

مدلسازی دینامیک غیرخطی و تعیین توان الکتریکی بهینه در برداشت انرژی به کمک تیر دولایه پیزوالکتریک

در این پژوهش، برداشت انرژی به وسیله حسگر دولایه پیزوالکتریک در حالت تک
مود غیرخطی و نیز یافتن شرایط بهینه عملکردی برای استخراج توان، مورد بررسی
قرار گرفته است. معادلات غیرخطی با پیشنهاد آنتالپی الکتریکی غیرخطی مناسب و
با استفاده از روش لاگرانژ به دست آمده است. همچنین به کمک روش‌های
اغتشاشات و بر اساس نتایج تجربی، مدل شناسایی گردیده است. نتایج حاکی از
وجود دمپینگ مرتبه ۲ و سختی مرتبه ۳ به بزرگی 3.0090×10^{16} و
 4.5804×10^{21} می باشد. در نهایت برداشت انرژی غیرخطی بررسی و مقاومت
الکتریکی برای توان الکتریکی بهینه برابر با $177.8 \text{ k}\Omega$ بدست آمد.

ثریاسادات خضری تبار^۱
کارشناسی

حامد غفاری راد^۲
استادیار

محمد زارعی نژاد^۳
استادیار

واژه‌های راهنما: برداشت انرژی، حسگر پیزوالکتریک، مدلسازی غیرخطی، توان بهینه

۱- مقدمه

نیاز به انرژی، ذخیره و تولید آن از مسائل مهم و به روز مهندسی است. تأمین انرژی مدارهای کم مصرف
الکترونیکی نظیر سنسورها و سیستم های بی سیم در سال های اخیر مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته
است، تولید انرژی تجدیدپذیر از محیط می تواند راهکار مناسبی باشد و از میان منابع مختلف انرژی، استفاده
از انرژی ارتعاشات مکانیکی به دلیل در دسترس بودن رواج زیادی پیدا کرده است. از بین روش های گوناگون
برداشت انرژی از ارتعاشات محیطی، استفاده از سرامیک های پیزوالکتریک، به دلیل داشتن تأثیرات مساعد
کوپل الکتریکی- مکانیکی از روش های خوب برداشت انرژی است. برداشت انرژی به وسیله مواد پیزوالکتریک
مزیت های زیادی نسبت به دیگر روش ها دارد، قابلیت ساخت آسان در مقیاس های گوناگون، قیمت مناسب،
بالا بودن نسبت توان تولیدی به وزن و بازده مناسب از جمله مزایای این دسته از جاذب های انرژی است.
بنابراین مدلسازی رفتار برداشت کننده ی انرژی پیزوالکتریک حائز اهمیت است. در بازه ی محدودی از
تحریک، می توان معادلات اساسی الکترومکانیکی حاکم بر سرامیک پیزوالکتریک را خطی در نظر گرفت [۱].

^۱ کارشناسی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران S.khezritabar@gmail.com

^۲ نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران Ghafarirad@aut.ac.ir

^۳ استادیار، پژوهشکده فناوری های نو، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران Mzare@aut.ac.ir

بر همین اساس و در سال های اخیر، مدلسازی دینامیک خطی برداشت انرژی توسط تیرهای پیزوالکتریک جهت حصول معادلات کوپل مکانیکی و الکتریکی، مورد بررسی قرار گرفته است. به طور مثال، ارتورک و اینمن در مجموعه کارهای متناوبی، به ارائه مدل های متنوعی برای برداشت انرژی به کمک تیر پیزوالکتریک تک لایه و دو لایه، با در نظر گرفتن دو دمپینگ ساختاری و دمپینگ هوا نمودند [۲-۴]. آنها ضمن به دست آوردن پاسخ فرکانسی مکان و ولتاژ، پاسخ جریان را نیز به دست آورده و حالت های مدار باز و مدار بسته را بررسی کردند. همچنین در تحقیقات دیگری، بهینه سازی توان قابل برداشت با استفاده از طراحی بهینه ی شکل حسگر، مدار الکتریکی، شکل و مکان الکترودها، تعداد لایه پیزوالکتریک، جرم افزوده انتهایی و ... صورت گرفته است [۵-۸]. در تمامی این موارد فرض می گردد دامنه ی ارتعاشات تحریک پایه اندک بوده و رفتار خطی میان تنش و کرنش باقی می ماند. اما در دامنه های تحریک ارتعاشی بالا و در حوالی فرکانس های طبیعی، پاسخ فرکانسی رفتار برداشت کننده انرژی، نشان دهنده یک رفتار غیرخطی است. این رفتار غیرخطی به خصوص در حوالی فرکانس های طبیعی سیستم، ناشی از افزایش کرنش و در نتیجه غیرخطی شدن رفتار ماده می باشد. در چنین حالت هایی نتایج تجربی، یک رفتار غیرخطی بازگشت پذیر برای سیستم نشان می دهد. در واقع سیستم در این وضعیت از خود یک سختی غیرخطی نشان می دهد؛ این اثر ناشی از رفتار غیرخطی ماده ی پیزوالکتریک است و باید در معادلات سیستم در نظر گرفته شود.

در سال های اخیر، مدلسازی رفتار غیرخطی پیزوالکتریک در بیان رفتار عملگرها و حسگرهای پیزوالکتریک مورد توجه قرار گرفته است. در حوزه عملگرها، هوشمند و همکاران با منظور کردن رفتار غیرخطی ماده پیزوالکتریک، به مدلسازی غیرخطی عملگرهای پیزوالکتریک دو لایه پرداختند [۹]. آنها جهت شناسایی رفتار غیرخطی از نمودارهای پاسخ فرکانسی دامنه ارتعاشات عملگر استفاده کرده اند. شهابی و همکاران معادلات غیرخطی عملگرها را با منظور کردن همزمان پاسخ های فرکانسی دامنه و فاز ارتعاشات، بهبود داده اند [۱۰]. همچنین، تن و همکاران عملگر غیرخطی پیزوالکتریک کامپوزیت را مدلسازی کرده و برای صحنه گذاری نتایج تجربی، هندسه ی سیستم را نیز غیرخطی در نظر گرفتند؛ در نهایت علاوه بر نتایج دامنه ی پاسخ، به بررسی پاسخ فاز نیز پرداختند [۱۱]. در حوزه حسگرها و سیستم های برداشت انرژی، استنتون و همکاران مدلی برای دینامیک غیرخطی تیر بایمورف پیزوالکتریک جهت برداشت انرژی با استفاده از نتایج تجربی ارائه کرده و خطای مدلسازی خطی در محاسبه ی ولتاژ را محاسبه نمودند [۱۲]. همچنین دینامیک غیرخطی را برای تیر بایمورف با جرم متمرکز در سر تیر، توسعه داده اند [۱۳]. لیدنهام و ارتورک، به بررسی اثرات غیرخطی مرتبه ی دوم و سوم بر پاسخ غیرخطی پیزوسرامیک در مدلسازی غیرخطی پیزوالکتریک نرم شونده پرداختند [۱۴]. آنها همچنین به بررسی رفتار برداشت کننده ی انرژی M شکل در شتاب های پایین پرداختند و فرکانس طبیعی دوم سیستم را نیز منظور نمودند [۱۵]. همچنین، تن و همکاران مدلسازی دینامیک غیرخطی برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک کامپوزیت را نیز انجام دادند [۱۶]. در سال (۲۰۱۹)، لیدنهام و ارتورک، در پژوهشی ساختار مدار برداشت انرژی را به گونه ای تغییر دادند که خروجی مدار ولتاژ مستقیم باشد و نتایج را در این حالت بررسی نمودند [۱۷]. نکته اساسی حاصل از این تحقیقات نشان می دهد که مدلسازی رفتار غیرخطی سرامیک پیزوالکتریک، یک روش عمومی و از پیش تعیین شده ندارد. بلکه برای هر حسگر یا عملگر با توجه به خصوصیات الکترومکانیکی و شرایط عملکردی از جمله دامنه ی تحریک، باید

بر اساس نتایج تجربی، مدلسازی و دینامیک غیرخطی استخراج گردد. همچنین یافتن عملکرد بهینه توان الکتریکی استخراج شده در حالت رفتار غیرخطی، از چالش های این حوزه است. بنابراین در این پژوهش، مدلسازی دینامیک غیرخطی و توان الکتریکی بهینه قابل برداشت از تیر پیزوسرامیک دولایه از نوع موازی در نظر گرفته شده است. معمولاً آنتالپی مناسب برای هر سرامیک پیزوالکتریک، با توجه به شرایط عملکردی تعیین می شود. به همین منظور و جهت مدلسازی رفتار غیرخطی ماده، بر اساس نتایج تجربی، آنتالپی الکتریکی و معادلات اساسی غیرخطی مناسبی برای تیر بایمورف مورد بررسی پیشنهاد گردیده است. در ادامه، با فرض تیر اوپلر-برنولی و با استفاده از روش انرژی و گلرکین، معادلات دینامیک غیرخطی کوپل الکتریکی و مکانیکی حسگر استخراج شده است. سپس با استفاده از روش مقیاس های چندگانه، پاسخ فرکانسی آن در برابر تحریک پایه به دست آمده است. برای استخراج ضرایب غیرخطی، از نتایج تجربی عملگر غیرخطی مشابه استفاده شده است. در نهایت با به دست آمدن پاسخ توان الکتریکی، مقاومت بهینه کارکرد برداشت کننده ی انرژی در حالت غیرخطی به دست آمده است.

۲- بررسی رفتار غیرخطی سرامیک پیزوالکتریک

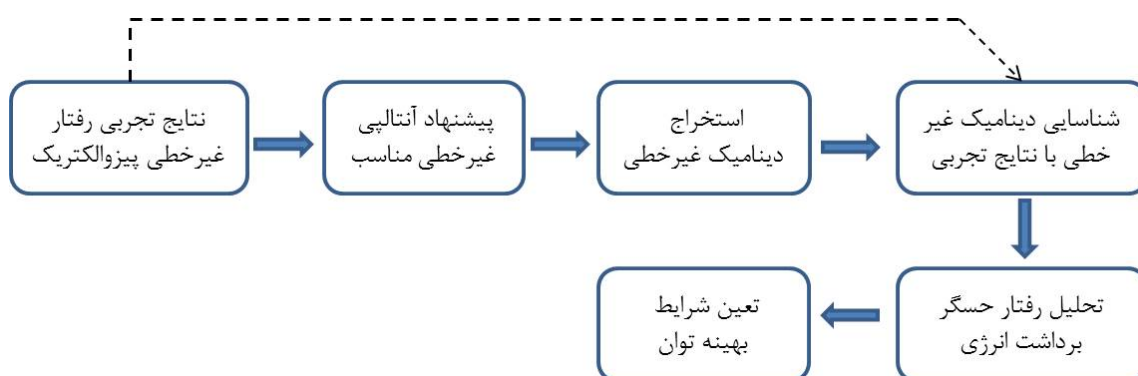
تاکنون معادلات اساسی غیرخطی متنوعی برای عملگرها، حسگرها و برداشت کننده های پیزوالکتریکی ارائه شده است. اما، هیچ معادله غیرخطی جامعی که برای تمامی حسگرها و عملگرهای پیزوالکتریک صادق باشد، نمی توان ارائه نمود. در حقیقت معادلات غیرخطی به شدت به ابعاد سیستم، دامنه ی تحریک، میزان کرنش و عوامل دیگر بستگی دارد. بنابراین می توان با استفاده از نتایج تجربی، تقریب لازم برای به دست آوردن معادلات غیرخطی را فراهم آورد. در این پژوهش، با استفاده از نتایج تجربی، ضرایب غیرخطی برای عملگر پیزوالکتریک به دست آمده و سپس از این ضرایب در مدلسازی حسگر پیزوالکتریک استفاده شده است. فرآیند مدلسازی را می توان به صورت شکل (۱) نشان داد.

برداشت کننده ی انرژی دولایه پیزوالکتریک به صورت تیر یک سر گیردار اوپلر-برنولی، مطابق شکل (۲) حسگر پیزوالکتریک بایمورف در نظر گرفته می شود. این تیر، از دولایه پیزوالکتریک تشکیل شده که بر روی یک لایه پایه برنجی قرار دارد. دولایه پیزوالکتریک از نظر الکتریکی به صورت موازی با یکدیگر در ارتباط هستند. آنتالپی الکتریکی برای حالت غیرخطی حسگر پیزوالکتریک، با توجه به نتایج تجربی، مطابق رابطه ی (۱) پیشنهاد می شود:

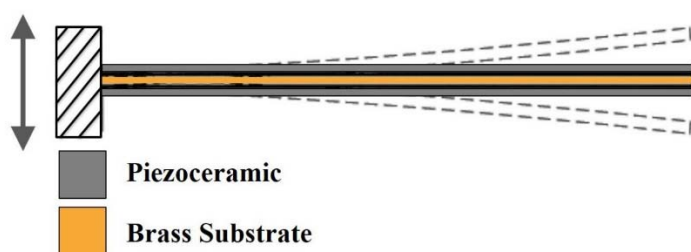
$$\bar{H}_e = \frac{1}{2}(c_{11}^E S_1^2 + 2e_{31} S_1 E_3 - \epsilon_{33} E_3^2) + \frac{1}{3}\alpha_1 S_1^3 + \frac{1}{4}\alpha_2 S_1^4 + \frac{1}{5}\alpha_3 S_1^5 \quad (1)$$

که در آن، c_{11}^E مدول یانگ لایه های پیزوالکتریک در میدان الکتریکی ثابت، S_1 کرنش در جهت محور ۱ (محور x)، e_{31} ثابت پیزوالکتریک، E_3 میدان الکتریکی در جهت محور ۳ (محور z)، ϵ_{33} ضریب دینامیکی در کرنش ثابت و α_1 ، α_2 و α_3 ضرایب غیرخطی هستند. برای به دست آوردن آنتالپی الکتریکی سیستم، باید از چگالی آنتالپی بر روی حجم پیزوالکتریک انتگرال گیری کرد [۹]:

$$H_e = \int_V \bar{H}_e dV \quad (2)$$



شکل ۱- نمودار شماتیک فرآیند مدلسازی غیرخطی و یافتن شرایط بهینه حسگر پیزوالکتریک برداشت انرژی



شکل ۲- حسگر پیزوالکتریک بایمورف

با در نظر گرفتن چگالی آنتالپی الکتریکی پیشنهاد شده، تنش به صورت تغییرات آنتالپی الکتریکی نسبت به کرنش و مطابق رابطه‌ی (۳) است:

$$T_1 = \frac{\partial \bar{H}_e}{\partial S_1} = c_{11}^E S_1 + e_{31} E_3 + \alpha_1 S_1^2 + \alpha_2 S_1^3 + \alpha_3 S_1^4 \quad (3)$$

که در آن، T_1 تنش است. همچنین جابه‌جایی الکتریکی برابر با منفی تغییرات آنتالپی الکتریکی نسبت به میدان الکتریکی و مطابق رابطه‌ی (۴) است:

$$D_3 = -\frac{\partial \bar{H}_e}{\partial E_3} = -e_{31} S_1 + \epsilon_{33} E_3 \quad (4)$$

که در آن، D_3 جابه‌جایی الکتریکی است. به طور معادل برای لایه‌ی پایینی پیزوالکتریک می‌توان نوشت:

$$T_1 = \frac{\partial \bar{H}_e}{\partial S_1} = c_{11}^E S_1 - e_{31} E_3 + \alpha_1 S_1^2 + \alpha_2 S_1^3 + \alpha_3 S_1^4 \quad (5)$$

$$D_3 = -\frac{\partial \bar{H}_e}{\partial E_3} = e_{31} S_1 + \epsilon_{33} E_3$$

۳- مدلسازی دینامیک غیرخطی

در این بخش، معادله‌ی حاکم بر رفتار غیرخطی پیزوالکتریک با استفاده از روش لاگرانژ استخراج می‌شود. برای استفاده از روش لاگرانژ ابتدا باید لاگرانژین، L ، را به دست آورد. برای این منظور باید انرژی جنبشی و پتانسیل محاسبه گردد. انرژی جنبشی کل سیستم به صورت رابطه (۶) است [۱۸]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m[\dot{u} + \dot{g}(t)]^2 dx \quad (6)$$

که در آن $\dot{g}(t)$ سرعت حرکت پایه، m جرم، L طول و \dot{u} سرعت تغییر شکل عرضی تیر است. انرژی پتانسیل کل سیستم نیز از جمع انرژی پتانسیل لایه‌های پیزوالکتریک و زیرساختار برنجی به دست می‌آید و به صورت رابطه‌ی (۷) است:

$$U = U_s + H_e = \int_V \left[\frac{1}{2} Y_s S_1^2 + \frac{1}{2} (c_{11}^E S_1^2 + 2e_{31} S_1 E_3 - \epsilon_{33} E_3^2) + \frac{1}{3} \alpha_1 S_1^3 + \frac{1}{4} \alpha_2 S_1^4 + \frac{1}{5} \alpha_3 S_1^5 \right] dV \quad (7)$$

U_s انرژی پتانسیل زیرلایه برنجی و Y_s مدول یانگ زیرلایه برنجی است. کرنش S_1 مطابق با تئوری تیر اوپلر، برابر است با: $S_1 = -zu''$ علامت () نشان‌دهنده‌ی مشتق جزئی نسبت به مکان است. حال رابطه‌ی کرنش را در رابطه‌ی (۷) جایگذاری می‌کنیم:

$$U = \int_V \left[\frac{1}{2} z^2 u''^2 + \frac{1}{2} (c_{11}^E z^2 u''^2 - 2e_{31} z u'' E_3 - \epsilon_{33} E_3^2) - \frac{1}{3} \alpha_1 z^3 u''^3 + \frac{1}{4} \alpha_2 z^4 u''^4 - \frac{1}{5} \alpha_3 z^5 u''^5 \right] dV \quad (8)$$

با انتگرال‌گیری روی سطح مقطع به دست می‌آوریم:

$$U = \int_0^L \left[\frac{1}{2} YI u''^2 + \frac{1}{4} \bar{\beta}_1 u''^4 - \frac{1}{2} \bar{\beta}_3 v^2 - \bar{\beta}_4 u'' v \right] dx \quad (9)$$

که در آن، YI ، ضریب سختی خمشی، برابر است با:

$$YI = \frac{2b}{3} \left\{ Y_s \frac{h_s^3}{8} + c_{11}^E \left[\left(h_p + \frac{h_s}{2} \right)^3 - \frac{h_s^3}{8} \right] \right\} \quad (10)$$

که در آن b عرض تیر، h_p ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک و h_s ضخامت زیرلایه برنجی است و سایر ضرایب نیز بطور مشابه تعریف می‌گردند:

$$\bar{\beta}_1 = b\alpha_2 \left\{ \int_{-(\frac{h_s}{2}+h_p)}^{-\frac{h_s}{2}} z^4 dx + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} z^4 dx \right\} \quad (11)$$

$$\bar{\beta}_2 = b\alpha_4 \left\{ \int_{-(\frac{h_s}{2}+h_p)}^{-\frac{h_s}{2}} z^6 dx + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} z^6 dx \right\}$$

$$\bar{\beta}_3 = \frac{2b\epsilon_{33}}{h_p}$$

$$\bar{\beta}_4 = b \left\{ \int_{-(\frac{h_s}{2}+h_p)}^{-\frac{h_s}{2}} -e_{31} z dx + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} e_{31} z dx \right\} = 2e_{31} b h_{pc}$$

به دلیل ساختار متقارن سیستم، اثر مؤلفه‌های مرتبه‌ی فرد صفر است [۹]: $h_{pc} = (h_p + h_s)/2$

$$\alpha_1 \left\{ \int_{-\frac{h_s}{2}}^{-\frac{h_s}{2}+h_p} z^3 dx + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} z^3 dx \right\} = 0 \quad (12)$$

$$\alpha_3 \left\{ \int_{-\frac{h_s}{2}}^{-\frac{h_s}{2}+h_p} z^5 dx + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} z^5 dx \right\} = 0$$

پس از به دست آوردن انرژی جنبشی و پتانسیل کل سیستم، با استفاده از روش لاگرانژ معادله حاکم بر رفتار غیرخطی سیستم به دست می آید. قبل از به دست آوردن معادله‌ی غیرخطی سیستم، با به کار بردن روش گلرکین^۱، جداسازی متغیرها صورت می گیرد:

$$u(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \quad (13)$$

که در آن $\phi_r(x)$ و $\eta_r(t)$ به ترتیب توابع مکانی و زمانی نرمال شده در مود r می باشند. هدف در این پژوهش، بررسی رفتار سیستم در نزدیکی فرکانس طبیعی اول است، بنابراین فقط از شکل مود اول جهت جداسازی متغیرها استفاده می گردد:

$$u(x, t) = \phi_1(x) \eta_1(t) = \phi(x) \eta(t) \quad (14)$$

لازم به ذکر است این تقریب برای سیستم هایی که دارای تشدید داخلی نبوده و رفتار غیرخطی زیادی نداشته باشند، دارای دقت لازم برای استفاده از مدلسازی خواهد بود. از آنجا که این شرایط با توجه به نتایج تجربی، در پیژوالکتریک مورد بررسی صادق است، از فرض ارتعاشات تک مود استفاده می گردد. چون شکل مود استفاده شده در رابطه‌ی (۱۴)، همان شکل مود استاندارد تیر یک سر گیردار است، با جایگذاری رابطه‌ی (۱۴) در روابط (۶) و (۹) به دست می توان نوشت:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m [\dot{\phi} \dot{\eta}(t) + \dot{g}(t)]^2 dx \quad (15)$$

$$U = \int_0^L \left[\frac{1}{2} YI \phi''^2 \eta^2 + \frac{1}{4} \bar{\beta}_1 \phi''^4 \eta^4 - \frac{1}{2} \bar{\beta}_3 v^2 - \bar{\beta}_4 \phi'' \eta v \right] dx \quad (16)$$

لاگرانژین به صورت $L=T-U$ تعریف می شود و معادلات دینامیک سیستم قابل استخراج خواهد بود:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (17)$$

که در آن q_i ها، مؤلفه‌های مستقل مسئله هستند و Q_i ها نیروهای ناپایستار وارد بر سیستم هستند. در این مسئله، دو مؤلفه‌ی مستقل ولتاژ و پاسخ زمانی ارتعاشات حسگر وجود دارد. بنابراین دو معادله دینامیک کوپل وجود خواهد داشت. معادله‌ی اول نسبت به پاسخ زمانی ارتعاشی بوده و پس از مشتق گیری عبارت است از:

$$\ddot{\eta} + \omega_n^2 \eta + \beta_1 \eta^3 - \beta_4 v = \bar{m} \ddot{g}(t) \quad (18)$$

¹ Galerkin

که در آن:

$$\omega_n^2 = \int_0^L YI \phi''^2 dx, \quad \beta_1 = \int_0^L \bar{\beta}_1 \phi'^4 dx, \quad (19)$$

$$\beta_4 = \int_0^L \bar{\beta}_4 \phi'' dx = 2e_{31}bh_{pc} \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{x=L}, \quad \bar{m} = \int_0^L m\phi dx$$

برای مدل‌سازی میرایی سیستم، با توجه به نتایج تجربی، میرایی ویسکوز خطی و غیرخطی را به سیستم اضافه می‌کنیم [۹]:

$$\ddot{\eta} + 2\bar{\mu}\omega_n \dot{\eta} + \bar{\mu}_1 \eta^2 \dot{\eta} + \omega_n^2 \eta + \beta_1 \eta^3 - \beta_4 v = \bar{m}\ddot{g}(t) \quad (20)$$

که در آن، $\bar{\mu}$ و $\bar{\mu}_1$ ضرایب میرایی سیستم هستند.

برای استخراج معادله ولتاژ، از تعریف λ یا شارالکتريکی استفاده می‌کنیم که: $v = \dot{\lambda}$. در این حالت معادله حوزه الکتريکی به صورت رابطه (۲۱) خواهد بود:

$$\beta_3 \ddot{\lambda} + \beta_4 \dot{\eta} + \frac{\dot{\lambda}}{R} = 0 \quad (21)$$

اگر رابطه (۲۱) برحسب ولتاژ بازنویسی گردد، می‌توان نوشت:

$$\beta_3 \dot{v} + \frac{1}{R}v + \beta_4 \dot{\eta} = 0 \quad (22)$$

که در آن:

$$\beta_3 = \frac{2bl\epsilon_{33}}{h_p} \quad (23)$$

۴- پاسخ زمانی دینامیک غیرخطی به روش اغتشاشات

در این بخش، با استفاده از روش اغتشاشات موسوم به مقیاس‌های چندگانه^۱، به حل معادلات حاکم غیرخطی به دست آمده پرداخته می‌شود [۱۹]. اگر فرکانس نیروی تحریک که در اینجا حرکت پایه است، بسیار نزدیک به فرکانس طبیعی باشد (در مسئله‌ی برداشت انرژی این شرط برقرار است) می‌توان نوشت [۲]:

$$\omega = \omega_n + \epsilon\sigma \quad (24)$$

که در آن ω و ω_n فرکانس نیروی تحریک و فرکانس طبیعی و σ پارامتر تنظیم^۲ از مرتبه‌ی یک است؛ به عبارت دیگر $\sigma = O(1)$. همچنین ϵ بسیار کوچک است، در نتیجه به‌طور تقریبی داریم:

$$\omega^2 = \omega_n^2 + 2\epsilon\omega_n\sigma + \epsilon^2\sigma^2 \cong \omega_n^2 + 2\epsilon\omega_n\sigma \quad (25)$$

¹ Multiple scales

² Detuning Parameter

ایده‌ی اصلی حل به روش مقیاس‌های چندگانه بر این اساس است که پاسخ را می‌توان به صورت تابعی از چند مقیاس زمانی نوشت. در اینجا از روش مقیاس‌های چندگانه مرتبه اول استفاده می‌گردد؛ در نتیجه مقیاس‌های زمانی عبارتند از [۲]:

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t \quad (26)$$

پاسخ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\eta(t; \varepsilon) = \eta_0(T_0, T_1) + \varepsilon \eta_1(T_0, T_1) + \dots \quad (27)$$

$$v(t; \varepsilon) = V_0(T_0, T_1) + \varepsilon V_1(T_0, T_1) + \dots \quad (28)$$

ترم مشتق نسبت به زمان نیز به صورت مشتق نسبت به مقیاس‌های زمانی درمی‌آید:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (29)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (30)$$

که در آن $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$.

در این بخش، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، پاسخ فرکانسی برای حسگر برداشت انرژی پیزوالکتریک غیرخطی به دست می‌آید؛ باید توجه داشت که زمانی این روش قابل استفاده است که سیستم غیرخطی ضعیف باشد، که این شرط در مسئله‌ی مورد بحث این پژوهش برقرار است. در این پژوهش، ارتعاشات سیستم حول فرکانس تشدید اول بررسی شده است. در چنین حالتی به شرطی که تحریک اعمال شده رفتار نرم داشته باشد، که در این تحقیق هم هارمونیک می‌باشد، رفتار نیروی خارجی، مشابه نیروی دمپینگ فرض می‌گردد. بنابراین، نیروی خارجی در حالت تشدید، با اغتشاشات مرتبه یک ظاهر می‌شود [۲]:

$$F = \varepsilon f \quad (31)$$

نیروی خارجی در این حالت برابر است با:

$$F = -\bar{m}W_0\omega^2 \quad (32)$$

بطوریکه W_0 دامنه تحریک پایه می‌باشد. همچنین، ضرایب سیستم با اغتشاشات مرتبه یک ظاهر می‌شوند، بنابراین متغیرهای جدید ظاهر شده در معادله به صورت زیر نام‌گذاری می‌شوند:

$$\beta_1 = \varepsilon \alpha, \quad \beta_4 = \varepsilon \chi, \quad -\bar{m}W_0\omega^2 = \varepsilon f, \quad \frac{1}{R\beta_3} = \lambda, \quad (33)$$

$$\frac{\beta_4}{\beta_3} = \kappa, \quad \bar{\mu} = \varepsilon \mu, \quad \bar{\mu}_1 = \varepsilon \mu_1$$

با جایگزین کردن متغیرهای جدید در معادلات حاکم بر مکان و ولتاژ، روابط (۲۰) و (۲۲)، می‌توان نوشت:

$$\ddot{\eta} + 2\varepsilon\mu\omega_n \dot{\eta} + \varepsilon\mu_1 \eta^2 \dot{\eta} + \omega_n^2 \eta + \varepsilon\alpha \eta^3 - \varepsilon\chi v = \varepsilon f \cos \omega t \quad (34)$$

$$\dot{v} + \lambda v + \kappa \dot{\eta} = 0 \quad (35)$$

که در آن، α ضریب جمله‌ی غیرخطی است. اگر $\alpha > 0$ باشد، سخت‌شوندگی و اگر $\alpha < 0$ نرم‌شوندگی اتفاق می‌افتد. جملات نیروی تحریک و کوپلینگ الکترومکانیکی با اغتشاشات مرتبه اول ظاهر می‌شوند و $\omega \approx \omega_n$ خواهد بود.

جایگزین کردن روابط (۲۷) تا (۳۰) در روابط (۳۴) و (۳۵) و استفاده از رابطه‌ی (۲۴) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1)(\eta_0 + \varepsilon \eta_1) + 2\varepsilon\mu\omega_n(D_0 + \varepsilon D_1)(\eta_0 + \varepsilon \eta_1) \\ + \varepsilon\mu_1(\eta_0 + \varepsilon \eta_1)^2(D_0 + \varepsilon D_1)(\eta_0 + \varepsilon \eta_1) + \omega_n^2(\eta_0 + \varepsilon \eta_1) \\ + \varepsilon\alpha(\eta_0 + \varepsilon \eta_1)^3 - \varepsilon\chi(V_0 + \varepsilon V_1) = \varepsilon f \cos(\omega_n T_0 + \sigma T_1) \end{aligned} \quad (36)$$

$$(D_0 + \varepsilon D_1)(V_0 + \varepsilon V_1) + \lambda(V_0 + \varepsilon V_1) + \kappa(D_0 + \varepsilon D_1)(\eta_0 + \varepsilon \eta_1) = 0 \quad (37)$$

با بسط دادن معادلات و برابر گذاشتن جملات دارای ترم ε^0 و ε می‌توان نوشت:

$$D_0^2 \eta_0 + \omega_n^2 \eta_0 = 0 \quad (38)$$

$$D_0 V_0 + \lambda V_0 = -\kappa D_0 \eta_0 \quad (39)$$

و

$$\begin{aligned} D_0^2 \eta_1 + \omega_n^2 \eta_1 = -2D_0 D_1 \eta_0 - (2\mu\omega_n + \mu_1 \eta_0^2) D_0 X_0 - \alpha \eta_0^3 + \chi V_0 \\ + \varepsilon f \cos(\omega_n T_0 + \sigma T_1) \end{aligned} \quad (40)$$

$$D_1 V_1 + \lambda V_1 = -D_1 V_0 - \kappa(D_0 \eta_1 + D_1 \eta_0) \quad (41)$$

حل رابطه‌های (۳۸) و (۳۹) نتیجه می‌دهد:

$$X_0 = A(T_1) e^{j\omega_n T_0} + cc \quad (42)$$

$$V_0 = B(T_1) e^{-\lambda T_0} - \frac{j\omega_n \kappa A(T_1) e^{j\omega_n T_0}}{\lambda + j\omega_n} + cc \quad (43)$$

که در آن $A(T_1)$ و $B(T_1)$ توابعی مجهول هستند و cc بیانگر مزدوج مختلط^۱ است. با جایگذاری روابط (۴۲) و (۴۳) در رابطه (۴۰) و با حذف مؤلفه‌های سکولار^۲ داریم:

^۱ Complex conjugate

^۲ Secular terms

$$-2j\omega_n D_1(Ae^{j\omega_n T_0}) - 2j\mu\omega_n^2 A e^{j\omega_n T_0} - j\omega_n \mu_1 A^2 \bar{A} e^{j\omega_n T_0} - 3\alpha A^2 \bar{A} e^{j\omega_n T_0} - \frac{j\kappa\chi\omega_n}{\lambda + j\omega_n} A e^{j\omega_n T_0} + \frac{1}{2} f e^{j(\omega_n T_0 + \sigma T_1)} \quad (44)$$

با حذف ترم $e^{j\omega_n T_0}$ ، رابطه (۴۴) تبدیل رابطه‌ی (۴۵) می‌شود:

$$-2j\omega_n(A' + \mu\omega_n A) - j\omega_n \mu_1 A^2 \bar{A} - \frac{j\kappa\chi\omega_n}{\lambda + j\omega_n} (\lambda - j\omega_n) A + \frac{1}{2} f e^{j\sigma T_1} \quad (45)$$

که در آن، \bar{A} مزدوج مختلط A است. برای حل معادله‌ی رابطه‌ی (۴۵) فرض می‌گردد [۲]:

$$A = \frac{1}{2} a e^{j\theta} \quad (46)$$

که در آن a و θ توابعی حقیقی از T_1 هستند و ضریب $\frac{1}{2}$ به منظور استفاده از فرمول اویلر در نظر گرفته شده است. تقریب مرتبه‌ی اول η به صورت تابعی کوسینوسی عبارت است از [۲]:

$$\eta = a \cos(\omega_n t + \theta) + O(\varepsilon) \quad (47)$$

تعریف می‌کنیم [۲]:

$$\gamma = \sigma T_1 - \theta \quad (48)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۴۶) در رابطه‌ی (۴۵) و با استفاده از رابطه‌ی (۴۸) می‌توان نوشت:

$$-2\omega_n a' - 2\mu\omega_n^2 a - \frac{1}{4}\mu_1\omega_n a^3 - \frac{\kappa\chi\lambda\omega_n a}{\lambda^2 + \omega_n^2} + f \sin \gamma = 0 \quad (49)$$

$$2\omega_n \sigma a - 2\omega_n a \gamma' - \frac{3}{4}\alpha a^3 - \frac{\kappa\chi\omega_n^2 a}{\lambda^2 + \omega_n^2} + f \cos \gamma = 0 \quad (50)$$

در حالت پایدار، $\gamma' = a' = 0$ خواهد بود. در نتیجه:

$$2\mu\omega_n^2 a + \frac{1}{4}\mu_1\omega_n a^3 + \frac{\kappa\chi\lambda\omega_n a}{\lambda^2 + \omega_n^2} = f \sin \gamma \quad (51)$$

$$-2\omega_n \sigma a + \frac{3}{4}\alpha a^3 + \frac{\kappa\chi\omega_n^2 a}{\lambda^2 + \omega_n^2} = f \cos \gamma \quad (52)$$

بنابراین، معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای نیروی ورودی تحریک f برابر است با:

$$\left[\left(2\mu\omega_n^2 + \frac{1}{4}\mu_1\omega_n a^2 + \frac{\kappa\chi\lambda\omega_n}{\lambda^2 + \omega_n^2} \right)^2 + \left(\frac{3}{4}\alpha a^2 + \frac{\kappa\chi\omega_n^2}{\lambda^2 + \omega_n^2} - 2\omega_n \sigma \right)^2 \right] a^2 = f^2 \quad (53)$$

به منظور امکان پذیر شدن کشیدن نمودار پاسخ فرکانسی، در رابطه‌ی (۵۳)، σ به طور مجزا استخراج می‌گردد:

$$\sigma = \frac{1}{2\omega_n} \left\{ \frac{3}{4} \alpha a^2 + \frac{\kappa \chi \omega_n^2}{\lambda^2 + \omega_n^2} \right. \\ \left. \pm \left[\frac{f^2}{a^2} - \left(2\mu\omega_n^2 + \frac{1}{4}\mu_1\omega_n a^2 + \frac{\kappa \chi \lambda \omega_n}{\lambda^2 + \omega_n^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (54)$$

حال با استفاده از رابطه‌ی (۵۴) می‌توان نمودار دامنه‌ی پاسخ فرکانسی مکان بر حسب فرکانس نیروی تحریک ورودی را ترسیم نمود. رابطه‌ی میان دامنه‌ی پاسخ فرکانسی مکان و دامنه‌ی پاسخ فرکانسی ولتاژ به دلیل از بین رفتن پاسخ عمومی (۴۳) مطابق با رابطه‌ی (۵۵) است:

$$a = \frac{(\lambda^2 + \omega_n^2)^{1/2}}{\kappa\omega_n} b \quad (55)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۵۵) در رابطه‌ی (۵۴) می‌تون نوشت:

$$\sigma = \frac{1}{2\omega_n} \left\{ \frac{3}{4} \alpha \frac{\lambda^2 + \omega_n^2}{\kappa^2 \omega_n^2} b^2 + \frac{\kappa \chi \omega_n^2}{\lambda^2 + \omega_n^2} \right. \\ \left. \pm \left[\frac{\kappa^2 \omega_n^2 f^2}{(\lambda^2 + \omega_n^2) b^2} - \left(2\mu\omega_n^2 + \frac{1}{4}\mu_1\omega_n \frac{\lambda^2 + \omega_n^2}{\kappa^2 \omega_n^2} b^2 + \frac{\kappa \chi \lambda \omega_n}{\lambda^2 + \omega_n^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (56)$$

حال می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۵۶) نمودار پاسخ فرکانسی ولتاژ بر حسب فرکانس نیروی تحریک ورودی را نیز ترسیم نمود.

۵- تحلیل نتایج دینامیک غیرخطی حسگر پیزوالکتریک دولایه

به منظور بررسی رفتار غیرخطی حسگر، باید با استفاده از روابط (۵۴) و (۵۶) نمودارهای دامنه‌ی پاسخ فرکانسی مکان و ولتاژ رسم گردد. برای این منظور باید ضرایب مورد نیاز برای رسم نمودارهای دامنه‌ی پاسخ فرکانسی مکان و ولتاژ استخراج شوند. از این میان، ضرایب، μ_1 و β_1 که به ترتیب نشان‌دهنده‌ی دمپینگ غیرخطی و ترم غیرخطی معادله‌ی مکانی هستند، در معادله‌ی خطی وجود ندارند و مقدارشان باید شناسایی شود. برای شناسایی مقدار این ضرایب، از معادله عملگر پیزوالکتریک و توسط نتایج تجربی، ضرایب غیرخطی استخراج می‌گردد. به این ترتیب که فرض می‌شود مقدار ضرایب μ_1 و β_1 در حالت‌های حسگر و عملگر یکسان هستند (چون در حالت حسگر تنها یک نیروی خارجی به سیستم اضافه می‌شود و ویژگی‌های غیرخطی ماده تغییر نمی‌کند، بنابراین فرض مذکور منطقی می‌باشد) و می‌توان با استفاده از نتایج تجربی رفتار عملگر، رفتار حسگر را پیش بینی نمود.

جدول ۱- مشخصات تير پيزوالکتریک بايمورف T215-A4-103X

	PZT-5A	Brass
Length (L) (mm)	21.80	21.80
Width (b) (mm)	3.2	3.2
Thickness (h_p, h_s) (mm)	0.13 (each)	0.12
Mass density (ρ_p, ρ_s) (kg/m^3)	7800	9000
Elastic modulus (c_{11}^E, Y_s) (GPa)	58.64	105
Piezoelectric constant (e_{31}) (C/m^2)	-13.42	—
Permittivity constant (ϵ_{33}^S) (nF/m)	14.6	—

۵-۱- نتایج تجربی جهت تعیین ضرایب دینامیک غیرخطی

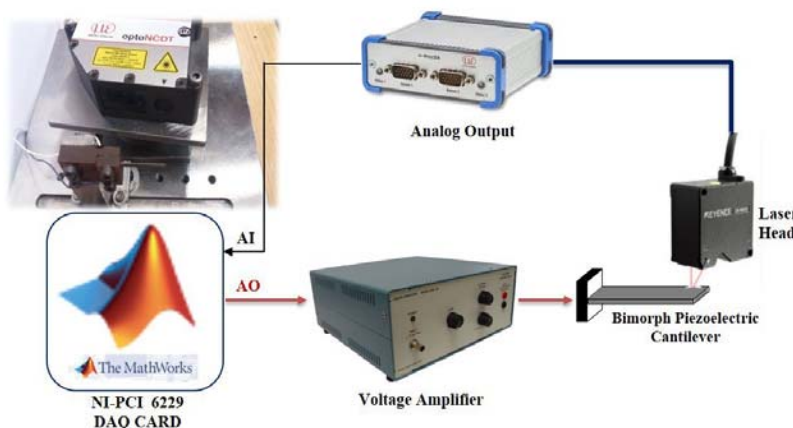
برای استخراج ضرایب، ابتدا معادله‌ی دینامیکی حاکم بر رفتار عملگر به گونه‌ای که مطابق با مدلسازی حسگر برداشت انرژی مورد نظر باشد، پیشنهاد می‌گردد:

$$\ddot{\eta} + 2\bar{\mu}\omega_n \dot{\eta} + \bar{\mu}_1 \eta^2 \dot{\eta} + \omega_n^2 \eta + \beta_1 \eta^3 = \beta_4 v \quad (57)$$

مشاهده می‌گردد که ضرایب غیرخطی حسگر برداشت کننده‌ی پیزوالکتریک عینا در معادله‌ی حاکم عملگر تکرار شده است. بنابراین با استفاده از شناسایی معادله‌ی عملگر در رابطه‌ی (۵۷) می‌توان مقادیر ضرایب غیرخطی را برای عملگر بدست آورد.

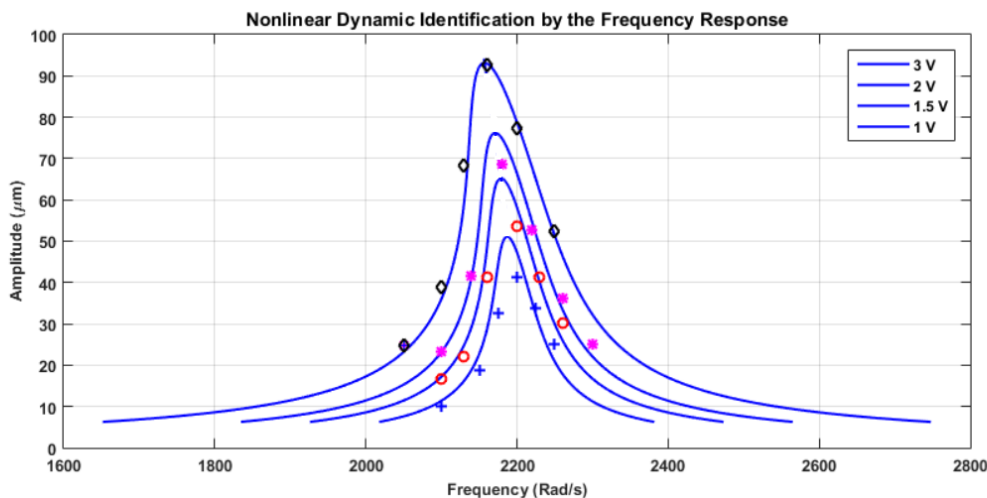
برای شناسایی ضرایب غیرخطی، تیر بايمورف پيزوالکتریک T215-A4-103X محصول شرکت Piezosystem، که مشخصات آن در جدول (۱) داده شده است، در نظر گرفته می‌شود. شکل (۳) تجهیزات تجربی جهت استخراج پاسخ از عملگر را نشان می‌دهد. جهت تحریک پیزوالکتریک از تقویت کننده ولتاژ EPA-104-230 محصول شرکت Piezosystem استفاده شده است. سنسور لیزری LK-H020 محصول شرکت Keyence با رزولوشن 10 nm جابجایی نوک تیر را اندازه گیری می نماید. همچنین از کارت داده برداری NI-PCI6229 با حداکثر فرکانس داده برداری 20 KHz مورد استفاده قرار گرفته است. برای استخراج مدل غیرخطی، از ۴ سطح ولتاژ تحریک در فرکانسهایی نزدیک فرکانس طبیعی اول سیستم استفاده گردیده است. دامنه ارتعاشات اجباری در این شرایط استخراج و جهت شناسایی دینامیک غیرخطی استفاده شده است. با توجه به اینکه کمترین دامنه مورد بررسی حدود ۱۰ میکرومتر است و سنسور لیزری مورد استفاده دارای رزولوشن ۱۰ نانومتر می باشد، بنابراین حداکثر خطا و عدم قطعیت ثبت داده ها در کمترین دامنه خواهد بود، که حدود ۰٫۱ درصد می باشد.

شکل (۴) مطابقت مدلسازی تئوری عملگر پس از شناسایی ضرایب غیرخطی و داده‌های تجربی را نمایش می‌دهد. تطابق مناسب نمودار پاسخ فرکانسی عملگر و داده‌های تجربی، حدود مناسبی برای ضرایب غیرخطی عملگر به دست می‌دهد.



شکل ۳- تجهیزات تجربی استخراج پاسخ

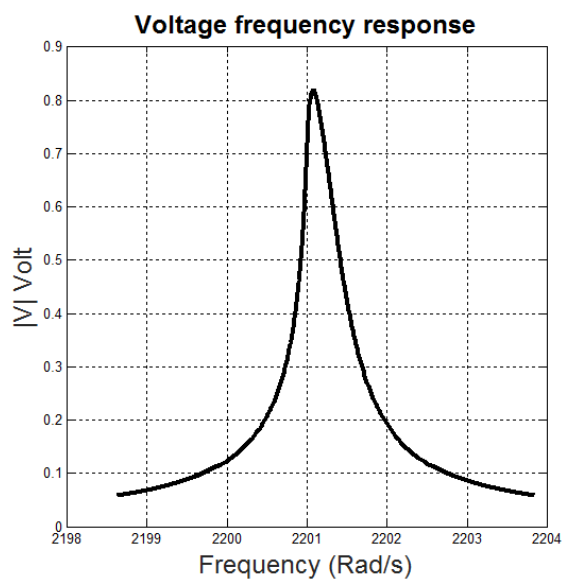
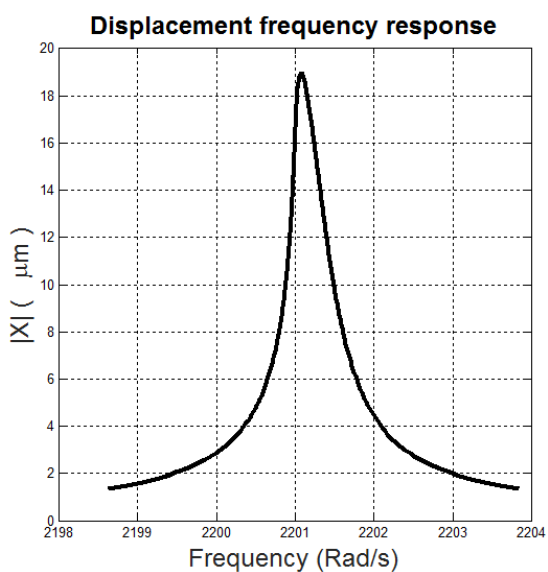
در ادامه برای مدلسازی حسگر، از همین ضرایب غیرخطی که به کمک عملگر به دست آمده‌اند، استفاده می‌گردد. مقادیر ضرایب غیرخطی در جدول (۲) آورده شده است. با توجه به نمودار عملگر و منفی بودن ضریب β_1 ، رفتار غیرخطی حسگر پیزوالکتریک موردنظر به صورت نرم شونده است. هر چند نتایج بدست آمده بر اساس تطابق مدل ارائه شده با آزمایش‌های تجربی استخراج گردیده، ولی می‌توان صحت نتایج را مورد تحلیل قرار داد. دو نکته در مورد نتایج وجود دارد، یکی مقادیر بزرگ آنها و دیگری صحت آنها. نکته بسیار مهم در مورد سرامیک‌های پیزوالکتریک، جابجایی آنها در بازه حرکتی میکرومتر می‌باشد. ضرایب بدست آمده برای دینامیک غیرخطی، از آنجایی که در ترم‌های غیرخطی توانی از بازه میکرومتر ضرب می‌شوند، در مجموع، منجر به ایجاد دینامیکی با ضرایب منطقی و قابل استفاده در روش مقیاس‌های چندگانه را ایجاد خواهند کرد. بنابراین بزرگ بودن آنها قابل پیش‌بینی است. اما در مورد صحت آنها، مشابه همین نتایج در پژوهش‌های پیشین که از پیزوالکتریک‌هایی با مشخصات مکانیکی و هندسی نزدیک به پژوهش حاضر استفاده شده است نیز گزارش شده است [۲، ۱۳، ۱۹].



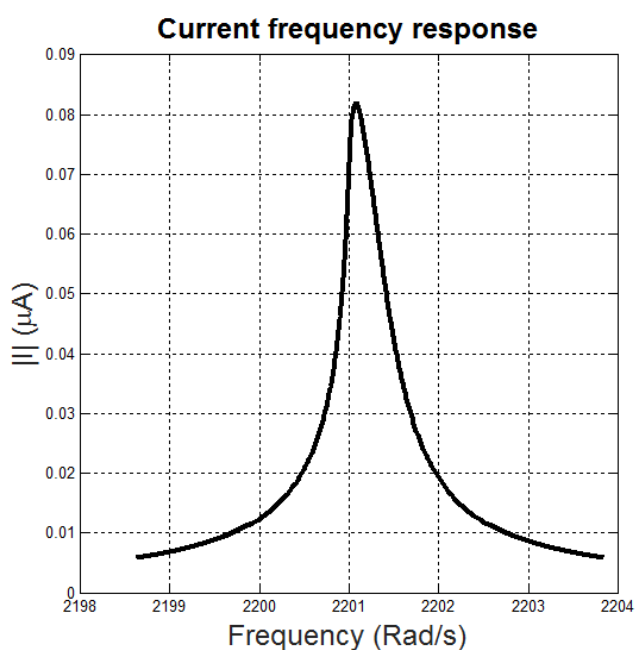
شکل ۴- نمودار پاسخ فرکانسی مکان عملگر شناسایی شده با داده‌های تجربی

جدول ۲- ضرایب غیرخطی شناسایی شده

ضریب شناسایی	مقدار
$\bar{\mu}_1$	3.0090×10^{16}
β_1	-4.5804×10^{20}



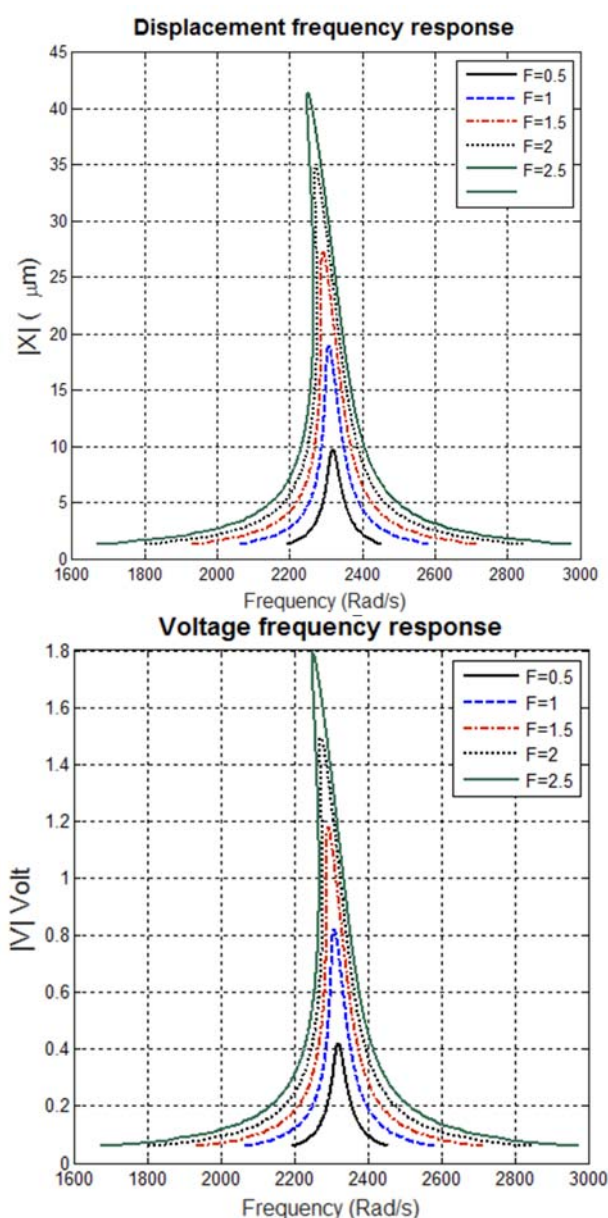
شکل ۵- دامنه‌ی پاسخ فرکانسی غیرخطی مکان و ولتاژ



شکل ۶- دامنه‌ی پاسخ فرکانسی غیرخطی جریان

۵-۲- تحلیل نتایج برداشت انرژی

قبل از رسم نمودار، لازم است مقدار ε نیز تعیین گردد. با توجه به رابطه $\bar{\mu} = \varepsilon\mu$ و از آنجایی که μ و $\bar{\mu}$ مقادیری حدود ۰٫۸ و ۰٫۰۰۸ دارند، بنابراین $\varepsilon = ۰٫۰۱$. حال نمودارهای پاسخ فرکانسی حسگر غیرخطی ترسیم می گردد. پاسخ فرکانسی مکان و ولتاژ به ترتیب در شکل (۵) آمده است. با استفاده از پاسخ فرکانسی ولتاژ و به کمک قانون اهم، نمودار پاسخ فرکانسی جریان در شکل (۶) رسم شده است. نتایج به طور واضح، رفتار غیرخطی نرم شونده را در پاسخهای فرکانسی جابجایی عملگر، ولتاژ و جریان قابل استخراج نشان می دهد.



شکل ۷- بررسی اثر تغییر نیرو بر نمودارهای دامنه پاسخ فرکانسی ارتعاشات و ولتاژ

۵-۲-۱- تحلیل اثر دامنه‌ی تحریک پایه

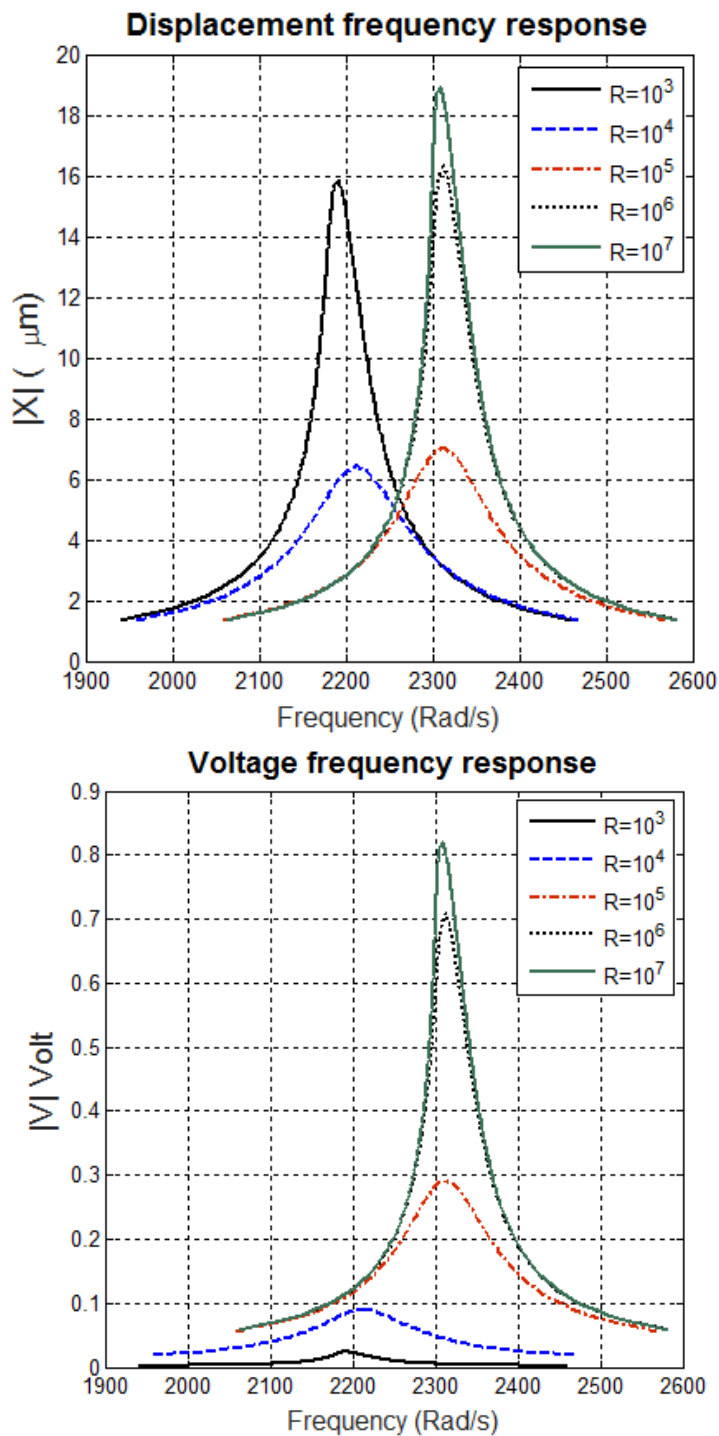
برای بررسی اثر دامنه‌ی تحریک پایه، پنج حالت مختلف از تحریک پایه در نظر گرفته می‌شود، که نمودار آن‌ها در شکل (۷) مشاهده می‌گردد. مطابق شکل (۷) در هر دو نمودار با افزایش دامنه‌ی نیروی تحریک، دامنه‌ی پاسخ فرکانسی نیز افزایش می‌یابد که مورد انتظار نیز هست. همچنین با افزایش دامنه، اثر جملات غیرخطی در پاسخ افزایش پیدا کرده است. روند تغییرات پاسخ فرکانسی بر اساس افزایش نیرو، مطابق با نتایج به دست آمده در پژوهش‌های پیشین برای حسگرهای خطی و غیرخطی است [۲، ۱۳، ۱۹].

۵-۲-۲- تحلیل اثر مقاومت الکتریکی

متغیر دیگر، مقاومت الکتریکی است. برای بررسی اثر این متغیر، پنج حالت مفروض می‌گردد. در شکل (۸) نمودارهای این پنج حالت نشان داده شده‌اند. مطابق با شکل (۸)، مقاومت الکتریکی دو اثر بر روی رفتار سیستم دارد، نخست آنکه با افزایش مقاومت الکتریکی، دامنه پاسخ فرکانسی مکان، ابتدا کاهش و سپس افزایش پیدا می‌کند و همچنین دامنه‌ی پاسخ فرکانسی ولتاژ افزایش می‌یابد. دومین تأثیر، تغییر فرکانس تشدید سیستم، به علت تغییر مقاومت الکتریکی است؛ زیرا تغییر مقاومت الکتریکی مدار حسگر پیزوالکتریک از صفر تا بی‌نهایت، شرایط سیستم را از حالت اتصال کوتاه (مدار بسته) تا مدار باز تغییر می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، نمودار مقاومت $R = 10^3 \Omega$ در شکل (۸) نیز شرایطی نزدیک به حالت اتصال کوتاه دارد؛ بنابراین، دامنه‌ی پاسخ فرکانسی ولتاژ در این مقاومت نیز بسیار پایین است. در کل، فرکانس تشدید حسگر پیزوالکتریک با تغییر مقاومت، از حالت اتصال کوتاه تا مدار باز متغیر است و برای هر مقاومت دیگر، فرکانس طبیعی مقداری بین این دو فرکانس را خواهد داشت. این رفتار در پژوهش‌های پیشین برای حسگرهای خطی نیز گزارش شده است [۲].

نکته قابل توجه رفتار دامنه‌ی پاسخ فرکانس مکان است که با تغییرات مقاومت، ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. دلیل این امر، رفتار معکوس توان الکتریکی بر حسب مقاومت می‌باشد. در حقیقت توان الکتریکی با افزایش مقاومت ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. از آنجایی که توان الکتریکی برداشت شده در عمل همان توان اتلافی از ارتعاشات سیستم مکانیکی است، بنابراین این رفتار معکوس برای دامنه ارتعاشات و توان الکتریکی برداشت شده منطقی می‌باشد. در حقیقت این پدیده از نگاهی دیگر، یکی از روشهای کاهش دامنه ارتعاشات سیستم‌های دینامیکی و مرتعش می‌باشد.

علاوه بر نکات ذکرشده، تغییر مقاومت بر روی رفتار غیرخطی سیستم نیز اثرگذار است. مطابق با شکل (۸)، رفتار غیرخطی متناسب با افزایش و کاهش مقاومت، به دلیل تغییر میزان کرنش عملگر، شدت و ضعف پیدا می‌کند؛ به این صورت که در نمودار پاسخ فرکانسی ولتاژ، رفتار غیرخطی با افزایش مقاومت و افزایش دامنه، افزایش می‌یابد. در نمودار مکان نیز، رفتار غیرخطی ابتدا کاهش و سپس افزایش پیدا می‌کند. در اینجا نیز بار دیگر افزایش یافتن دامنه باعث افزایش رفتار غیرخطی در سیستم شده است.



شکل ۸- بررسی اثر تغییر مقاومت الکتریکی بر نمودارهای دامنه‌ی پاسخ فرکانسی دامنه و ولتاژ

۵- توان بهینه

مطابق قانون اهم، اختلاف پتانسیل دو سر یک مقاومت با رابطه‌ی $V = RI$ بیان می‌شود، که در آن، I شدت جریان گذرنده از مقاومت است. از طرفی مقدار انرژی مصرفی از رابطه‌ی $W = RI^2t$ محاسبه می‌شود. توان الکتریکی، که مقدار انرژی الکتریکی مصرفی در واحد زمان است، برابر است با:

$$P = \frac{W}{t} \quad (58)$$

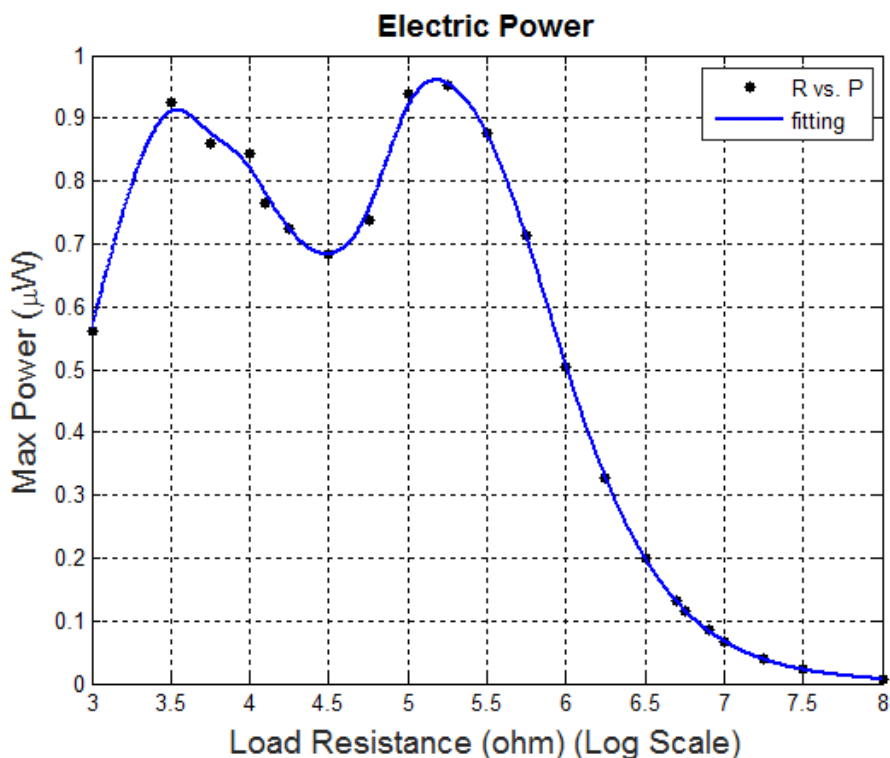
با در نظر گرفتن مقدار جریان الکتریکی به صورت $I = \frac{V}{R}$ رابطه‌ی توان را به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{V^2}{R} \quad (59)$$

برای رسم نمودار پاسخ توان، از رابطه‌ی (۵۶) استفاده می‌گردد و به این ترتیب می‌توان نمودار b^2/R_I بر حسب σ ، یا به عبارت دیگر، نمودار توان را ترسیم نمود. برای یافتن مقدار بهینه‌ی توان برداشت انرژی براساس رفتار غیر خطی ماده، تغییرات مقاومت در محدوده‌ی کاری معمول حسگرهای برداشت انرژی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین تنها متغیر تأثیرگذار بر مقدار بهینه برداشت انرژی، مقاومت الکتریکی است. با تغییر دادن مقاومت الکتریکی بین 10^3 اهم که شرایطی نزدیک به حالت اتصال کوتاه دارد تا 10^8 اهم، نمودار توان الکتریکی بر حسب مقاومت الکتریکی محاسبه و مقدار بیشینه توان قابل برداشت انرژی، که در فرکانس تشدید سیستم حسگر با مقامت مذکور می‌باشد، استخراج می‌گردد. این نمودار مطابق شکل (۹)، به صورت عددی رسم شده و هر نقطه‌ی محور Y آن بیشترین توان الکتریکی به ازای مقاومت موردنظر است. (برای درک بهتر رفتار نمودار، محور افقی به صورت لگاریتمی درجه‌بندی شده است). برای رسم نمودار شکل (۹)، از ۲۲ نقطه‌ی کمکی استفاده شده است، که در جدول (۳) مقدار توان الکتریکی در چند نقطه به‌طور نمونه آورده شده‌است. به این ترتیب، با توجه به شکل (۹) حداکثر توان الکتریکی به ازای $R_I = 177.828 \text{ k}\Omega$ اتفاق می‌افتد. البته مشاهده می‌شود که نمودار دارای مقدار بیشینه نسبی نیز هست. علت وجود این نقطه بیشینه‌ی نسبی، تغییرات دو عامل اثرگذار بر توان، یعنی جریان الکتریکی ($I = \frac{V}{R}$) و ولتاژ الکتریکی در جهت خلاف یکدیگر، ولتاژ در جهت افزایش و جریان در جهت کاهش، می‌باشد.

بر همین اساس و بسته به حدود مقاومت الکتریکی انتخابی برای پیدا کردن مقدار توان الکتریکی بهینه، ممکن است یک یا دو قله برای نمودار پدید آید. در سیستم حاضر، این نقطه‌ی بیشینه نسبی در نقطه‌ی $R_I = 5.623 \text{ k}\Omega$ اتفاق می‌افتد و یکی از کاربردهای آن این است که می‌توان در مواردی که محدودیت در افزایش مقاومت وجود دارد، برای استخراج حداکثر انرژی ممکن، از آن استفاده نمود.

در نهایت می‌توان گفت همانطور که نتایج نشان می‌دهد، سیستم برداشت انرژی مورد بررسی، با توجه به دامنه ارتعاشات پایه و مقاومت مورد استفاده، ولتاژی از حدود ۰٫۱ تا ۱٫۸ ولت تولید می‌کند. همچنین ماکزیمم توان قابل تولید، در حدود ۱ میکرووات می‌تواند باشد. این بازه تولید انرژی معمولاً می‌تواند برای راه اندازی سنسورها که نیازمند توان الکتریکی اندک هستند، مورد استفاده قرار گیرد. نتایج تحقیقات پیشین هم نشان می‌دهد، معمولاً برداشت کننده‌های انرژی بر پایه پیزوالکتریک، در کاربردهای راه اندازی سنسورها می‌توانند استفاده گردند.



شکل ۹- نمودار توان الکتریکی بر حسب مقاومت الکتریکی برای حسگر پیزوالکتریک

جدول ۳- مقادیر عددی توان حسگر پیزوالکتریک در نقاط نمونه

$(\Omega)R_l$	10^5	10^6	10^7	10^8
Power (W)	8.6×10^{-7}	5.0×10^{-7}	6.8×10^{-8}	7.0×10^{-9}

۶- نتیجه گیری

در این پژوهش مدلسازی غیرخطی پیزوالکتریک T215-A4-103X به عنوان حسگر برداشت انرژی و تعیین نقطه بهینه عملکردی انجام شد. بر این اساس، آنتالپی الکتریکی با یک دمپینگ غیرخطی و ضریب غیرخطی کرنش پیشنهاد شد که این مقادیر با استفاده از نتایج تجربی رفتار عملگر مشابه، به ترتیب برابر با 3.0090×10^{16} و -4.5804×10^{21} به دست آمدند. برای بررسی رفتار حسگر برداشت انرژی، تاثیر نیروی خارجی و مقاومت الکتریکی بعنوان متغیرهای مسئله بررسی گردید. با تغییرات نیرو، پاسخ فرکانسی مکان و ولتاژ دارای رابطه مستقیم با افزایش دامنه‌ی نیرو داشتند. با تغییر مقاومت الکتریکی، مشاهده شد که دامنه ولتاژ رابطه‌ی مستقیم دارد، در حالی که دامنه‌ی مکان ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. دلیل این امر وجود توان الکتریکی بهینه است که موجب کم شدن دامنه‌ی مکان در توان الکتریکی بهینه می‌شود. در ادامه برای بررسی دقیق تر رفتار توان الکتریکی، توان بر حسب مقاومت الکتریکی رسم گردید و مقدار بیشینه‌ی توان که همان هدف اصلی مسئله‌ی برداشت انرژی است، به ازای مقاومت $R_l = 177.828 \text{ k}\Omega$ به دست آمد. همچنین مشاهده گردید که نمودار توان دو قله‌ای است و مقدار بیشینه نسبی به ازای $5.623 \text{ k}\Omega$ نیز دارد که دلیل این امر رفتار معکوس عوامل تأثیرگذار بر توان، ولتاژ و جریان الکتریکی بوده است.

مراجع

- [1] Jalili, N., "*Piezoelectric-Based Vibration Control from Macro to Micro/Nano Scale Systems*", New York, Springer, (2010).
- [2] Erturk, A., and Inman, D.J., "*Piezoelectric Energy Harvesting*", John Wiley & Sons, United Kingdom, (2011).
- [3] Erturk, A., and Inman, D.J., "An Experimentally Validated Bimorph Cantilever Model for Piezoelectric Energy Harvesting from Base Excitations", *Smart Materials and Structures*, Vol. 18, pp. 025009-1-18, (2009).
- [4] Erturk, A., and Inman, D.J., "On Mechanical Modeling of Cantilevered Piezoelectric Vibration Energy Harvesters", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 19, pp. 1311-1325, (2008).
- [5] Erturk, A., Tarazaga, P.A., Farmer, J.R., and Inman, D.J., "Effect of Strain Nodes and Electrode Configuration on Piezoelectric Energy Harvesting from Cantilevered Beams", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 131, pp. 011010-1-11, (2009).
- [6] Jia, Y., and Seshia, A.A., "Power Optimization by Mass Tuning for MEMS Piezoelectric Cantilever Vibration Energy Harvesting", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 25, pp. 108-117, (2015).
- [7] Piñeirua, M., Doaré, O., and Michelin, S., "Influence and Optimization of the Electrodes Position in a Piezoelectric Energy Harvesting Flag", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 346, pp. 200-215, (2015).
- [8] Pang, S., Li, W., and Kan, J., "Optimization Analysis of Interface Circuits in Piezoelectric Energy Harvesting Systems", *Journal of Power Technologies*, Vol. 96, pp. 1-7, (2016).
- [9] Ahoor, Z., Ghafarirad, H., and Zareinejad, M., "Nonlinear Dynamic Modeling of Bimorph Piezoelectric Actuators using Modified Constitutive Equations Caused by Material Nonlinearity", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 28, pp. 763-773, (2019).
- [10] Shahabi, P., Ghafarirad, H., and Taghvaeipour, A., "Nonlinear Vibration Analysis of Piezoelectric Bending Actuators: Theoretical and Experimental Studies", *Comptes Rendus Mécanique*, Vol. 347, pp. 953-966, (2019).
- [11] Tan, D., Yavarow, P., and Erturk, A., "Nonlinear Elastodynamics of Piezoelectric Macro-fiber Composites with Interdigitated Electrodes for Resonant Actuation", *Composite Structures*, Vol. 187, pp. 137-143, (2018).
- [12] Stanton, S.C., Erturk, A., Mann, B.P., and Inman, D.J., "Nonlinear Piezoelectricity in Electroelastic Energy Harvesters: Modeling and Experimental Identification", *Journal of Applied Physics*, Vol. 108, pp. 074903-1-9, (2010).

- [13] Stanton, S.C., Erturk, A., Mann, B.P., Dowell, E.H., and Inman, D.J., "Nonlinear Nonconservative Behavior and Modeling of Piezoelectric Energy Harvesters Including Proof Mass Effects", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 23, pp. 183-199, (2012).
- [14] Leadenham, S., and Erturk, A., "Unified Nonlinear Electroelastic Dynamics of a Bimorph Piezoelectric Cantilever for Energy Harvesting, Sensing and Scutation", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 79, pp. 1727-1743, (2015).
- [15] Leadenham, S., and Erturk, A., "Nonlinear M-shaped Broadband Piezoelectric Energy Harvester for Very Low Base Accelerations: Primary and Secondary Resonances", *Smart Materials and Structures*, Vol. 24, pp. 055021-14, (2015).
- [16] Tan, D., Yavarow, P., and Erturk, A., "Resonant Nonlinearities of Piezoelectric Macro-Fiber Composite Cantilevers with Interdigitated Electrodes in Energy Harvesting", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 92, pp. 1935-1945, (2018).
- [17] Leadenham, S., and Erturk, A., "Mechanically and Electrically Nonlinear Non-ideal Piezoelectric Energy Harvesting Framework with Experimental Validations", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 99, pp. 625-641, (2020).
- [18] Leadenham, S., and Erturk, A., "M-Shaped Asymmetric Nonlinear Oscillator for Broadband Vibration Energy Harvesting: Harmonic Balance Analysis and Experimental Validation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 15, pp. 6209-6223, (2014).
- [19] Stanton, S.C., Erturk, A., Mann, B.P., and Inman, D.J., "Resonant Manifestation of Intrinsic Nonlinearity within Electroelastic Micropower Generators", *Applied Physics Letters*, Vol. 97, pp. 254101-1-3, (2010).

فهرست نمادهای انگلیسی

مساحت	A
عرض تیر	b
ضریب دمپینگ ویسکوز هوا	c_a
ضریب الاستیک پیزوالکتریک	c^E
ضریب دمپینگ ساختاری	c_s
ظرفیت پیزوالکتریک	C_p
جابه‌جایی الکتریکی	D
میدان الکتریکی	E
ثابت پیزوالکتریک	e
نیرو	f

$g(t)$	نیروی وارد بر پیزوالکتریک
H	آنتالپی
h	ارتفاع
$h(t)$	گشتاور خمشی وارد بر پیزوالکتریک
I	ممان اینرسی
$i(t)$	جریان الکتریکی
L	طول
M	ممان خمشی
m	جرم واحد طول
R_l	مقاومت الکتریکی
S	کرنش مکانیکی
s	ضریب نرمی مکانیکی
T	تنش مکانیکی
T	انرژی جنبشی
U	انرژی پتانسیل
V	نیروی برشی
v	ولتاژ
w	جابه‌جایی عرضی

نمادهای یونانی

α	ضریب غیرخطی
ε	ضریب دینامیکی در کرنش ثابت
ζ	ضریب دمپینگ
κ_r	ضریب کوپل الکترومکانیکی در معادله‌ی الکتریکی
λ	ثابت زمانی مدار مقاومتی-خازنی
μ	ضریب دمپینگ خطی و غیرخطی
ρ	چگالی
σ	پارامتر تنظیم
ϕ_r	شکل مود
χ_r	ضریب کوپل الکترومکانیکی در معادله‌ی مکانیکی
ω_r	فرکانس طبیعی

Abstract

In recent years, researches on energy harvesting by piezoelectric ceramics have increased. Generally, linear electromechanical constitutive equations have been utilized to model the behavior of piezoelectric based harvester. But, the linear modeling shows erroneous output for high amplitude and frequency inputs. In these cases, due to nonlinear material behavior, the nonlinear modeling should be carried out. In this paper, the nonlinear behavior and optimum response of a symmetric bimorph cantilever under the base excitation is studied. Electromechanical formulation is based on the Euler-Bernoulli beam theory.

A proposed nonlinear enthalpy is used to model the nonlinear dynamic using Lagrange equations. Applying the multiple scale perturbation method, the nonlinear coefficients are identified experimentally ($\bar{\mu}_1 = 3.0090 \times 10^{16}$ and $\beta_1 = -4.5804 \times 10^{20}$). Then, nonlinear behavior of harvester has been analyzed considering generated voltage, current and beam deflection. Finally, using the results of Power FRF, the optimum load resistance is achieved to maximize the generated power ($R_1 = 177.828 \text{ k}\Omega$).