

ارتعاشات آزاد میکروتیرهای چرخان ساخته شده از مواد هدفمند

در این مقاله به بررسی ویژگی‌های ارتعاشی میکروتیرهای چرخان اویلر-برنولی ساخته شده از مواد هدفمند در محیط گرمایی بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداخته می‌شود. جهت در نظر گرفتن اثرات نیروی گریز از مرکز برای میکروتیرهای چرخان هدفمند از انرژی جنبشی میکروتیر چرخان استفاده شده که قادر به اصلاح اشتباه رایج در میکروتیرهای چرخان هدفمند بوده که اثر نیروی گریز از مرکز تنها به صورت یک نیروی محوری در نظر گرفته می‌شود. تأثیر پارامتر اندازه، تغییر دما، ضریب قانون توانی ماده هدفمند و نسبت لاغری بر فرکانس طبیعی اول و شکل مودهای اول و دوم بررسی می‌گردد.

سیده محمدحسین حسینی

چالشتی^۱

کارشناسی ارشد

هادی آروین بروجنی^۲

دانشیار

محسن بت شکنان دهکردی^۳

دانشیار

واژه‌های راهنما: میکروتیر چرخان، مواد هدفمند، روش المان محدود، روش نیوتن-رفسون، شکل مود

۱- مقدمه

کوچک سازی افق‌های جدیدی را به سوی دنیای مدرن باز نموده است. صنعت هم به عنوان یکی از شاخه‌های مدرن سازی دست به کوچک سازی در طراحی و ساخت تولیدات خود در مواردی همچون موبایل‌های شخصی، تبلت‌ها، کامپیوترها و دیگر وسایل الکترونیکی زده است. در حال حاضر کوچک سازی از لوازم صوتی و تصویری به سمت زمینه‌هایی از جمله توربوماشین‌ها حرکت نموده است. به عنوان مثال ساخت موتور با میکروتوربین‌های گازی با ضخامت ۲۲۰ میکرومتر و سرعت چرخش ۸۰۰۰۰ rpm یکی از جدیدترین تولیدات در زمینه توربوماشین‌ها است [۱]. مهرا و همکاران [۲] توانستند موتوری با میکروتوربین گازی را طراحی و تولید نمایند که می‌تواند ۱۰-۵۰ وات الکتربسیته تولید کند در حالی که فقط ۱ سانتی متر مکعب حجم دارد. یکی از مهمترین بخش‌های میکروتوربین‌ها، پره چرخان آن‌ها می‌باشد که به صورت میکروتیر مدل می‌گردد. لذا مطالعه ویژگی‌های ارتعاشی میکروتیرهای چرخان همانند فرکانس طبیعی آن‌ها یکی از اساسی‌ترین قدمها در تحلیل رفتار دینامیکی و ارتعاشی میکروتوربین‌ها می‌باشد.

^۱ کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد hoseinhoseini@stu.sku.ac.ir

^۲ دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد hadi.arvin@sku.ac.ir

^۳ دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد botshekanan@sku.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۰۷، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۱۸

با توجه به اهمیتی که میکروتیرهای چرخان در زمینه‌های صنعتی و دیگر زمینه‌ها دارند در این مقاله به بررسی و تحلیل ارتعاشات آزاد میکروتیرهای چرخان اویلر- برنولی ساخته شده از مواد هدفمند مدل شده بر اساس فرض‌های تیر اویلر-برنولی و تئوری تنش کوپل اصلاح شده با استفاده از روش المان محدود پرداخته می‌شود. تئوری تنش کوپل اصلاح شده به عنوان یکی از تئوری‌های مرتبه بالا (غیرکلاسیک) توسط پژوهشگران متعددی مورد استفاده قرار گرفته است. کنگ و همکاران [۳] به مطالعه فرکانس‌های طبیعی میکروتیرهای اویلر- برنولی ایزوتروپ مدل شده بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداختند. آگوز و چیوالک [۴] ارتعاشات آزاد یک میکروتیر مخروطی اویلر- برنولی را بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده بررسی نمودند. ایشان در این پژوهش با استفاده از روش ریلی-ریتز فرکانس‌های طبیعی مورد نظر را بدست آوردند و اثر مخروطی بودن میکروتیر بر فرکانس‌های بدست آورده شده را بررسی نمودند.

انصاری و همکاران [۵] ارتعاشات آزاد میکروتیرهای ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از تئوری گرادپان کرنش برای یک میکروتیر مدل شده بر اساس تئوری مرتبه بالای ردی مورد بررسی قرار دادند. الباسیونی و همکاران [۶] با ارائه میدان تغییر مکان سینوسی جدید، خمش و ارتعاشات وابسته به اندازه یک میکروتیر ساخته شده از مواد هدفمند را بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. ژیانگ و یانگ [۷] به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری تیرهای تیموشنکوی چند لایه ساخته شده از مواد هدفمند با ضخامت متغیر در محیط گرمایی پرداختند. الشورباقی و همکاران [۸] ارتعاشات آزاد یک تیر ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از روش اجزا محدود مورد بررسی قرار دادند. پرادان و چاکراورتی [۹] ارتعاشات آزاد تیرهای اویلر- برنولی و تیموشنکو ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از روش ریلی ریتز برای شرایط مرزی مختلف مورد مطالعه قرار دادند. ماشات و همکاران [۱۰] ارتعاشات آزاد تیر ساخته شده از مواد هدفمند چندلایه مدل شده بر اساس فرمولاسیون متحد کررا را با بکار گیری روش اجزا محدود بررسی کردند. واتاناساکولپینگ و چایکیتیراتانا [۱۱] به بررسی ارتعاشات تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند متخلخل با شرایط مرزی مختلف پرداختند. ایشان اشاره نمودند که مشکلات فنی در فرآیند ساخت مواد هدفمند باعث ایجاد تخلخل می‌شود که متعاقباً منجر به کاهش چگالی و استحکام این مواد خواهد شد. رجب و حامد [۱۲] ارتعاشات آزاد تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو ساخته شده از مواد هدفمند همراه با تخلخل درون تیر را با استفاده از روش ماتریس انتقال بررسی کردند. ایشان تاثیر ضریب لاغری، خواص مواد و شرایط مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی بدون بعد را مورد مطالعه قرار دادند. هووا [۱۳] به بررسی فرکانس‌های طبیعی یک تیر چرخان با جرم نقطه‌ای در انتهای آن پرداخت. لین و هسیو [۱۴] ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکوی چرخان را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از اصل دالامبر و کار مجازی برای بدست آوردن معادلات حاکم استفاده نمودند. ایشان برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی از روش سری‌های توانی استفاده کردند. تورهان و بولت [۱۵] به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری غیرخطی خمشی تیرهای چرخان پرداختند.

رامش و رائو [۱۶] به بررسی ارتعاشات آزاد یک تیر پیش پیچیده شده چرخان ساخته شده از مواد هدفمند پرداختند. آروین و بختیاری نژاد [۱۷] ارتعاشات آزاد غیر خطی یک تیر تیموشنکوی کامپوزیتی چرخان مدل شده بر اساس روابط کرنش-تغییر مکان فون-کارمن را تجزیه و تحلیل کردند. آروین [۱۸] به بررسی ارتعاشات آزاد میکروتیرهای چرخان ایزوتروپ بر مبنای تئوری گرادپان کرنش و فرضیات تیر اویلر برنولی پرداخت.

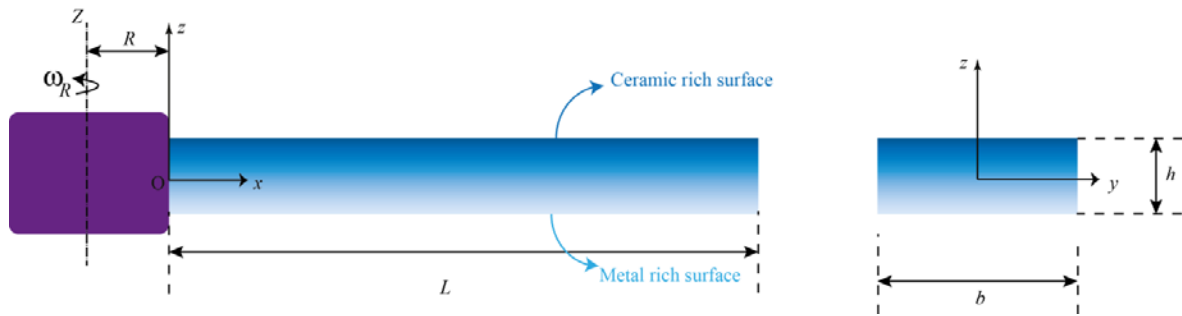
نتایج بدست آمده نشان داد که با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اندازه، فرکانس‌های طبیعی عرضی افزایش یافته و نتایج هر سه تئوری گرادیان کرنش، تنش کوپل اصلاح شده و کلاسیک بر یکدیگر منطبق می‌گردند. آروین [۱۹] با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی به بررسی فرکانس‌های طبیعی میکروتیرهای تیموشنکوی چرخان ایزوتروپ با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداخت. ارتعاشات و پایداری یک تیر رایلی با حرکت چرخشی حول محور تیر و حرکت محوری با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده توسط ژو و چانگ [۲۰] مورد تحلیل قرار گرفت. حیدری و آروین [۲۱] به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی یک تیر تیموشنکوی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی پرداختند. میرزایی و همکاران [۲۲] به بررسی خزش اولیه ناشی از گرما در پره‌های تیموشنکوی چرخان هدفمند با ضخامت متغیر تحت بارگذاری عرضی گسترده پرداختند. نتایج نشان داد که اندازه ذره تقویت کننده و نوع توزیع تقویت کننده‌ها اثر قابل ملاحظه‌ای در رفتار ماندگار تیر ناشی از خزش دارد. تنش ایجاد شده، توزیع دما و تغییرشکل ناشی از بارگذاری حرارتی و بار مکانیکی عرضی گسترده در تیرها و پره‌های تیموشنکوی چرخان هدفمند با ضخامت متغیر به ترتیب توسط میرزایی و همکاران [۲۳] و [۲۴] مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج در [۲۳] نشان داد که اثر در نظر گرفتن تابعیت دما بودن خواص ماده هدفمند در نتایج محاسبه شده بسیار حائز اهمیت است. از طرف دیگر در [۲۴] نشان داده شد که توزیع نوع A برای تقویت کننده باعث وارد شدن کمترین میزان تنش به پره چرخان می‌گردد. در این مقاله ارتعاشات آزاد میکروتیرهای چرخان ساخته شده از مواد هدفمند در محیط گرمایی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. معادلات حاکم با توجه به فرض‌های تیر اویلر-برنولی و بر اساس تئوری کوپل اصلاح شده استخراج می‌گردد. جهت وارد نمودن اثرات پیش‌تنش ناشی از چرخش و گرما که منجر به تغییرشکل استاتیکی می‌گردد رابطه کرنش-تغییر مکان فون-کارمن به کار گرفته می‌شود. در ضمن اثرات نیروی گریز از مرکز در انرژی جنبشی میکروتیر چرخان گنجانده شده تا بدین ترتیب اشتباه رایج در میکروتیرهای چرخان هدفمند که اثر نیروی گریز از مرکز در آنها تنها به صورت یک نیروی محوری در نظر گرفته می‌شود اصلاح گردد. پس از محاسبه انرژی کرنشی و جنبشی روش اجزا محدود بر آن‌ها اعمال می‌گردد. با جداسازی تغییر مکان‌های استاتیکی و دینامیکی معادلات غیرخطی استاتیکی استخراج می‌گردد که روش نیوتن-رفسون جهت حل آن‌ها به کار گرفته می‌شود. معادلات دینامیکی باقی مانده نیز حول تغییرشکل استاتیکی ایجاد شده خطی سازی می‌گردند تا فرکانس‌های طبیعی خطی حاصل گردد. اثر پارامترهای متفاوتی همچون پارامتر اثر اندازه، دما، ضریب قانون توانی و نسبت طول به ضخامت بر روی فرکانس طبیعی اول و شکل مودهای اول و دوم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- معادلات حرکت و حل آن‌ها

۲-۱- استخراج معادلات حرکت

شماطیک یک میکروتیر ساخته شده از مواد هدفمند که با سرعت ω_R حول محور Z می‌چرخد در شکل (۱) نشان داده شده است. در این شکل R ، h و b به ترتیب شعاع روتور، ضخامت تیر، عرض تیر و طول تیر می‌باشند. اگر x معرف موقعیت مکانی مرکز هر سطح مقطع نسبت به سطح مقطع متصل به روتور باشد، با در نظر گرفتن فرضیات تیر اویلر-برنولی و صرف نظر از تغییر مکان در راستای محور Y ، میدان تغییر مکان را می‌توان به صورت رابطه (۱) در نظر گرفت [۲۵]:

$$U_0 = u(x,t) - z \cdot \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad V = 0, \quad W = w(x,t) \quad (1)$$



شکل ۱- نمای کلی میکروتیر هدفمند چرخان

که در این رابطه U_0 ، V و W به ترتیب تغییر مکان ذره‌ای در موقعیت x و در زمان t و در راستای محورهای x ، y و z می‌باشند. $u(x,t)$ نیز تغییر مکان صفحه میانی در راستای محور x می‌باشد. از طرفی انرژی کرنشی میکروتیر چرخان را بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده می‌توان به صورت رابطه (۲) در نظر گرفت [۱۹]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + 2m_{xy} \chi_{xy}) dA dx \quad (2)$$

که در این رابطه σ_{xx} ، ε_{xx} ، m_{xy} و χ_{xy} به ترتیب نشان دهنده تنش و کرنش در راستای محور x و تنش کوپل و خمیدگی می‌باشند.

در حضور محیط گرمایی رابطه تنش-کرنش را می‌توان به صورت رابطه (۳) نوشت [۲۶]:

$$\sigma_{xx} = Q_{11}(z)(\varepsilon_{xx} - \varepsilon^T) \quad (3)$$

که در این رابطه $Q_{11}(z) = E(z)$ سفتی الاستیک، $E(z)$ مدول یانگ و ε^T کرنش گرمایی می‌باشند که توسط $\varepsilon^T = \alpha(z)\Delta T$ تعیین می‌گردد که $\alpha(z)$ ضریب انبساط ماده و ΔT تغییرات دما می‌باشد. شایان ذکر است که با توجه به اینکه ماده مورد نظر هدفمند می‌باشد کلیه خواص آن مطابق رابطه (۴) محاسبه و تعیین می‌گردد:

$$P(z) = (P_c - P_m)V_f + P_m \quad (4)$$

که در این رابطه $P(z)$ هر خاصیت مکانیکی و یا حرارتی از جسم شامل مدول الاستیسیته، مدول برشی، چگالی و ضریب انبساط می‌تواند باشد و P_c و P_m به ترتیب نمایشگر خاصیت مورد نظر برای فلز و یا سرامیک است. $V_f = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^n$ نیز نمایانگر کسر حجمی سرامیک است و در این رابطه n ضریب قانون توانی برای ماده هدفمند است. با فرض کرنش کوچک و چرخش متوسط [۲۶] رابطه کرنش-تغییر مکان فون-کارمن به کار گرفته می‌شود:

$$\varepsilon_{xx} = [\varepsilon_{xx}^0] + z[\varepsilon_{xx}^1] \equiv \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + z \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (5)$$

از طرف دیگر رابطه بین تنش کوپل و خمیدگی توسط رابطه (۶) مشخص می‌گردد [۱۹]:

$$m_{xy} = 2\mu(z)l^2\chi_{xy} \quad (6)$$

که در این رابطه l پارامتر اثر اندازه و $\mu(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$ مدول برشی می‌باشد و خمیدگی از رابطه (۷) تعیین می‌گردد [۱۹]:

$$\chi_{xy} = \chi_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x} \right) \quad (7)$$

که θ_x و θ_y چرخش می‌باشند و توسط رابطه (۸) تعیین می‌گردند [۱۹]:

$$\theta_x = \theta_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad \theta_y = \theta_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_0}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (8)$$

بدین ترتیب حال با جایگذاری رابطه (۵) در رابطه (۲)، انرژی کرنشی میکروتیر چرخان قابل محاسبه است:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{xx}\epsilon_{xx}^0 + z\sigma_{xx}\epsilon_{xx}^1 + 2m_{xy}\chi_{xy}) dAdx = \frac{1}{2} \int_0^L (N_{xx}\epsilon_{xx}^0 + M_{xx}\epsilon_{xx}^1 + 2P_{xy}\chi_{xy}) dx \quad (9)$$

که در این رابطه N_{xx} نیروی منتهجه محوری در جهت x ، M_{xx} گشتاور منتهجه حول محور y ، و P_{xy} گشتاور منتهجه مرتبه بالا می‌باشند و به ترتیب به صورت رابطه (۱۰) تعیین می‌گردند:

$$N_{xx} = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz, \quad M_{xx} = b \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx} dz, \quad P_{xy} = b \int_{-h/2}^{h/2} m_{xy} dz \quad (10)$$

که فرم ساده شده این رابطه‌ها پس از جایگذاری رابطه‌های (۳)، (۵)، (۷) و (۸) در رابطه (۱۰) به صورت رابطه (الف-۱) پیوست داده شده است.

انرژی جنبشی میکروتیر چرخان با رابطه (۱۱) قابل محاسبه است [۱۷]:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(z) \left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial t} \right)^2 + \omega_R^2 (R+x+U_0)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] dAdx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \omega_R^2 \{ I_0 (R+x+u)^2 - 2I_1 (R+x+u) \frac{\partial w}{\partial x} + I_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \} \right. \\ &\quad \left. - 2I_1 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + I_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (11)$$

که در این رابطه $I_i = b \int_{-h/2}^{h/2} z^i \rho(z) dz$ ، $i = 0, 1, 2$ ها ترم‌های مرتبط با اینرسی جرمی و $\rho(z)$ چگالی ماده می‌باشد. حال با به کار گیری اصل همپلتون، یعنی $\delta \int_{t_1}^{t_2} (T-U) dt = 0$ ، و اعمال آن بر رابطه‌های (۹) و

(۱۱) فرم ضعیف معادلات قابل دستیابی است:

$$\int_0^L \left[N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^1 + 2P_{xy} \delta \chi_{xy} \right] dx = \int_0^L \left[I_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} + I_0 \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} - I_1 \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right. \\ \left. - I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} + I_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \Omega^2 \{ I_0 (R+x+u) \delta u - I_1 (R+x+u) \delta \frac{\partial w}{\partial x} - I_1 \frac{\partial w}{\partial x} \delta u \right. \\ \left. + I_2 \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx \quad (12)$$

شایان ذکر است که با استفاده از رابطه‌های (۵)، (۷) و (۸) سمت چپ رابطه (۱۲) به صورت رابطه (۱۳) قابل ساده شدن است:

$$\text{LHS(Eq.(12))} = \int_0^L \left[N_{xx} \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) + M_{xx} \left(-\delta \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \right) + 2P_{xy} \left(-\frac{1}{2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \right) \right] dx \quad (13)$$

روش مورد استفاده جهت حل معادلات حرکت روش اجزا محدود می‌باشد. بدین ترتیب تغییر مکان‌های طولی و عرضی هر المان با کمک توابع شکل فرض شده‌ای تقریب زده می‌شوند که جهت تحقق شرایط مرزی هندسی در هر المان برای تغییر مکان طولی یک تابع شکل درجه ۱ و برای تغییر مکان عرضی از تابع درجه ۳ استفاده می‌گردد [۲۷]. بدین ترتیب تغییر مکان‌های طولی و عرضی یک المان به صورت رابطه (۱۴) تقریب زده خواهند شد [۲۸]:

$$u^e = \sum_{j=1}^2 q_j^u \psi_j^u(\xi) = \mathbf{N}_u \mathbf{q}^e, \quad w^e = \sum_{j=1}^4 q_j^w \psi_j^w(\xi) = \mathbf{N}_w \mathbf{q}^e \quad (14)$$

که در این رابطه‌ها \mathbf{q}^e مختصات عمومی محلی برای یک المان می‌باشد و مطابق رابطه (۱۵) تعیین می‌گردد و \mathbf{N}_u و \mathbf{N}_w تابع شکل‌های طولی و عرضی بوده و توسط رابطه (۱۶) تعیین می‌گردند [۲۸]:

$$\mathbf{q}^e = [q_1^w \quad q_2^w \quad q_1^u \quad q_3^w \quad q_4^w \quad q_2^u]^T \quad (15)$$

$$\mathbf{N}_u = [0 \quad 0 \quad \psi_1^u \quad 0 \quad 0 \quad \psi_2^u], \quad \mathbf{N}_w = [\psi_1^w \quad \psi_2^w \quad 0 \quad \psi_3^w \quad \psi_4^w \quad 0] \quad (16)$$

که $\psi_i^{u,w}(\xi)$ جهت تحقق شرایط مرزی هندسی در هر المان به صورت رابطه (۱۷) می‌باشند [۲۸]:

$$\psi_1^u(\xi) = 1 - \xi \quad \psi_1^w(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad \psi_2^u(\xi) = l_e(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \\ \psi_2^w(\xi) = \xi \quad \psi_3^w(\xi) = (3\xi^2 - 2\xi^3) \quad \psi_4^w(\xi) = l_e(-\xi^2 + \xi^3), \quad (17)$$

با جایگذاری رابطه (۱۴) در معادله (۱۲) و استفاده از رابطه (۱۳) می‌توان رابطه‌ای برای فرم ضعیف معادله حاکم بر یک المان به صورت رابطه (۱۸) به دست آورد:

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{F}^e \quad (18)$$

که در این رابطه \mathbf{M}^e ، \mathbf{K}^e و \mathbf{F}^e به ترتیب ماتریس‌های جرم و سفتی و بردار نیروی وارد بر المان k ام می‌باشند و توسط رابطه‌های (الف-۴) تا (الف-۹) تعیین می‌گردند. پس از سوار نمودن ماتریس‌های جرم و سفتی و بردار نیرو معادله حرکت به صورت رابطه (۱۹) به دست می‌آید:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{NL}(\mathbf{q}, \mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (19)$$

که در این رابطه \mathbf{M} ، $\mathbf{K}^{NL}(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ و \mathbf{F} به ترتیب ماتریس‌های جرم و سفتی و بردار نیرو می‌باشند. از طرفی با توجه در نظر گرفتن رابطه کرنش-تغییر مکان فون-کارمن ماتریسی غیرخطی دارای غیرخطی‌های مرتبه دوم و سوم می‌باشد که به صورت $\mathbf{K}^{NL}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}^{(3)}(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ در نظر گرفته می‌شود که ماتریس‌های $\mathbf{K}^{(1)}$ ، $\mathbf{K}^{(2)}(\mathbf{q})$ و $\mathbf{K}^{(3)}(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ به ترتیب سفتی خطی، غیرخطی مرتبه دوم و سوم می‌باشند. با توجه به اینکه نیروی گریز از مرکز ناشی از چرخش با سرعت ثابت و همچنین بار گرمایی باعث ایجاد تغییر شکل استاتیکی در سازه‌های چرخان در محیط گرمایی می‌گردد لذا مختصات عمومی به صورت حاصل جمع ترم‌های استاتیکی و دینامیکی در نظر گرفته می‌شود یعنی، $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_d(t)$. با جایگذاری این رابطه در معادله (۱۹) و جداسازی بخش استاتیکی معادله‌های حرکت و خطی سازی بخش دینامیکی حول مختصات عمومی استاتیکی، به ترتیب، دو معادله (۲۰) و (۲۱) استخراج می‌گردند:

$$\mathbf{K}^{NL}\mathbf{q}_s = \mathbf{F} \quad (20)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}^{NL*}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_s)\mathbf{q}_d = \mathbf{0} \quad (21)$$

که در این رابطه \mathbf{K}^{NL*} ماتریس سفتی حول پیکره بندی استاتیکی می‌باشد.

۲-۲- حل معادلات حرکت

دو روش مرسوم در المان محدود جهت حل معادلات حرکت استاتیکی پیشنهاد می‌گردد: ۱- روش تکرار مستقیم و ۲- روش نیوتن-رفسون [۲۷]. در روش اول ابتدا معادله استاتیکی خطی سازی شده و حل می‌گردد. سپس با پاسخ به دست آمده قسمت غیرخطی‌های مرتبه دوم و سوم ماتریس سفتی برورسانی می‌گردد. در این حالت با یک مسأله خطی جدید مواجه می‌شویم که مجدداً این فرآیند تا همگرایی پاسخ استاتیکی پیگیری می‌گردد. در روش دوم در گام اول مشابه روش اول حل خطی محاسبه می‌گردد. سپس با توجه به باقیمانده عدم تحقق تساوی رابطه (۲۰) و ماتریس سفتی مماسی، یعنی $\mathbf{T}^{NL}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_s) = \mathbf{K}^{(1)} + 2\mathbf{K}^{(2)}(\mathbf{q}_s) + 3\mathbf{K}^{(3)}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_s)$ پاسخ استاتیکی انجام می‌پذیرد. برتری روش نیوتن-رفسون سرعت بالای همگرایی آن در مقایسه با روش تکرار مستقیم است. خوانندگان جهت مشاهده روش نیوتن-رفسون می‌توانند به بخش الف-۲-۳ از کتاب ردی [۲۷] مراجعه نمایند.

پس از محاسبه پاسخ استاتیکی و جایگذاری آن در رابطه (۲۱) معادله خطی شده دینامیکی حول پاسخ استاتیکی حاصل می‌گردد. در این مرحله برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی از ماتریس‌های سفتی \mathbf{K}^{NL*} و جرمی استفاده می‌گردد.

۳- آنالیز عددی

۳-۱- اعتبارسنجی

در این بخش به صحت سنجی نتایج ارائه شونده پرداخته می‌گردد. در ابتدا نتایج محاسبه شده برای فرکانس‌های طبیعی یک تیر هدفمند ثابت با نتایج ارائه شده توسط رجب و حامد [۱۲] بر اساس فرض‌های تیر اویلر-برنولی مقایسه می‌گردد. رجب و حامد [۱۲] با استفاده از روش انتقال ماتریسی فرکانس‌های طبیعی را محاسبه نموده‌اند. جنس فلز مورد استفاده در این ماده هدفمند آلومینیوم و جنس سرامیک آن آلومینا می‌باشد.

خواص مکانیکی و ضریب انبساط آلومینیوم و آلومینا به ترتیب به صورت $E_m = 70(\text{GPa})$ ، $\rho_m = 2702(\text{kg/m}^3)$ ، $\nu_m = 0.3$ ، $E_c = 380(\text{GPa})$ ، $\rho_c = 3960(\text{kg/m}^3)$ و $\nu_c = 0.3$ می‌باشند. اولین

فرکانس طبیعی بدون بعد که توسط رابطه $\Omega = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ محاسبه می‌گردد که ω در آن فرکانس طبیعی

با بعد متناظر می‌باشد برای نسبت لاغری $L/h = 20$ در جدول (۱) ارائه شده است. نتایج حاکی از تایید فرمولاسیون و نتایج جاری برای فرکانس‌های طبیعی تیرهای هدفمند می‌باشد.

پس از تایید نتایج فرکانس طبیعی برای تیرهای هدفمند در این بخش به بررسی صحت نتایج حاضر برای میکروتیرهای چرخان پرداخته می‌شود. بدین منظور نتایج تغییر شکل استاتیکی و فرکانس‌های طبیعی با نتایج آروین (۲۰۱۸) مقایسه و صحت سنجی می‌گردد. میکروتیر چرخان مورد مطالعه از جنس اپوکسی و با خواص مکانیکی و هندسی $E = 1.4(\text{GPa})$ ، $\rho = 1220(\text{kg/m}^3)$ ، $\nu = 0.3$ ، $l = 17.6(\mu\text{m})$ ، $L = 152.42(\mu\text{m})$

و $R/L = 0.1$ و $h/l = 1$ می‌باشد. سرعت چرخش بدون بعد نیز توسط رابطه $\lambda_R = \omega_R L \sqrt{\frac{I_0}{A_{11}}}$ تعیین می‌گردد.

تغییر شکل استاتیکی طولی ایجاد شده در طول میکروتیر در مقایسه با نتایج آروین [۱۹] برای $\lambda_R = 0.25$ در شکل (۲) نشان داده شده است. نتایج حاکی از تطابق بسیار خوب تغییر شکل استاتیکی ناشی از پیش تنش ایجاد شده به واسطه چرخش میکروتیر می‌باشد. شایان ذکر است که نتایج آروین [۱۹] برای تغییر شکل استاتیکی توسط رابطه‌ای تحلیلی ارائه شده است. فرکانس طبیعی اول میکروتیر چرخان با همان شرایط مکانیکی و هندسی ذکر شده در مقایسه با نتایج آروین [۱۹] در شکل (۳) مشاهده می‌گردد.

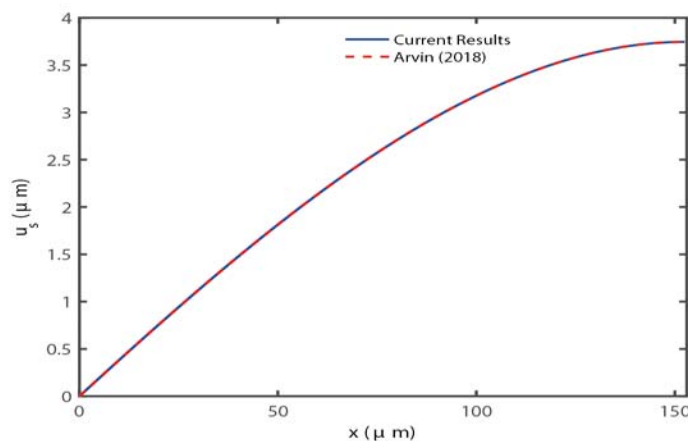
جدول ۱- فرکانس طبیعی بدون بعد اول تیر اویلر-برنولی هدفمند در مقایسه با نتایج رجب و حامد [۱۲]

n	نتایج حاضر	نتایج رجب و حامد (۲۰۱۷)	درصد اختلاف
0.2	1.813	1.816	0.17
1	1.503	1.504	0.07
5	1.306	1.307	0.08

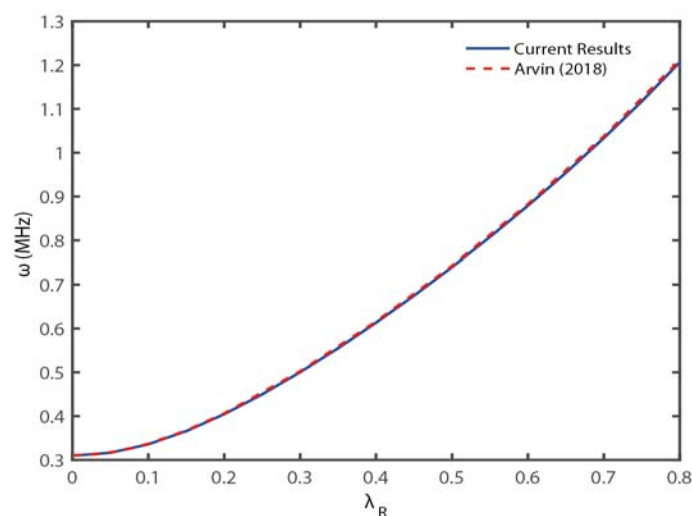
لازم به ذکر است که روش انتقال دیفرانسیلی در آروین [۱۹] جهت تخمین فرکانس‌های طبیعی به کار گرفته شده است. نتایج نشان دهنده دقت مورد قبول روش حاضر در تعیین فرکانس‌های طبیعی برای میکروتیرهای چرخان است.

۳-۲- مطالعه پارامتری

پس از صحنه‌گذاری بر نتایج حاضر در این بخش تعدادی مطالعه پارامتری جهت روشن سازی اهمیت پارامترهای دخیل در تغییر شکل استاتیکی، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها ارائه می‌گردد. فلز ماده هدفمند مورد استفاده فولاد ضد زنگ SUS304 و سرامیک به کار گرفته شده سیلیکون نیتريد Si_3N_4 می‌باشد. خواص مکانیکی و ضریب انبساط فولاد ضد زنگ و سیلیکون نیتريد به ترتیب به صورت $E_m = 207.79$ (GPa)، $E_c = 322.27$ (GPa)، $\rho_m = 8166$ (kg/m³)، $\rho_c = 2170$ (kg/m³)، $\nu_m = 0.28$ و $\nu_c = 0.28$ و $\alpha_c = 7.4746 \times 10^{-6}$ (K⁻¹) می‌باشند [۲۹].



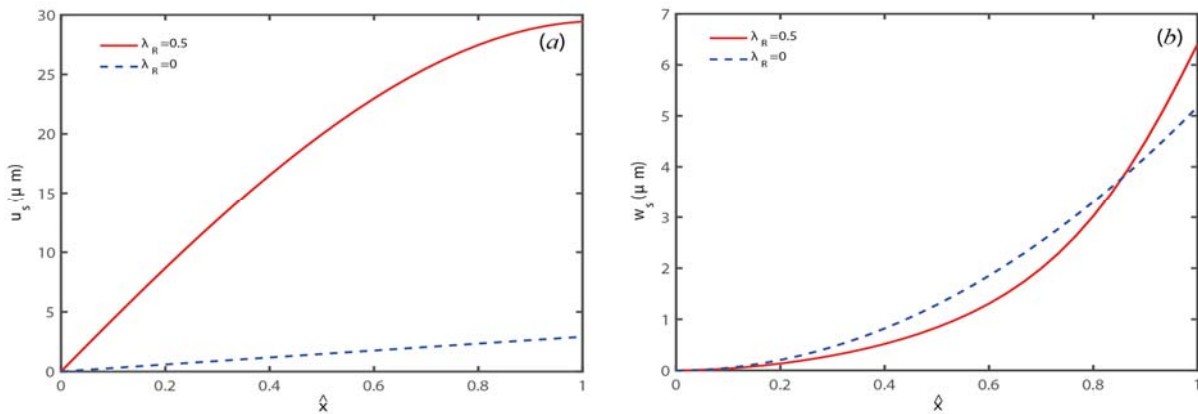
شکل ۲- تغییر شکل استاتیکی طولی ناشی از چرخش میکروتیر ایزوتروپ در مقایسه با آروین (۲۰۱۸) [۱۹]



شکل ۳- فرکانس طبیعی اول میکروتیر ایزوتروپ چرخان بر حسب سرعت چرخش بدون بعد در مقایسه با

آروین (۲۰۱۸) [۱۹]

۳-۲-۱- تأثیر سرعت چرخش بر جابجایی استاتیکی

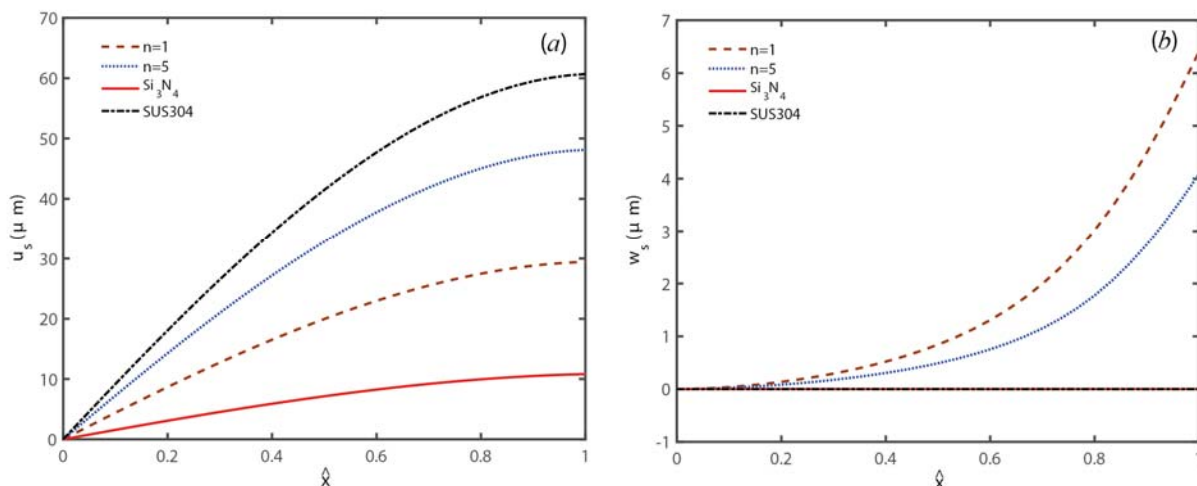


شکل ۴- اثر سرعت چرخش بدون بعد بر تغییر شکل استاتیکی ناشی از چرخش میکرو تیر هدفمند و بار حرارتی، الف- تغییر شکل استاتیکی طولی و ب- تغییر شکل استاتیکی عرضی ($\Delta T = 500$ و $n = 1$)

خواص هندسی میکروتیر چرخان و پارامتر اثر اندازه نیز به صورت، $L = 30h$ ، $R/L = 0.1$ ، $h = 17.6(\mu\text{m})$ ، و $l/h = 1$ می باشد. شایان ذکر است که فرکانس های طبیعی ارائه شونده بر اساس نوع تئوری مورد استفاده جهت مدلسازی با در نظر گرفتن اثر پارامتر اندازه و بدون آن به ترتیب به صورت MCST و CT نمایش داده خواهند شد. تغییر شکل استاتیکی ایجاد شده در میکروتیر چرخان برای سرعت چرخش های بدون بعد متفاوت در شکل (۴) نمایش داده شده است. همانگونه که مشاهده می گردد با افزایش سرعت چرخش تغییر شکل استاتیکی نیز افزایش می یابد. از طرف دیگر میکروتیر غیر چرخان نیز به دلیل بارگذاری حرارتی انجام شده دارای تغییر شکل استاتیکی می باشد. نکته قابل مشاهده دیگر نیز هم مرتبه بودن تغییر شکل استاتیکی عرضی برای میکروتیرهای چرخان و غیر چرخان است در حالی که تغییر شکل طولی دو میکروتیر مذکور بسیار متفاوت می باشد. شایان ذکر است که میکروتیرهای ایزوتروپ با مقطع مستطیلی به دلیل تقارن موجود دارای تغییر شکل عرضی نخواهند گردید در صورتی که در میکروتیرهای هدفمند تغییر شکل عرضی نیز ایجاد خواهد شد.

۳-۲-۲- تأثیر ضریب قانون توانی بر جابجایی استاتیکی

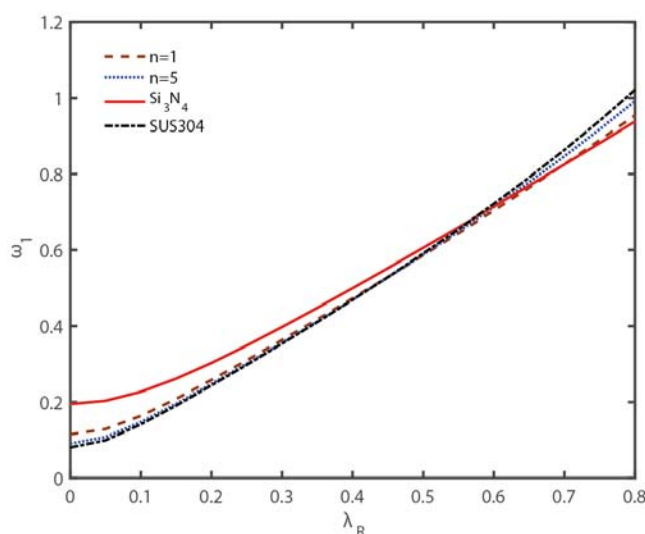
اثر ضریب قانون توانی بر تغییر شکل استاتیکی ایجاد شده در میکروتیر چرخان در شکل (۵) نشان داده شده است. دو عامل مهم در ایجاد تغییر شکل استاتیکی در شرایط یکسان چگالی و سفتی طولی می باشند. حال به دلیل اینکه چگالی سیلیکون نیتريد به فولاد ضد زنگ $\rho_c/\rho_m = 0.27$ بوده نیروی گریز از مرکز ایجاد شده در فولاد ضد زنگ بیشتر می باشد و همزمان مدول یانگ سیلیکون نیتريد به فولاد ضد زنگ $E_c/E_m = 1.55$ می باشد که باعث صلبیت طولی بیشتر سیلیکون نیتريد است و لذا تغییر شکل ایجاد شده در فولاد بسیار بیشتر می باشد. علاوه بر این می توان به این نکته اشاره نمود که با افزایش ضریب توانی و بیشتر شدن درصد فاز سرامیک تغییر شکل استاتیکی طولی کاهش می یابد در حالی که تغییر شکل عرضی افزایش یافته است. شایان ذکر است که همانگونه که در بخش پیش نیز ذکر شد در صورت استفاده از مواد ایزوتروپ تغییر شکل عرضی صفر خواهد گردید.



شکل ۵- اثر ضریب قانون توانی ماده هدفمند بر تغییر شکل استاتیکی ناشی از چرخش میکرو تیر هدفمند و بار حرارتی، الف- تغییر شکل استاتیکی طولی و ب- تغییر شکل استاتیکی عرضی ($\Delta T = 500$ و $\lambda_R = 0.5$)

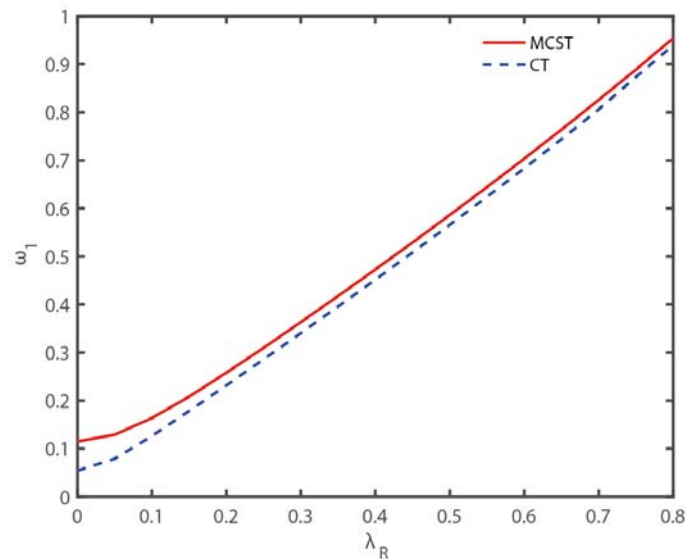
۳-۲-۳- تأثیر سرعت چرخش بر فرکانس طبیعی و شکل مودها

اثر سرعت چرخش بر فرکانس طبیعی اول میکروتیر چرخان ساخته شده از مواد هدفمند در این بخش بررسی می‌گردد. شکل (۶) فرکانس طبیعی اول را برای ضریب‌های قانون توانی مختلف و افزایش دمای ۵۰۰ درجه کلویین نشان می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌گردد در سرعت پایین مشخص، با افزایش این ضریب (یعنی افزایش فاز فلز) فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد که دلیل آن کاهش سفتی خمشی می‌باشد. با بیشتر شدن سرعت، تغییر شکل استاتیکی فاز فلز بسیار بیشتر می‌گردد که در شکل (۵) نیز قابل مشاهده است. بدین ترتیب فرکانس طبیعی با افزایش این ضریب افزایش خواهد یافت.

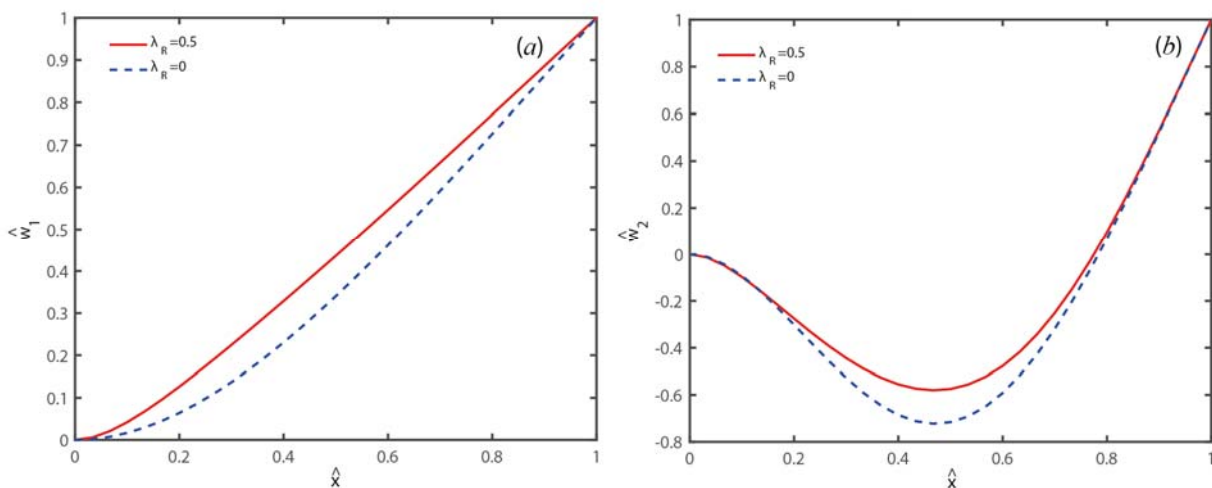


شکل ۶- اثر سرعت چرخش بدون بعد و ضریب قانون توانی بر فرکانس طبیعی اول میکروتیر هدفمند چرخان ($\Delta T = 500$)

اثر نوع تئوری مورد استفاده در تعیین فرکانس طبیعی در شکل (۷) نمایش داده شده است. با مشاهده شکل مشخص می‌گردد زمانی که سرعت صفر می‌باشد اختلاف فرکانس طبیعی پیش‌بینی شده توسط تئوری تنش کوپل اصلاح شده نسبت به تئوری کلاسیک ۱۱۳ درصد بوده و با افزایش سرعت چرخش این مقدار کاهش می‌یابد و برای $\lambda_R = 0.25$ ۸/۴۴ درصد و برای $\lambda_R = 0.5$ ۳/۶۴ درصد خواهد گردید. لذا با افزایش سرعت چرخش و سخت‌تر شدن میکروتیر از اهمیت پارامتر اثر اندازه کاسته می‌شود. تأثیر سرعت چرخش بر شکل مود اول و دوم نیز در شکل (۸) نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود با افزایش سرعت چرخش گره مود دوم به سمت چپ متمایل می‌گردد.

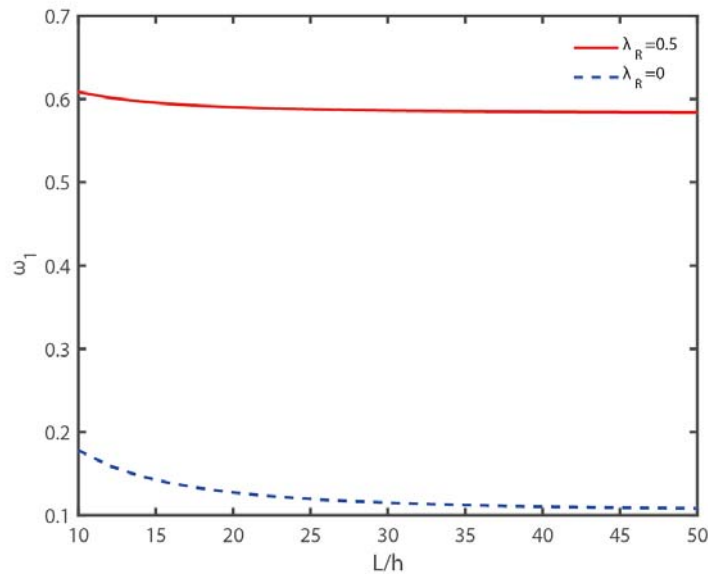


شکل ۷- اثر سرعت چرخش بدون بعد و پارامتر اثر اندازه بر فرکانس طبیعی اول میکروتیر هدفمند چرخان ($\Delta T = 500$ و $n = 1$)



شکل ۸- تأثیر سرعت چرخش بدون بعد بر شکل مودهای الف- اول و ب- دوم میکروتیر هدفمند چرخان ($\Delta T = 500$ و $n = 1$)

۳-۲-۴- تأثیر نسبت لاغری بر فرکانس طبیعی



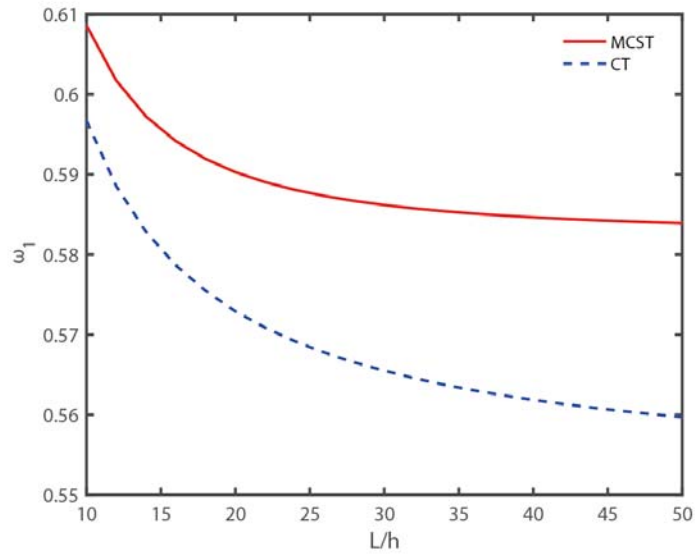
شکل ۹- اثر نسبت طول به ضخامت و سرعت چرخش بر فرکانس طبیعی اول میکروتیر هدفمند چرخان

$$(n=1 \text{ و } \Delta T = 500)$$

در این بخش به بررسی تأثیر نسبت لاغری (L/h) بر فرکانس طبیعی اول میکروتیر چرخان هدفمند پرداخته می‌شود. در شکل (۹) مشاهده می‌گردد که با افزایش این نسبت فرکانس طبیعی برای میکروتیر ثابت و چرخان کاهش می‌یابد که دلیل آن نرم‌تر شدن میکروتیر می‌باشد. البته کاهش مذکور در فرکانس طبیعی برای میکروتیر ثابت بیشتر می‌باشد.

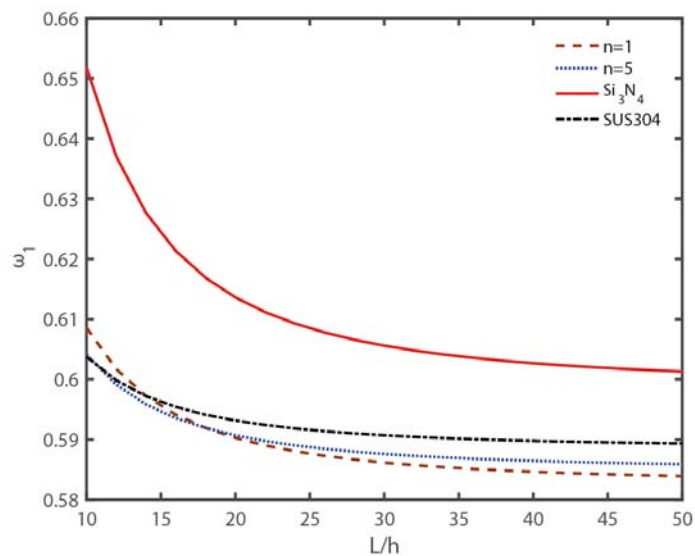
با مشاهده اثر پارامتر اندازه در شکل (۱۰) می‌توان بدین نکته اشاره کرد که با افزایش ضریب لاغری نوع تئوری مورد استفاده در مدلسازی اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. دلیل این مهم را می‌توان در مقدار تقریباً ثابت انرژی کرنشی ناشی از اثرات اندازه و یا به عبارت دیگر گشتاور منته به بالا دانست. با افزایش نسبت لاغری انرژی کرنشی مربوط به اثرات اندازه تقریباً ثابت می‌ماند حال آنکه انرژی کرنشی بدون اثرات اندازه ناشی از تنش کوشی و کرنش نرمال که شامل انرژی کرنشی نیروی محوری و گشتاور خمشی منته می‌گردد کاهش می‌یابد و یا به عبارت دیگر سازه نرم‌تر می‌شود. لذا درصد انرژی کرنشی وابسته به اثرات اندازه نسبت به انرژی کرنشی کل افزایش خواهد یافت. بدین ترتیب تفاوت تئوری‌های وابسته به اثر اندازه تنش کوپل اصلاح شده و تئوری کلاسیک بیشتر خواهد شد.

اثر ضریب قانون توانی در کنار نسبت لاغری در شکل (۱۱) نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که با افزایش نسبت لاغری و افزایش فاز فلز فرکانس طبیعی اول به میزان کمتری نسبت به میکروتیری که فاز سرامیک آن بیشتر است کاهش می‌یابد و فرکانس طبیعی میکروتیری از جنس فلز و یا سرامیک به یکدیگر نزدیکتر می‌گردند که دلیلی مشابه آنچه در بخش ۳-۲-۳ ذکر شده می‌تواند این مهم را توضیح دهد.

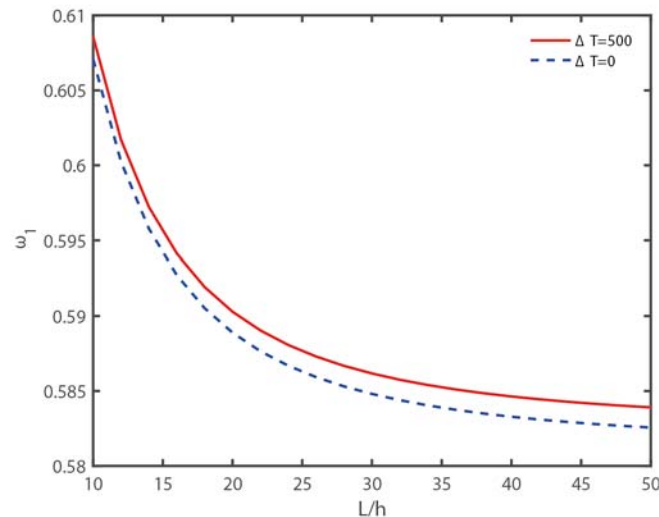


شکل ۱۰- اثر نسبت طول به ضخامت و پارامتر اثر اندازه بر فرکانس طبیعی اول میکروتیر هدفمند چرخان
($\Delta T = 500$ و $\lambda_R = 0.5$ ، $n=1$)

تأثیر نسبت لاغری در کنار افزایش دما در شکل (۱۲) نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌گردد با افزایش نسبت لاغری اختلاف موجود بین فرکانس طبیعی با و بدون افزایش دما افزایش می‌یابد که دلیل آن ضعیف‌تر شدن میکروتیر و افزایش نیروی محوری ایجاد شده توسط دما بوده که متعاقباً باعث افزایش طول بیشتر میکروتیر می‌گردد.



شکل ۱۱- اثر نسبت طول به ضخامت و ضریب قانون توانی ماده هدفمند بر فرکانس طبیعی اول میکروتیر هدفمند چرخان
($\Delta T = 500$ و $\lambda_R = 0.5$)



شکل ۱۲- اثر نسبت طول به ضخامت و تغییر دما بر فرکانس طبیعی اول میکرو تیر هدفمند چرخان ($n=1$ و $\lambda_R=0.5$)

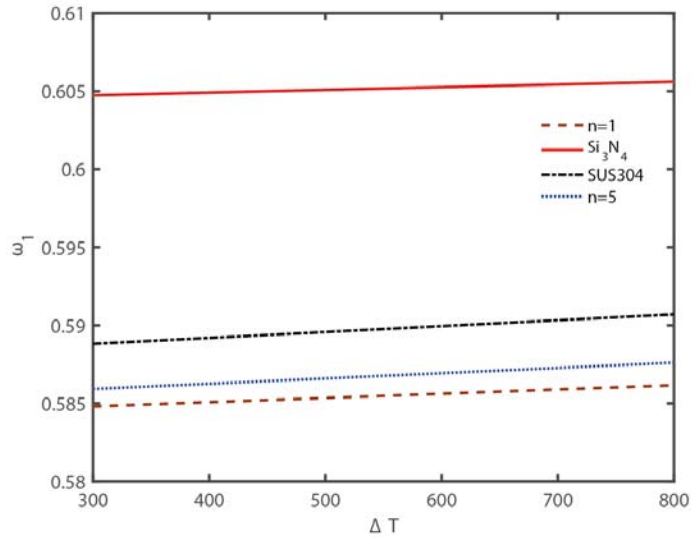
۳-۲-۵- تأثیر افزایش دما بر فرکانس طبیعی

افزایش دما در میکروتیرهای چرخان و غیرچرخان یک سر آزاد-یک سر گیردار سبب ایجاد نیروی محوری کششی طولی می‌گردد که باعث ایجاد کششی طولی در راستای میکروتیر می‌گردد که این مطلب در شکل (۴-الف) برای میکروتیر غیر چرخان قابل مشاهده است. لذا با افزایش بیشتر دما تغییر شکل استاتیکی بیشتر می‌گردد. حال با افزایش تغییر شکل استاتیکی میکروتیر نسبت به حالت پیش از افزایش دما سفت‌تر می‌گردد که این مطلب را می‌توان در مقایسه میکروتیرهای غیرچرخان و چرخان نیز مشاهده نمود که به دلیل تغییر شکل استاتیکی ناشی از نیروی گریز از مرکز میکروتیر چرخان سفت‌تر از میکروتیر غیرچرخان می‌باشد و لذا فرکانس‌های طبیعی میکروتیرهای چرخان از غیرچرخان بیشتر است. بدین ترتیب با افزایش دما فرکانس طبیعی میکروتیر چرخان افزایش می‌یابد که برای ضریب توانی‌های مختلف در شکل (۱۳) قابل رؤیت است.

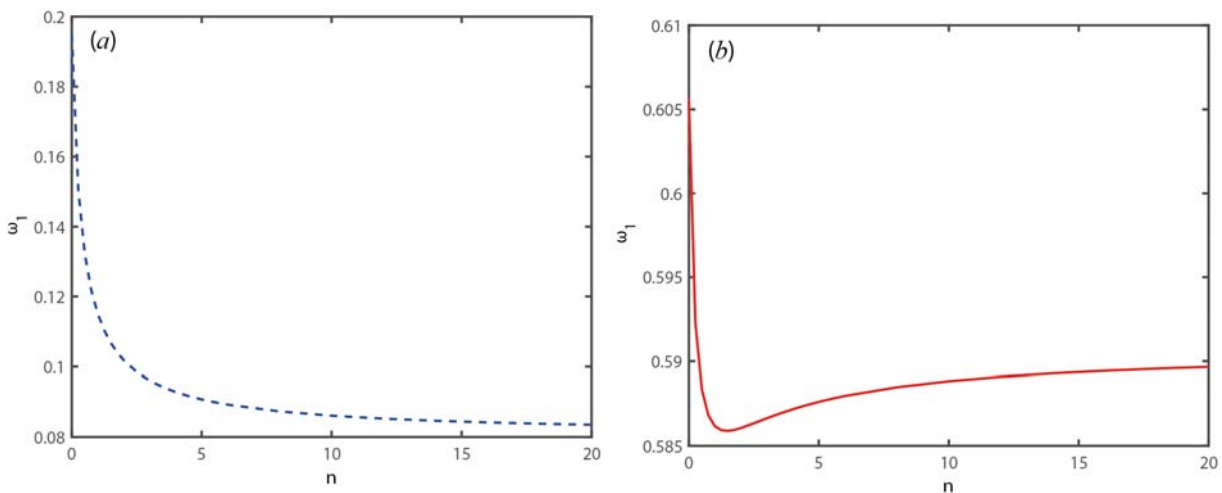
۳-۲-۶- تأثیر ضریب قانون توانی بر فرکانس طبیعی و شکل مودها

با افزایش ضریب قانون توانی فاز فلزی ماده بیشتر می‌گردد. در میکروتیرهای غیرچرخان این موضوع باعث کم شدن صلبیت خمشی شده و لذا فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد شکل (۱۴-الف). با افزایش سرعت چرخش نیروی گریز از مرکز ایجاد و شروع به توسعه می‌کند. از طرفی با توجه به اینکه با توجه به مقایسه چگالی سرامیک و فلز، $\rho_c/\rho_m = 0.27$ ، این نیرو مقدار برای فاز فلز بیشتر است و در عین حال صلبیت طولی سرامیک نیز بیشتر از فلز می‌باشد $E_c/E_m = 1.55$ لذا تغییر شکل استاتیکی با افزایش فاز فلز بسیار بیشتر می‌گردد که منجر به سخت‌تر شدن میکروتیر در سرعت‌های بالا می‌گردد.

در نهایت فرکانس میکروتیر چرخان با افزایش فاز فلز افزایش می‌یابد. لذا برای هر سرعت خاص در یک ضریب توانی خاص در نمودار فرکانس طبیعی احتمال ایجاد مقداری کمینه در نمودار فرکانس طبیعی وجود دارد که در شکل (۱۴-ب) این موضوع قابل مشاهده است.

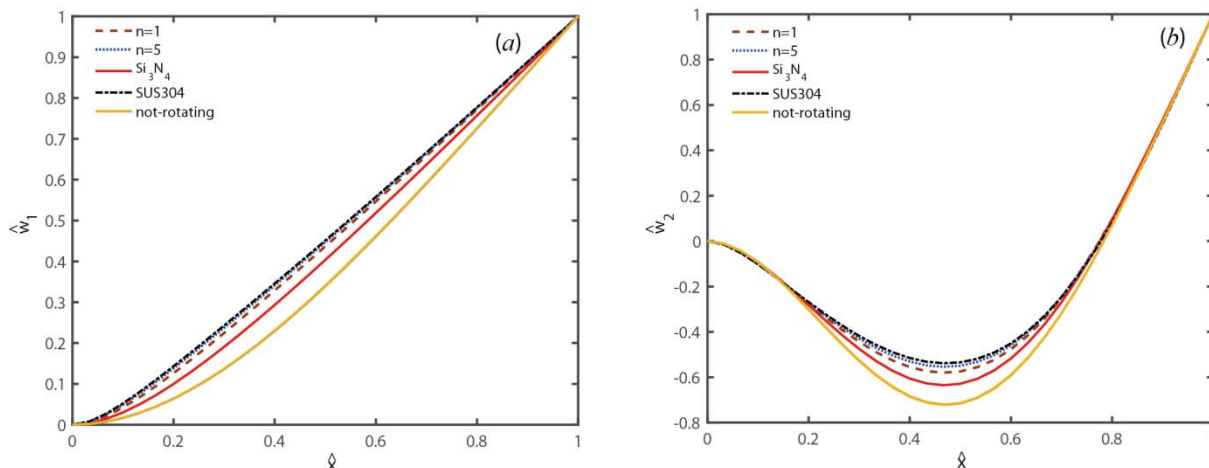


شکل ۱۳- اثر تغییر دما و ضریب قانون توانی ماده هدفمند بر فرکانس طبیعی اول میکروتیر هدفمند چرخان ($\lambda_R = 0.5$)



شکل ۱۴- اثر ضریب قانون توانی ماده هدفمند بر فرکانس طبیعی اول میکروتیر هدفمند، الف- میکروتیر ثابت ($\Delta T = 500$)، ب- میکروتیر چرخان ($\lambda_R = 0.5$ و $\Delta T = 500$)

تأثیر ضریب قانون توانی بر شکل مود اول و دوم در شکل (۱۵) نشان داده شده است. شایان ذکر است که در میکروتیرهای غیرچرخان به دلیل اینکه تغییر شکل استاتیکی ناشی از چرخش رخ نمی‌دهد و تغییر شکل استاتیکی ایجاد شده توسط دما بسیار کم است شکل مودهای جنس‌های مختلف شامل فازهای فلزی و سرامیکی بر روی یکدیگر قرار می‌گیرند حال آنکه مقدار ضریب توانی در شکل مود میکروتیر چرخان تأثیرگذار می‌باشد.



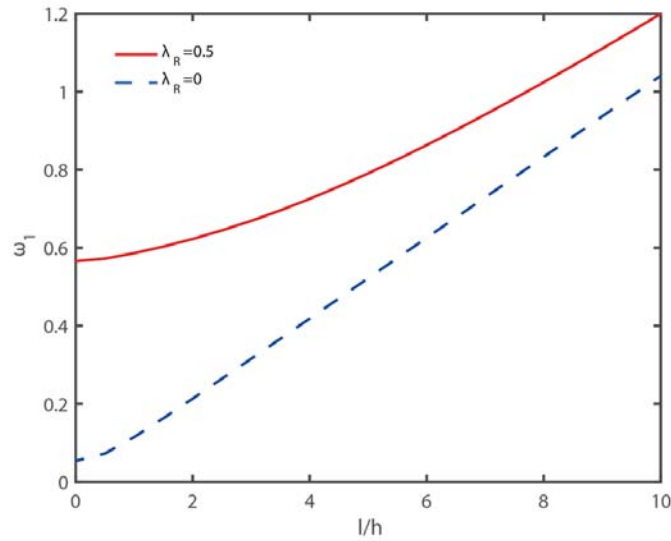
شکل ۱۵- تأثیر ضریب قانون توانی ماده هدفمند بر شکل مودهای الف- اول و ب- دوم میکروتیر هدفمند غیر چرخان و چرخان ($\Delta T = 500$ و $\lambda_R = 0.5$)

۳-۲-۷- تأثیر پارامتر اثر اندازه بر فرکانس طبیعی

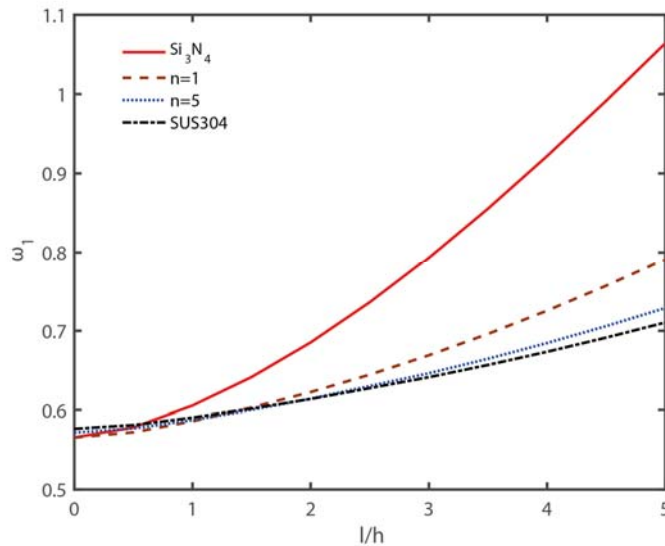
تأثیر پارامتر اثر اندازه بر فرکانس طبیعی اول میکروتیر چرخان و غیر چرخان در شکل (۱۶) نمایش داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌گردد با افزایش این پارامتر تأثیر سرعت چرخش کاهش می‌یابد. دلیل این امر افزایش انرژی کرنشی گشتاور منتهی به بالا می‌باشد که بدین ترتیب انرژی کرنشی کل افزایش یافته و تأثیر انرژی جنبشی کاهش می‌یابد و نتایج میکروتیر چرخان و غیر چرخان به یکدیگر نزدیک می‌گردد. تأثیر پارامتر اثر اندازه همراه با ضریب قانون توانی ماده هدفمند بر فرکانس طبیعی اول میکروتیر چرخان در شکل (۱۷) نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌گردد در ابتدا که این پارامتر دارای مقدار کمی می‌باشد انرژی کرنشی ناشی از اثرات اندازه کم بوده و چون چگالی فولاد بسیار بیشتر از سیلیکون نیتريد است نیروی محوری گریز از مرکز بیشتری به میکروتیر چرخان وارد می‌شود و میکروتیر چرخان با افزایش فاز فلز به دلیل پیش کشیدگی استاتیکی بیشتری، سفت‌تر می‌گردد. لذا افزایش فاز فلز با افزایش فرکانس طبیعی همراه خواهد شد. با افزایش پارامتر اثر اندازه با توجه به بیشتر بودن مدول برشی سیلیکون نیتريد نسبت به فولاد ضد زنگ با افزایش فاز سرامیک انرژی کرنشی ناشی از گشتاور منتهی به بالا بیشتر می‌گردد. بدین ترتیب با افزایش فاز سرامیک فرکانس طبیعی میکروتیر چرخان افزایش می‌یابد.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله به ارائه فرمولاسیونی جهت مدلسازی میکروتیرهای هدفمند چرخان در محیط گرمایی بر مبنای فرض‌های حاکم بر تیر اویلر-برنولی و تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداخته شد. رابطه کرنش-تغییر مکان فون کارمن جهت وارد نمودن تغییر شکل استاتیکی ناشی از بارگذاری حرارتی و چرخش مورد استفاده قرار گرفت. روش المان محدود جهت گسسته سازی معادلات در حوزه مکان به کار گرفته شد. معادلات استاتیکی غیرخطی استخراج شده با استفاده از روش نیوتن-رفسون حل گردید.



شکل ۱۶- اثر پارامتر اثر اندازه و سرعت چرخش بر فرکانس طبیعی اول میکرو تیر هدفمند چرخان ($\Delta T = 500$)



شکل ۱۷- اثر پارامتر اثر اندازه و ضریب قانون توانی ماده هدفمند بر فرکانس طبیعی اول میکرو تیر هدفمند چرخان ($\Delta T = 500$ و $\lambda_R = 0.5$)

مهمترین نتایج به دست آمده به شرح زیر است:

- تأثیر افزایش دما در تغییر شکل استاتیکی طولی نسبت به سرعت چرخش کمتر است در حالی که تأثیری هم مرتبه در تغییر شکل عرضی دارد.
- با افزایش ضریب توانی (بیشتر شدن فاز فلز) تغییر شکل طولی افزایش می‌یابد در حالی که تغییر شکل عرضی (برای حالت غیرایزوتروپ) کاهش می‌یابد.

- با افزایش ضریب توانی در میکروتیر غیرچرخان و چرخان با سرعت پایین تا متوسط فرکانس طبیعی در یک سرعت مشخص کاهش می‌یابد اما برای میکروتیرهای با سرعت چرخش متوسط و بالا افزایش این ضریب فرکانس طبیعی را افزایش می‌دهد.
- تأثیر پارامتر اثر اندازه بر فرکانس طبیعی در سرعت‌های پایین و ضریب لاغری بیشتر محسوس تر است.
- با افزایش ضریب لاغری اختلاف بین فرکانس طبیعی میکروتیر چرخان دارای فاز فلز خالص و سرامیک خالص کاهش می‌یابد.
- افزایش دما باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌گردد.
- با افزایش ضریب توانی در سرعت‌های خاص در ابتدا فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد اما در یک ضریب توانی خاص فرکانس طبیعی شروع به افزایش می‌کند. این پدیده در میکروتیر ثابت دیده نمی‌شود و در میکروتیرهای ثابت افزایش ضریب توانی پیوسته باعث کاهش فرکانس طبیعی می‌گردد.
- تغییر ضریب توانی شکل مود میکروتیر چرخان را تغییر نمی‌دهد حال آنکه در میکروتیر چرخان باعث تغییر شکل مود خواهد شد.

مراجع

- [1] Kang, S., Lee, S.J., and Prinz, F.B., "Size does Matter: The Pros and Cons of Miniaturization", ABB Review, Vol. 2, pp. 54-62, (2001).
- [2] Mehra, A., Zhang, X., Ayón, A.A., Waitz, I.A., Schmidt, M.A., and Spadaccini, C.M., "A Six-wafer Combustion System for a Silicon Micro Gas Turbine Engine", Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. 9, No. 4, pp. 517-527, (2000).
- [3] Kong, S., Zhou, S., Nie, Z., and Wang, K., "The Size-dependent Natural Frequency of Bernoulli-Euler Micro-beams", International Journal of Engineering Science, Vol. 46, No. 5, pp. 427-437, (2008).
- [4] Akgöz, B., and Civalek, Ö., "Free Vibration Analysis of Axially Functionally Graded Tapered Bernoulli-Euler Microbeams Based on the Modified Couple Stress Theory", Composite Structures, Vol. 98, pp. 314-322, (2013).
- [5] Ansari, R., Gholami, R., and Sahmani, S., "Free Vibration of Size-dependent Functionally Graded Microbeams Based on the Strain Gradient Reddy Beam Theory", International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, Vol. 15, No. 5, pp. 401-412, (2014).
- [6] Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A., and Mahmoud, S.R., "Size Dependent Bending and Vibration Analysis of Functionally Graded Micro Beams Based on Modified Couple Stress Theory and Neutral Surface Position", Composite Structures, Vol. 125, pp. 621-630, (2015).

- [7] Xiang, H.J., and Yang, J., "Free and Forced Vibration of a Laminated FGM Timoshenko Beam of Variable Thickness under Heat Conduction", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 39, No. 2, pp. 292-303, (2008).
- [8] Alshorbagy, A.E., Eltahir, M.A., and Mahmoud, F.F., "Free Vibration Characteristics of a Functionally Graded Beam by Finite Element Method", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35, No. 1, pp. 412-425, (2011).
- [9] Pradhan, K.K., and Chakraverty, S., "Free Vibration of Euler and Timoshenko Functionally Graded Beams by Rayleigh–Ritz Method", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 51, pp. 175-184, (2013).
- [10] Mashat, D.S., Carrera, E., Zenkour, A.M., Al Khateeb, S.A., and Filippi, M., "Free Vibration of FGM Layered Beams by Various Theories and Finite Elements", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 59, pp. 269-278, (2014).
- [11] Wattanasakulpong, N., and Chaikittiratana, A., "Flexural Vibration of Imperfect Functionally Graded Beams Based on Timoshenko Beam Theory: Chebyshev Collocation Method", *Meccanica*, Vol. 50, No. 5, pp. 1331-1342, (2015).
- [12] Al Rjoub, Y.S., and Hamad, A.G., "Free Vibration of Functionally Euler-Bernoulli and Timoshenko Graded Porous Beams using the Transfer Matrix Method", *KSCE Journal of Civil Engineering*, Vol. 21, No. 3, pp. 792-806, (2017).
- [13] Hoa, S.V., "Vibration of a Rotating Beam with Tip Mass", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 67, No. 3, pp. 369-381, (1979).
- [14] Lin, S.C., and Hsiao, K.M., "Vibration Analysis of a Rotating Timoshenko Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, No. 2, pp. 303-322, (2001).
- [15] Turhan, Ö., and Bulut, G., "On Nonlinear Vibrations of a Rotating Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 322, No. 1-2, pp. 314-335, (2009).
- [16] Ramesh, M.N.V., and Rao, N.M., "Free Vibration Analysis of Pre-twisted Rotating FGM Beams", *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Vol. 9, No. 4, pp. 367-383, (2013).
- [17] Arvin, H., and Bakhtiari-Nejad, F., "Nonlinear Free Vibration Analysis of Rotating Composite Timoshenko Beams", *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 29-43, (2013).
- [18] Arvin, H., "Free Vibration of Micro Rotating Euler-Bernoulli Beams Based on the Strain Gradient Theory", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 2, pp. 120-128, (in Persian), (2016).
- [19] Arvin, H., "The Flap Wise Bending Free Vibration Analysis of Micro-rotating Timoshenko Beams using the Differential Transform Method", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 24, No. 20, pp. 4868-4884, (2018).

- [20] Zhu, K., and Chung, J., "Vibration and Stability Analysis of a Simply-supported Rayleigh Beam with Spinning and Axial Motions", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 66, pp. 362-382, (2019).
- [21] Heidari, M., Arvin, H., "Nonlinear Free Vibration Analysis of Functionally Graded Rotating Composite Timoshenko Beams Reinforced by Carbon Nanotubes", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 25, No. 14, pp. 2063-2078, (2019).
- [22] Mirzaei, M. M. H., Arefi, M., and Loghman, A., "Creep Analysis of a Rotating Functionally Graded Simple Blade: Steady State Analysis", *Steel and Composite Structures*, Vol. 33, No. 3, pp. 463-472, (2019).
- [23] Mirzaei, M. M. H., Loghman, A., and Arefi, M., "Effect of Temperature Dependency on Thermoelastic Behavior of Rotating Variable Thickness FGM Cantilever Beam", *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 11, No. 3, pp. 657-669, (2019).
- [24] Mirzaei, M. M. H., Arefi, M., and Loghman, A., "Thermoelastic Analysis of a Functionally Graded Simple Blade using First-order Shear Deformation Theory", *Mechanics of Advanced Composite Structures*, (2019). doi: 10.22075/mac.2019.16831.1190
- [25] Meirovitch, L., "*Principles and Techniques of Vibrations*", Vol. 1, Prentice Hall, New Jersey, (1997).
- [26] Reddy, J.N., "*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*", CRC Press, (2003).
- [27] Reddy, J.N., "*An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*", Oxford University Press, New York, (2005).
- [28] Arvin, H., Sadighi, M., and Ohadi, A.R., "A Numerical Study of Free and Forced Vibration of Composite Sandwich Beam with Viscoelastic Core", *Composite Structures*, Vol. 92, No. 4, pp. 996-1008, (2010).
- [29] Komijani, M., Esfahani, S.E., Reddy, J.N., Liu, Y.P., and Eslami, M.R., "Nonlinear Thermal Stability and Vibration of Pre/post-buckled Temperature-and Microstructure-dependent Functionally Graded Beams Resting on Elastic Foundation", *Composite Structures*, Vol. 112, pp. 292-307, (2014).

فهرست نمادهای انگلیسی

A_{11} : صلبیت طولی

B_{11} : صلبیت خمشی طولی

D_{11} : صلبیت خمشی

E : مدول الاستیسیته

- F : ماتریس نیرو
 h : ضخامت تیر
 I_0 : جرم تیر بر واحد طول
 I_1 : ممان اینرسی اول سطح
 I_2 : ممان اینرسی دوم سطح
 K : ماتریس سفتی
 L : طول تیر
 l : پارامتر اثر اندازه
 m : تانسور تنش کوپل
 M : ماتریس جرمی
 M_{xx} : گشتاور
 M_{xx}^T : گشتاور گرمایی
 n : ضریب قانون توانی
 N_{xx} : نیروی محوری
 N_{xx}^T : نیروی محوری گرمایی
 P_c : خواص مربوط به سرامیک
 P_m : خواص مربوط به فلز
 P_{xy} : گشتاور مرتبه بالا
 Q_{11} : سفتی طولی
 R : شعاع روتور
 T : انرژی جنبشی
 u : جابجایی در راستای X
 U : انرژی پتانسیل
 U_0 : تغییر مکان در راستای X
 V_f : کسر حجمی
 w : جابجایی در راستای Z
 W : تغییر مکان در راستای Z
 α : ضریب انبساط حرارتی
 ΔT : تغییرات دما
 \mathcal{E} : تانسور کرنش
 \mathcal{E}^T : کرنش گرمایی
 θ : تانسور چرخش المانی

λ : ثابت لامه

λ_R : سرعت چرخش بدون بعد

μ : ثابت لامه

ν : ضریب پواسون

ξ : مختصات بدون بعد

ρ : چگالی

σ : تانسور تنش

χ : تانسور خمیدگی

ψ^u : تابع شکل درجه اول تغییر مکان طولی

ψ^w : تابع شکل درجه سوم تغییر مکان عرضی

ω_1 : فرکانس طبیعی

ω_R : سرعت چرخش میکروتیر

پیوست

نیرو، گشتاور و گشتاور مرتبه بالای منتجه

$$N_{xx} = A_{11} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_{xx}^T,$$

$$M_{xx} = B_{11} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_{xx}^T, \quad (\text{الف-۱})$$

$$P_{xy} = -M \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

که در این رابطه‌ها N_{xx}^T و M_{xx}^T به ترتیب نیرو و گشتاور منتجه گرمایی می‌باشند و از رابطه (الف-۲) به دست می‌آیند:

$$N_{xx}^T = b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} \alpha \Delta T dz, \quad M_{xx}^T = b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} z \alpha \Delta T dz \quad (\text{الف-۲})$$

و A_{11} ، B_{11} و D_{11} نیز به ترتیب سفتی‌های محوری، محوری-خمشی و خمشی می‌باشند و توسط رابطه (الف-۳) تعیین می‌گردند:

$$[A_{11}, B_{11}, D_{11}] = b \int_{-h/2}^{h/2} [z^0, z^1, z^2] Q_{11} dz, \quad i = 0, 1, 2 \quad \text{و} \quad M = b \int_{-h/2}^{h/2} \mu(z) l^2 dz \quad (\text{الف-۳})$$

ماتریس‌های سفتی و جرم و بردار نیرو

الف-ماتریس سفتی

$$\mathbf{K}^e = \sum_{i=1}^{15} \mathbf{K}_i \quad (\text{الف-۴})$$

$$\mathbf{K}_2 = (l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^2}\right) A_{11} \frac{du}{dx} \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}_w' d\xi, \quad \mathbf{K}_1 = (l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^2}\right) A_{11} \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_u' d\xi,$$

$$\mathbf{K}_4 = \frac{1}{2} (l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^2}\right) A_{11} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}_w' d\xi, \quad \mathbf{K}_3 = \frac{1}{2} (l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^2}\right) A_{11} \frac{dw}{dx} \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_w' d\xi,$$

$$\mathbf{K}_6 = -(l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^3}\right) B_{11} \frac{dw}{dx} \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}_w'' d\xi, \quad \mathbf{K}_5 = -(l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^3}\right) B_{11} \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_w'' d\xi,$$

$$\mathbf{K}_8 = -(l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^3}\right) B_{11} \mathbf{N}_w''^T \mathbf{N}_u' d\xi, \quad \mathbf{K}_7 = -(l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^2}\right) N_{xx}^T \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}_w' d\xi,$$

(الف-۵)

$$\mathbf{K}_9 = -\frac{1}{2} (l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^3}\right) B_{11} \frac{dw}{dx} \mathbf{N}_w''^T \mathbf{N}_w' d\xi, \quad \mathbf{K}_{10} = (l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^4}\right) D_{11} \mathbf{N}_w''^T \mathbf{N}_w'' d\xi,$$

$$\mathbf{K}_{12} = -(l_e) \int_0^1 I_0 \Omega^2 \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u d\xi, \quad \mathbf{K}_{11} = (l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^4}\right) M \mathbf{N}_w''^T \mathbf{N}_w'' d\xi,$$

$$\mathbf{K}_{14} = (l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e}\right) I_1 \Omega^2 \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}_u d\xi, \quad \mathbf{K}_{13} = (l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e}\right) I_1 \Omega^2 \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_w' d\xi,$$

$$\mathbf{K}_{15} = -(l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^2}\right) I_2 \Omega^2 \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}_w' d\xi$$

ب-ماتریس جرم

$$\mathbf{M}^e = \sum_{i=1}^5 \mathbf{M}_i \quad (\text{الف-۶})$$

$$\mathbf{M}_1 = (l_e) \int_0^1 I_0 \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u d\xi, \quad \mathbf{M}_2 = -(l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e}\right) I_1 \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}_u d\xi,$$

$$\mathbf{M}_3 = -(l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e}\right) I_1 \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_w' d\xi, \quad (\text{الف-۷})$$

$$\mathbf{M}_4 = (l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^2}\right) I_2 \mathbf{N}_w'^T \mathbf{N}_w' d\xi, \quad \mathbf{M}_5 = (l_e) \int_0^1 I_0 \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w d\xi$$

پ-بردار نیرو برای المان k ام

(الف-۸)

$$\mathbf{F}^e = \sum_{i=1}^6 \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{F}_1 = (l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e}\right) N_{xx}^T \mathbf{N}_u{}^T d\xi, \mathbf{F}_2 = -(l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e^2}\right) M_{xx}^T \mathbf{N}_w{}^T d\xi, \mathbf{F}_3 = (l_e) \int_0^1 I_0 \Omega^2 R \mathbf{N}_u{}^T d\xi,$$

$$\mathbf{F}_4 = (l_e) \int_0^1 I_0 \Omega^2 ((k-1) + \xi) l_e \mathbf{N}_u{}^T d\xi, \mathbf{F}_5 = -(l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e}\right) I_1 \Omega^2 R \mathbf{N}_w{}^T d\xi, \quad (\text{الف-۹})$$

$$\mathbf{F}_6 = -(l_e) \int_0^1 \left(\frac{1}{l_e}\right) I_1 \Omega^2 ((k-1) + \xi) l_e \mathbf{N}_w{}^T d\xi$$

Abstract

The free vibration features of rotating functionally graded microbeams in thermal environment are presented in this paper. The governing equations are extracted on the basis of the Euler-Bernoulli beam assumptions beside the modified couple stress theory. The finite element method is applied on the weak form of the strain and the kinetic energies to extract the natural frequencies and the associated modeshapes. The nonlinear static equations of motion due to the rotation and the thermal environment are treated employing the Newton-Raphson technique. Moreover, the natural frequencies are estimated from the linearized equations of motion about the static configuration. After the validation of the present results, the rotation speed, the material length scale parameter, the temperature change, the power law exponent and the slenderness ratio impacts on the fundamental natural frequency and the first and the second modeshapes are examined. The outcomes indicate the increment of the natural frequency after a threshold value of the power law exponent depends on a given rotation speed for the rotating microbeams in comparison with the stationary microbeams. Furthermore, the modeshapes of rotating functionally graded microbeams vary by the power law exponent while for stationary functionally graded microbeams the modeshapes are invariant with respect to the power law exponent even in the presence of the thermal environment.