Vol. 12, No. 6, pp. 1-14, 2017, <https://doi.org/10.1115/1.4036197>.
- [8] G. Oriolo, A. De Luca, and M. Vendittelli “WMR Control via Dynamic Feedback Linearization: Design, Implementation, and Experimental Validationv,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 10, No. 6, pp. 835–852, 2002, <https://doi.org/10.1109/TCST.2002.804116>.
- [9] A. Keymasi Khalaji, and S. A. A. Moosavian, “Dynamic Modeling and Tracking Control of a Car with n Trailers,” *Multibody System Dynamics*, Vol. 37, pp. 211–225, 2016, <https://doi.org/10.1007/s11044-015-9472-9>.
- [10] J. Zhang, S. Li, H. Meng, Z. Li, and Z. Sun “Variable Gain Based Composite Trajectory Tracking Control for 4-wheel Skid-steering Mobile Robots with Unknown Disturbances,” *Control Engineering Practice*, Vol. 132, Article ID: 105428, 2023, <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2022.105428>.
- [11] A. Keymasi Khalaji, and S. A. A. Moosavian, “Adaptive Sliding Mode Control of a Wheeled Mobile Robot Towing a Trailer,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 229, No. 2, pp. 169–183, 2015, <https://doi.org/10.1177/0959651814550539>.
- [12] Y. Abdolahi, S. Yousefi, and J. Tavoosi, “A New Self-tuning Nonlinear Model Predictive Controller for Autonomous Vehicles,” *Complexity*, Vol. 2023, Article ID: 8720849, pp. 1-9, 2023, <https://doi.org/10.1155/2023/8720849>.
- [13] H. Mirzaeinejad, and A. M. Shafei, “Modeling and Trajectory Tracking Control of a Two-wheeled Mobile Robot: Gibbs–Appell and Prediction-based Approaches”, *Robotica*, Vol. 36, No. 10, pp. 1551 – 1570, 2018, <https://doi.org/10.1017/S0263574718000565>.
- [14] Z. Sun, S. Hu, H. Xie, H. Li, J. Zheng, and B. Chen, “Fuzzy Adaptive Recursive Terminal Sliding Mode Control for an Agricultural Omnidirectional Mobile Robot”,

Computers and Electrical Engineering, Vol. 105, Article ID: 108529, 2023, <https://doi.org/10.1016/j.compeleceng.2022.108529>.

[15] M. Z. Afaq, A. Jebelli, and R. Ahmad, “An Intelligent Thermal Management Fuzzy Logic Control System Design and Analysis using ANSYS Fluent for a Mobile Robotic Platform in Extreme Weather Applications”, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, Vol. 107, No. 11, 2023, <https://doi.org/10.1007/s10846-022-01799-7>.

[16] A. K. Khalaji, and M. Jalalnejhad, “Control of a Wheeled Robot in Presence of Sliding of Wheels using Adaptive Backstepping Method”, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 4, pp. 144-152, 2018, [Online]. Available: <https://sid.ir/paper/179485/en>.

[17] X. Wu, P. Jin, T. Zou, Z. Qi, H. Xiao, and P. Lou, “Backstepping Trajectory Tracking Based on Fuzzy Sliding Mode Control for Differential Mobile Robots”, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, Vol. 96, pp. 109–121, 2019, <https://doi.org/10.1007/s10846-019-00980-9>.

[18] Y. Guo, L. Yu, and J. Xu “Robust Finite-time Trajectory Tracking Control of Wheeled Mobile Robots with Parametric Uncertainties and Disturbances”, *Journal of Systems Science and Complexity*, Vol. 32, No. 5, pp. 1358–1374, 2019, <https://doi.org/10.1007/s11424-019-7235-z>.

[19] K. Liu, H. Gao, H. Ji, and Zh. Hao, “Adaptive Sliding Mode Based Disturbance Attenuation Tracking Control for Wheeled Mobile Robots”, *International Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 18, pp. 1288–1298, 2020, <https://doi.org/10.1007/s12555-019-0262-7>.

[20] H. Mirzaeinejad, “Optimization-based Nonlinear Control Laws with Increased Robustness for Trajectory Tracking of Non-holonomic Wheeled Mobile Robots”, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 101, pp. 1–17, 2019, <https://doi.org/10.1016/j.trc.2019.02.003>.

[21] G. Wang, Ch. Zhou, Y. Yu, and X. Liu, “Adaptive Sliding Mode Trajectory Tracking Control for WMR Considering Skidding and Slipping via Extended State Observer”, *Energies*, Vol. 12, No. 17, pp. 1-16, 2019, <https://doi.org/10.3390/en12173305>.

[22] J. Wang, P. Zhu, B. He, G. Deng, Ch. Zhang, and X. Huang, “An Adaptive Neural Sliding Mode Control with ESO for Uncertain Nonlinear Systems”, *International Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 19, pp. 1-11, 2021, <https://doi.org/10.1007/s12555-019-0972-x>.

[23] A. Abadi, A. Ayeb, M. Labbadi, D. Fofi, T. Bakir and H. Mekki, “Robust Tracking Control of Wheeled Mobile Robot Based on Differential Flatness and Sliding Active Disturbance Rejection Control”, *Simulations and Experiments Sensors*, Vol. 24, No. 9, pp. 2849, 2024, <https://doi.org/10.3390/s24092849>.

[24] Y. Guo, “Fixed-time Disturbance Observer Based Robust Tracking Control of Wheeled Mobile Robot with Multiple Disturbances”, *Measurement and Control*, Vol. 56, No. 9-10, pp. 1626–1636, 2023, <https://doi.org/10.1177/00202940231173629>.

- [25] J. J. Craig, “*Introduction to Robotics: Mechanics and Control*”, Pearson; 3rd Edition, Pearson Education India, 2009, <https://www.amazon.com/Introduction-Robotics-Mechanics-Control-Craig/dp/8131718360>.
- [26] H. Mirzaeinejad, “Robust Predictive Control of Wheel Slip in Antilock Braking Systems Based on Radial Basis Function Neural Network”, *Applied Soft Computing*, Vol. 70, pp. 318-329, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2018.05.043>.
- [27] A.H Salari, H Mirzaeinejad, and M.F Mahani, “A New Control Algorithm of Regenerative Braking Management for Energy Efficiency and Safety Enhancement of Electric Vehicles”, *Energy Conversion and Management*, Vol. 276, Article ID: 116564, 2023, <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2022.116564>.
- [28] S. Deylaghian, and H. Mirzaeinejad, “ Instantaneous Optimum Wheel Slip Estimation of Anti-lock Braking System Based on Extremum Seeking Algorithm and Fuzzy Method”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, Vol. 237, No. 3, pp. 406-421, 2023, <https://doi.org/10.1177/14644193231176606>.

Dynamic Modeling and Control System Design for Wheeled Collaborative Robots using Gibbs-Appell Formulation and Nonlinear Predictive Control Techniques

*Corresponding author: **Hossein Mirzaeinejad**

Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

h_mirzaeinejad@uk.ac.ir

Ali Mohammad Shafei

Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

shafei@uk.ac.ir

Abstract

One of the main topics in the field of robotics is the modeling and control of the mobile robots intrajactory tracking problem. In this paper, the kinematic and dynamic models of a manipulator connected by revolute-prismatic joints and installed in a non-holonomic wheeled mobile platform are first derived by applying the recursive Gibbs-Appell method. Indeed, by employing this dynamic methodology, one gets rid of the difficulties of Lagrange Multipliers that originate from non-holonomic constraints. Then, a nonlinear predictive approach is applied to design the kinematic and dynamic control laws to generate trajectory tracking control commands of the non-holonomic robot. In this method, the nonlinear responses of the mobile robot are predicted using Taylor series. The optimal control laws are analytically developed by minimizing the difference between the predicted and the desired responses of the system outputs. The multivariable kinematic controller specifies the desired angular and linear velocities of the mobile base and the manipulator links. The obtained control inputs are then used as the desired values to be tracked by the dynamic controller. Finally, the results of numerical simulations are presented to emphasize the ability the proposed method in the mathematical modeling and simultaneous trajectory tracking control of the mobile base and end-effector of such complex robotic systems.

Keywords: Gibbs-Appell methodology, Nonlinear predictive control, Wheeled mobile robot, n-link arm, Trajectory tracking