

فلاتر پوسته‌های استوانه‌ای هدفمند تحت فشار در جریان مافوق صوت بر پایه تئوری فلوگه

در این مقاله پدیده‌ی فلاتر یک پوسته‌ی استوانه‌ای هدفمند (FGM) با تکیه گاه‌های ساده تحت بار آیرودینامیکی و حرارتی همراه با اعمال فشار داخلی به پوسته، مورد مطالعه قرار گرفته است. کسر حجمی مواد تشکیل دهنده‌ی پوسته از یک قانون توانی ساده در راستای ضخامت تبعیت می‌کند. بار آیرودینامیک در تحلیل بکار رفته توسط تئوری مرتبه اول پتانسیل (پيستون) به صورت خطی و با در نظر گرفتن ترم تصحیح، مشخص شده است. روابط کرنش-جابجایی و معادلات حرکت بر اساس تئوری پوسته‌ی فلوگه تعیین شده و تنش‌های اولیه‌ی ملحوظ در معادلات حرکت با حل معادلات تعادل بدست آمده‌اند. با بکارگیری روش گلرکین، معادلات حاکم بر پوسته حل شده‌اند. همچنین اثر توزیع کسر حجمی، تغییرات دما و فشار بر مرز فلاتر و پاسخ زمانی سیستم مورد بررسی قرار گرفته است.

منصور درويزه^۱

استاد

رضا انصاری^۲

استادیار

علیرضا شاهرخ‌زاده^۳

دانشجوی کارشناسی ارشد

راهب غلامی^۴

دانشجوی دکترا

واژه‌های راهنما: فلاتر، پوسته استوانه‌ای، هدفمند، مافوق صوت، فشار، حرارتی

۱- مقدمه

با پیشرفت صنایع جدید و فرایندهای مدرن، بسیاری از سازه‌ها در معرض محیط‌هایی با دمای بسیار بالا قرار می‌گیرند، از این رو مواد FGM به دلیل مقاومت در برابر حرارت، توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. این مواد در بسیاری از زمینه‌های مهندسی و بخصوص در سازه‌های هوایی و هواپیماها به کار گرفته می‌شوند [۲۱]. به دلیل تغییر تدریجی کسر حجمی مواد تشکیل دهنده و همین‌طور ساختار میکروسکوپی مواد هدفمند، خواص مکانیکی آنها (مانند مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و...) بطور پیوسته و یکنواخت تغییر می‌کند. بنابراین در مواد هدفمند مشکل گسستگی بین لایه‌ها در دمای بالا در محل اتصال بین آنها، آنچنان که در مواد کامپوزیت لایه‌ای وجود دارد، از بین خواهد رفت و تمرکز تنش حرارتی نیز کاهش می‌یابد. بسیاری از مواد FGM ترکیب پیوسته‌ای از سرامیک و فلز هستند که بتوانند از خواص مطلوب این دو بهره‌مند شوند، همچون مقاومت در برابر خوردگی و حرارت سرامیک‌ها و دوام کششی، سختی و قابلیت اتصال بالای فلزات [۳].

^۱ نویسنده مسئول، استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان darvizeh@guilan.ac.ir

^۲ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان r_ansari@guilan.ac.ir

^۳ دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان shahrokhzadeh@yahoo.com

^۴ دانشجوی دکترا، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان rahegholami@gmail.com

نوسان خودتحریک ورق‌های نازک که یک طرف آنها در معرض جریان هوایی موازی با صفحه‌ی ورق قرار دارد، فلتر^۱ نامیده می‌شود. پیشگیری از ناپایداری فلتر معیار مهمی برای طراحی سازه‌ها در برخی کاربردهای هوافضا به حساب می‌آید. اگرچه فلتر معمولاً به ورق‌های تخت یا خمیده مربوط می‌شود، در یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک نیز می‌تواند رخ دهد. فلتر مافوق صوت برای پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک و کامپوزیتی با مدل پوسته‌ی خطی توسط محققان زیادی مطالعه شده است [۴-۷]. اولسن و فانگ^۲ [۴] پوسته‌های استوانه‌ای با تکیه‌گاه‌های ساده را با استفاده از تئوری پوسته‌ی غیر خطی دانل^۳ مدلسازی کردند. آنها در تحلیل خود تنها دو مود محوری را در نظر گرفتند. بار و استیرمن^۴ [۵] پایداری پوسته‌ی استوانه‌ای را با در نظر گرفتن جابجایی‌های ناشی از بارگذاری استاتیکی مورد بررسی قرار دادند. گاناپاتی^۵ و همکاران [۶] فلتر مافوق صوت پوسته‌ی استوانه‌ای کامپوزیت لایه‌ای را با روش المان محدود مورد مطالعه قرار دادند. یانگ و پیداپارتی^۶ [۷] نیز در مطالعات خود با استفاده از روش المان محدود، اثر زاویه‌ی جریان هوا نسبت به ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی را بر فلتر مافوق صوت مورد بررسی قرار دادند. حدادپور و همکاران [۸] از تئوری پوسته‌ی لاکس^۷ به منظور بررسی فلتر پوسته‌ی استوانه‌ای هدفمند استفاده کرده‌اند. همچنین اولسن و فانگ [۴] با انجام یک تست آزمایشگاهی متوجه شدند که در پوسته‌های استوانه‌ای تحت فشار داخلی، همواره روش تحلیلی نسبت به تحقیقات آزمایشی فشار جریان آزاد بحرانی بیشتری را پیش‌بینی می‌کند. پراکاش و گاناپاتی^۸ [۹] در مطالعات خود به پیش‌بینی فلتر در صفحه تخت FGM پرداخته‌اند. همچنین صبری و لاکس^۹ [۱۰] فلتر پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک همگن را با استفاده از روش المان محدود و با در نظر گرفتن فشار داخلی و بار محوری مورد بررسی قرار دادند. شن^{۱۰} [۱۱-۱۴] کمانش و پس-کمانش پوسته‌های استوانه‌ای را تحت بار فشاری و دمایی مورد مطالعه قرار داده است. در این مقاله فلتر مافوق صوت در یک پوسته‌ی استوانه‌ای FGM مورد بررسی قرار گرفته و مرزهای فلتر^{۱۱} پیش‌بینی شده است. پوسته در معرض یک جریان مافوق صوت خارجی و فشار ثابت داخلی قرار گرفته است و اختلاف دمایی بین سطح داخلی و خارجی آن می‌تواند وجود داشته باشد (بار دمایی).

مرز فلتر سرعت (فشار دینامیکی) بحرانی است که از ویژگی‌های زیر برخوردار باشد [۱۵]:

۱- اگر سرعت (فشار دینامیک) جریان آزاد برابر با سرعت بحرانی است، پوسته قادر به نوسانات هارمونیک باشد.

۲- به ازای همه‌ی سرعت‌هایی زیر سرعت بحرانی، همه‌ی نوسانات ممکن با عامل نمایی زمان، میرا شوند، به این معنی که دامنه با افزایش زمان بصورت نمایی کاهش پیدا کند.

¹ Flutter

² Olson and Fung

³ Donnell

⁴ Barr and Stearman

⁵ Ganapathi

⁶ Yang and Pidaparti

⁷ Love's shell theory

⁸ Prakash and Ganapathi

⁹ Lakis

¹⁰ Shen

¹¹ Flutter boundaries

۳- برای سرعت‌های بیشتر از سرعت بحرانی نوسانات واگرایی وجود داشته باشد که دامنه آن با افزایش زمان بصورت نمایی افزایش یابد. به شکل مود ارتعاشات نامیرا و میرا شده‌ی منفی، که به ترتیب مربوط به حالت ۱ و ۳ می‌باشند، مود فلتر^۱ گفته می‌شود.

در کار حاضر، از تئوری پوسته فلوگه^۲ استفاده شده است. ابتدا به کمک یک روش تکرارشونده معادلات تعادل حل شده و تنش‌های اولیه ناشی از افزایش دما یا فشار داخلی بدست آمده‌اند. سپس این تنش‌ها در معادلات حرکت جایگذاری شده‌اند. به منظور حل معادلات حرکت، ابتدا توابعی تقریبی برای جابجایی در نظر گرفته شده است. دو معادله‌ی اول حرکت در جهات محوری و محیطی توسط این توابع حل شده و پاسخ آن به همراه روش گلرکین^۳ برای حل معادله‌ی سوم در جهت شعاعی بکار گرفته شده است. خواص موثر ماده توسط یک رابطه‌ی توانی^۴ مشخص شده و همچنین فرض می‌شود که این خواص تابع دما باشند. مرزهای فلتر بر حسب فشار داخلی و در کسرهای حجمی متفاوت، به طور نمونه برای یک پوسته با یکی از حالات مختلف تکیه‌گاه‌های ساده رسم شده است. اثر تغییر دما بر مرزهای فلتر بررسی شده است. همچنین پاسخ زمانی سیستم، قبل و پس از فلتر مدنظر قرار گرفته است.

۲- فرمول‌بندی مسئله

۲-۱- مواد هدفمند (FGMs)

در این تحقیق پوسته‌ی استوانه‌ای متشکل از ترکیب پیوسته‌ی سرامیک و فلز در نظر گرفته شده، خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌ای در جهت ضخامت دارد. کسر حجمی فلز و سرامیک تشکیل دهنده را می‌توان بصورت تابعی از ضخامت نوشت:

$$V_m = \left(\frac{-z + h/2}{h}\right)^N$$

$$V_c = 1 - \left(\frac{-z + h/2}{h}\right)^N \quad (1)$$

که h ضخامت دیواره‌ی استوانه، N نمای کسر حجمی و z هم محور مختصات در راستای شعاعی با مبدا سطح میانی است. زیرنویس m و c به ترتیب نمایانگر ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی فلز و سرامیک هستند. خواص موثر ماده در پوسته‌ی هدفمند را می‌توان به این صورت بدست آورد:

$$P_{efficient} = P_m V_m + P_c V_c \quad (2)$$

با استفاده از معادله (۱) و (۲)، $P_{efficient}$ را می‌توان به صورت تابعی از z بیان کرد:

$$P_{efficient} = P_c + (P_m - P_c) \left(\frac{-z + h/2}{h}\right)^N \quad (3)$$

¹ Flutter mode

² Flugge

³ Galerkin

⁴ Power-law

که خواص موثر ماده P در آن، همان مدول یانگ E ، چگالی ρ ، ضریب پواسون ν ، ضریب هدایت حرارتی K و ضریب انبساط حرارتی α هستند.

سازه‌های هدفمند به طور معمول در محیط‌های با دمای بسیار زیاد قرار می‌گیرند که در این محیط‌ها انتظار می‌رود که خواص مکانیکی مواد تشکیل دهنده‌ی آنها تغییرات مهمی داشته باشد. بنابراین واجب است که این وابستگی به دما برای تخمین دقیق‌تر پاسخ مکانیکی در نظر گرفته شود. فرض می‌شود که مدول یانگ، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی موثر، با تابع خطی زیر به دما وابسته باشند [۱۶]:

$$P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (۴)$$

که P_0 ، P_{-1} ، P_1 ، P_2 ، P_3 ضرایب دمای $T(K)$ و مختص ماده‌ی تشکیل دهنده هستند.

جدول ۱- خواص مواد FGM [۱۷]

ماده	خواص	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Stainless steel (SUS304)	E	201.04e+9	0	3.079e-4	-6.534e-7	0
	α	12.33e-6	0	8.086e-4	0	0
	ν	0.3262	0	-2.002e-4	3.797e-7	0
	ρ	8166	0	0	0	0
Silicon nitride (Si_3N_4)	E	348.43e+9	0	-3.07e-4	2.16e-7	-8.946e-11
	α	5.8723e-6	0	9.095e-4	0	0
	ν	0.24	0	0	0	0
	ρ	2370	0	0	0	0

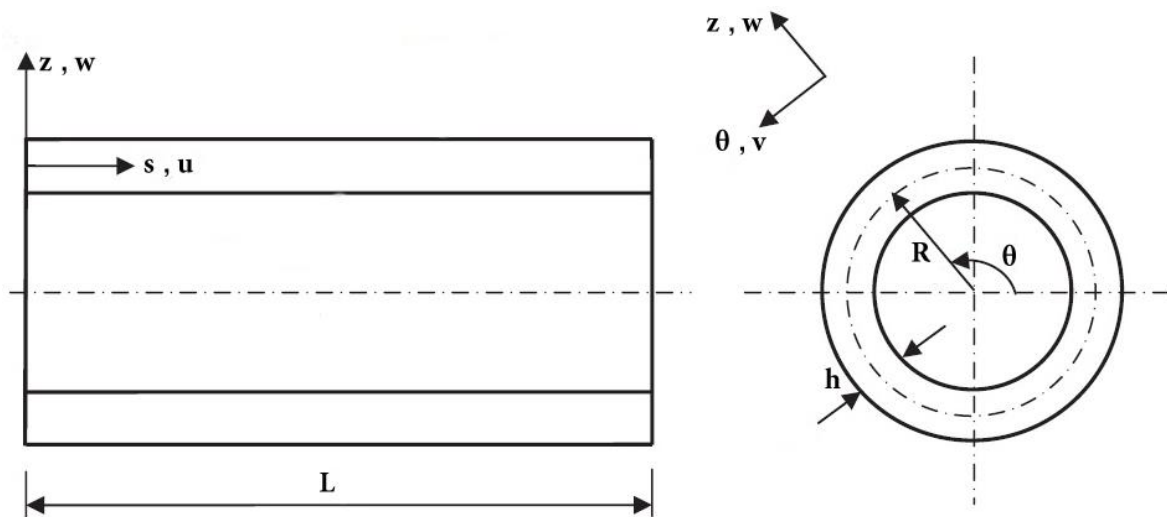
۲-۲- روابط تنش و کرنش

برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای که در شکل (۱) نشان داده شده، کرنش‌های عمودی ϵ_i ، کرنش برشی γ_{ij} و انحنای κ_{ij} ($i, j = s, \theta$) را بر حسب جابجایی‌های u ، v و w (به ترتیب جابجایی محوری، محیطی و شعاعی) به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \gamma_{s\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v}{\partial s} \\ \kappa_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \kappa_\theta = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad \kappa_{s\theta} = \frac{2}{R} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) \\ \epsilon_s^{NL} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2, \quad \epsilon_\theta^{NL} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2, \quad \gamma_{s\theta}^{NL} = \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن بالانویس NL نشانه‌ی غیر خطی بودن کرنش است. بر اساس تئوری پوسته‌ی فلوگه کرنش‌های کلی (خمشی و غشایی) عبارتند از:

$$e_s = \varepsilon_s + z\kappa_s, e_\theta = \frac{1}{(1+z/R)}(\varepsilon_\theta + z\kappa_\theta), e_{s\theta} = \frac{1}{(1+z/R)}\left[\varepsilon_{s\theta} + z\left(1 + \frac{z}{2R}\right)\kappa_{s\theta}\right] \quad (6)$$



شکل ۱- مختصات پوسته‌ی استوانه‌ای هدفمند

نیروهای منتجه نیز بر اساس این تئوری به صورت زیر تعريف می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_{ss} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ss}(1+z/R)dz, & N_{s\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{s\theta}(1+z/R)dz \\ N_{\theta s} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{s\theta}dz, & N_{\theta\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta}dz \\ M_{ss} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ss}(1+z/R)z dz, & M_{s\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{s\theta}(1+z/R)z dz \\ M_{\theta s} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta s}z dz, & M_{\theta\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta}z dz \end{aligned} \quad (7)$$

با استفاده از معادلات (۵)، (۶) و (۷)، همراه با قانون هوک و با توجه به متقارن بودن تانسور تنش، روابط نهایی برای نیروهای منتجه به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 N_{ss} &= j_1 \varepsilon_s + j_2 \kappa_s + A_{12} \varepsilon_\theta + B_{12} \kappa_\theta \\
 N_{s\theta} &= A_{66} \varepsilon_{s\theta} + j_3 \kappa_{s\theta} \\
 N_{\theta\theta} &= j_4 \varepsilon_\theta + j_5 \kappa_\theta + A_{12} \varepsilon_s + B_{12} \kappa_s \\
 N_{\theta s} &= j_6 \varepsilon_{s\theta} + j_7 \kappa_{s\theta} \\
 M_{ss} &= j_8 \varepsilon_s + j_9 \kappa_s + B_{12} \varepsilon_\theta + D_{12} \kappa_\theta \\
 M_{s\theta} &= B_{66} \varepsilon_{s\theta} + j_{10} \kappa_{s\theta} \\
 M_{\theta s} &= j_{11} \varepsilon_{s\theta} + j_{12} \kappa_{s\theta} \\
 M_{\theta\theta} &= j_{13} \varepsilon_\theta + j_{14} \kappa_\theta + B_{12} \varepsilon_s + D_{12} \kappa_s
 \end{aligned} \tag{۸}$$

ضرایب j_i ($i = 1, 2, \dots, 14$) در پیوست (الف) آورده شده و سایر ضرایب به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^5) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \tag{۹}$$

در معادله‌ی بالا Q_{ij} ها، مولفه‌های تنش-کرنش یا همان ماتریس ساختاری هستند که به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu(z)E(z)}{1 - \nu(z)^2}, \quad Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))} \tag{۱۰}$$

نیروها و ممان‌های منتجه حرارتی نیز با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 N_{ss}^{th} &= \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11} + Q_{12}) \alpha \Delta T (1 + z/R) dz \\
 N_{\theta\theta}^{th} &= \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{12} + Q_{22}) \alpha \Delta T dz \\
 M_{ss}^{th} &= \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11} + Q_{12}) \alpha \Delta T (1 + z/R) z dz \\
 M_{\theta\theta}^{th} &= \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{12} + Q_{22}) \alpha \Delta T z dz \\
 N_{s\theta}^{th} &= N_{\theta s}^{th} = M_{s\theta}^{th} = M_{\theta s}^{th} = 0
 \end{aligned} \tag{۱۱}$$

که در آن ΔT تغییر دما از حالت تنش آزاد بوده و برابر با $T(z) - T_0$ است. با تفریق مقادیر حاصله‌ی رابطه‌ی (۱۱) از مقادیر متناظر در رابطه‌ی (۸)، نیروها و ممان‌های منته‌ج کلی بر واحد طول حاصل می‌شوند.

۲-۳- روابط آیرودینامیک

چنانچه یک پوسته‌ی استوانه‌ای تحت یک جریان سیال مافوق صوت خارجی در جهت محور پوسته قرار گیرد، فشار خارجی اعمال شده به پوسته توسط جریان را می‌توان از رابطه‌ی زیر بدست آورد:

$$P_{aero} = \frac{-\gamma_a P_\infty M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \left[\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{(M^2 - 2)}{U_\infty (M^2 - 1)} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{w}{2R\sqrt{M^2 - 1}} \right] \quad (12)$$

این رابطه با نام تئوری مرتبه‌ی اول پتانسیل (پیستون) به صورت خطی^۱ [۱۸] همراه با ترم تصحیح انحناء [۱۹] شناخته می‌شود، که در آن U_∞ ، P_∞ و M به ترتیب سرعت جریان آزاد، فشار استاتیکی جریان آزاد و عدد ماخ هستند. در ضمن این رابطه برای سرعت‌های مافوق صوت $M > 1.6$ کاربرد دارد [۲۰].

۳- تحلیل

۳-۱- معادلات تعادل و محاسبه‌ی تنش‌های اولیه

در اینجا هدف از بکارگیری معادلات تعادل استاتیکی محاسبه تنش‌های اولیه ناشی از بارگذاری حرارتی و فشار داخلی پوسته می‌باشد. با بکارگیری اصل کار مجازی و در نظر گرفتن کرنش‌های خطی و غیرخطی و با این فرض که جابجایی‌های قبل از ارتعاش، بصورت متقارن محوری بوده و کوچک باشند، معادلات تعادل برای پوسته‌ی استوانه‌ای به صورت زیر بدست می‌آیند [۲۴ و ۲۵]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{ss}^0}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial N_{s\theta}^0}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta s}^0}{\partial s} &= 0 \\ \frac{N_{\theta\theta}^0}{R} - \frac{\partial^2 M_{ss}^0}{\partial s^2} - N_{ss}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - p_m &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

که بالانویس ۰ به تغییر شکل‌های قبل از ارتعاش یا تنش‌های منته‌ج اولیه مربوط می‌شود و p_m فشار داخلی عرضی است. به منظور اینکه بتوان تنش‌های ناشی از بار حرارتی و فشار داخلی را قبل از هرگونه ارتعاش محاسبه کرد، فرض می‌شود که پوسته در ابتدا در معرض جریان مافوق صوت قرار نگرفته و فقط تحت آن دو بار اولیه قرار می‌گیرد. با این فرض می‌توان تنش مانده یا اولیه را محاسبه کرد (N_{ss}^0) که این تنش با توجه به

^۱ Linearized Potential (Piston) Theory

رابطه اول در معادلات (۱۳) مقدار ثابتی دارد. با جایگذاری روابط خطی کرنش- جابجایی و با استفاده از معادله‌ی (۸)، معادلات تعادل به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$j_1 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - j_2 \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad (14)$$

$$(A_{66} + \frac{j_3 + j_{11}}{R} + \frac{j_{12}}{R^2}) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{j_4}{R^2} w + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial u}{\partial s} - \left(\frac{2B_{12}}{R} + N_{ss}^0 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - j_8 \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + j_9 \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - \frac{N_{\theta\theta}^{th}}{R} - p_m = 0 \quad (16)$$

همانطور که دیده می‌شود، معادله‌ی (۱۵) کاملاً مستقل از معادلات (۱۴) و (۱۶) است. بنابراین معادله‌ی (۱۵) را می‌توان نادیده گرفت. پاسخ همگن معادلات (۱۴) و (۱۶) به فرم نمایی و به صورت زیر است:

$$u_0^h = A_1 e^{\lambda s}, \quad w_0^h = A_2 e^{\lambda s} \quad (17)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۱۷) در قسمت همگن معادلات (۱۴) و (۱۶) و در نظر گرفتن یک مقدار ثابت اولیه و دلخواه برای N_{ss}^0 ، دو معادله‌ی جبری خطی برای A_1 و A_2 تولید می‌شود. برای بدست آوردن جواب غیر بدیهی، دترمینان ماتریس ضرایب باید صفر شود. معادله‌ی مشخصه‌ی حاصل دو ریشه‌ی صفر و چهار ریشه‌ی غیر صفر مختلط خواهد داشت. بنابراین شکل کامل پاسخ به صورت زیر داده می‌شود:

$$u_0^h = f_0 + f_1 s + \sum_{i=2}^5 f_i e^{\lambda_i s}$$

$$w_0^h = g_0 + g_1 s + \sum_{i=2}^5 g_i e^{\lambda_i s} \quad (18)$$

حرف h به معنای پاسخ همگن است. در پاسخ فوق ۱۲ ثابت مجهول (f_0 تا f_5) و (g_0 تا g_5) وجود دارند که می‌توان با جایگذاری معادله‌ی (۱۸) در معادلات (۱۴) و (۱۶) تعداد این ثابت‌ها را به ۶ کاهش داد. از طرفی شرایط مرزی زیر باید به هر طرف استوانه (یعنی $s = 0$ و $s = L$) اعمال شود:

$$(w = 0), (M_{ss} = 0), (N_{ss} = 0 \text{ یا } u = 0) \quad s = 0, L \quad (19)$$

که منجر به تولید ۶ معادله‌ی خطی به ازای ۶ ثابت مجهول می‌شود. پاسخ خصوصی معادلات (۱۴) و (۱۶) نیز به سادگی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u_0^p = \left(\frac{N_{\theta\theta}^{th}}{R} + \frac{Rp_m}{R} \right) s$$

$$w_0^p = 0 \quad (20)$$

حرف p در این رابطه به معنای پاسخ خصوصی می‌باشد. حال با استفاده از پاسخ بدست آمده برای جابجایی کل (u_0, w_0) و تفریق دو معادله‌ی (۸) و (۱۱) مقدار بدست آمده برای N_{SS}^0 که خود تابع u و w می‌باشد، تجدیدنظر می‌شود و می‌توان این فرایند تکرار شونده را تا همگرا شدن مقادیر N_{SS}^0 در یک حلقه ادامه داد. با این کار مقدار حدس زده شده و دلخواه اولیه برای N_{SS}^0 تصحیح شده و به مقدار واقعی خود می‌رسد. بنابراین تا این مرحله تنش های اولیه محاسبه شده‌اند.

۳-۲- معادلات حرکت

پوسته استوانه‌ای موردنظر در معرض جریان مافوق صوت قرار گرفته و امکان وقوع فلاتر در آن محتمل است. با بکارگیری اصل همیلتون می‌توان معادلات حرکت را بدست آورد:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta K - \delta(U + U_0)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (21)$$

در این رابطه U انرژی کرنشی ارتعاشی، U_0 انرژی کرنشی ناشی از پیش تنش^۱ (اولیه)، K انرژی جنبشی و W کار نیروهای خارجی (آیرودینامیکی) است. انرژی کرنشی مجازی پوسته استوانه‌ای هدفمند بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_s \delta e_s + \sigma_\theta \delta e_\theta + \sigma_{s\theta} \delta e_{s\theta}) dV \quad (22)$$

با جایگذاری مولفه‌های کرنش کلی از رابطه‌ی (۶) در معادله‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$\delta U = \frac{1}{2} \iiint \left[\sigma_s \delta (\varepsilon_s + z k_s) + \sigma_\theta \delta \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R}\right)} (\varepsilon_\theta + z k_\theta) + \sigma_{s\theta} \delta \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R}\right)} \left(\varepsilon_{s\theta} + z \left(1 + \frac{z}{2R}\right) k_{s\theta} \right) \right] \left(1 + \frac{z}{R}\right) R d\theta ds dz \quad (23)$$

با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۷) و انتگرال‌گیری از معادله‌ی فوق نسبت به متغیر Z خواهیم داشت:

$$\delta U = \frac{1}{2} \iint N_{SS} \delta \varepsilon_s + M_{SS} \delta k_s + N_{\theta\theta} \delta \varepsilon_\theta + M_{\theta\theta} \delta k_\theta + N_{\theta s} \delta \varepsilon_{s\theta} + \left(\frac{M_{\theta s}}{2} + \frac{M_{s\theta}}{2} \right) \delta k_{s\theta} R d\theta ds \quad (24)$$

¹ Prestress

طبق رابطه‌ی (۷) که بر اساس تئوری فلوگه بنا نهاده شده، $N_{\theta s}$ برابر با $(N_{s\theta} - M_{\theta s}/R)$ می‌باشد (طبق رابطه‌ی (۷) قابل اثبات است) که به همین صورت در معادله بالا جایگذاری می‌شود. در ادامه فقط لازم است که کرنش‌ها بر حسب جابجایی نوشته شده و انتگرال‌گیری شود. باید توجه شود که روابط کرنش - جابجایی برگرفته از تئوری پوسته‌ی در نظر گرفته شده (در اینجا تئوری فلوگه) باید در معادلات جایگذاری شوند. با این حال بدلیل اینکه تنش‌های اولیه ممکن است مقادیر بزرگی داشته باشند، ضروری است که در رابطه‌ی انتگرالی δU_0 معادلات کرنش - جابجایی غیر خطی و مرتبه‌ی دو بکار برده شوند، این در حالی است که تنها روابط خطی در رابطه‌ی انتگرالی δU لحاظ می‌شوند. این کار بطرز شایسته‌ای همگن شدن مرتبه‌ی ترم‌های عبارات داخل انتگرال را در رابطه‌ی همیلتون تسهیل و برقرار می‌کند [۲۴].

انرژی کرنشی مجازی اولیه بصورت زیر است:

$$\delta U_0 = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_s^0 \delta e_s + \sigma_\theta^0 \delta e_\theta + \sigma_{s\theta}^0 \delta e_{s\theta}) dV \quad (25)$$

بطور مشابه می‌توان این رابطه را بر حسب نیروهای منته‌جه اولیه نوشت:

$$\delta U_0 = \frac{1}{2} \iint (N_{ss}^0 \delta \varepsilon_s + M_{ss}^0 \delta k_s + N_{\theta\theta}^0 \delta \varepsilon_\theta + M_{\theta\theta}^0 \delta k_\theta) R d\theta ds \quad (26)$$

با جایگذاری ترم‌های خطی و غیر خطی کرنش بر حسب جابجایی و سپس انتگرال‌گیری از آن رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\delta U_0 = \frac{-1}{2} \iint \left(N_{ss}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \delta w + \frac{N_{\theta\theta}^0}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \delta w \right) R d\theta ds \quad (27)$$

با صرف نظر کردن از ترم‌های اینرسی درون صفحه‌ای و چرخشی^۱، انرژی جنبشی بر حسب جابجایی شعاعی بصورت زیر فرض می‌شود:

$$\delta K = \frac{1}{2} \iint \left(\bar{\rho} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) R d\theta ds \quad (28)$$

که در آن $\bar{\rho}$ از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\bar{\rho} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz \quad (29)$$

کار مجازی نیروهای آیرودینامیکی نیز بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta W = \iint P_a \delta w R d\theta ds \quad (30)$$

¹ Rotary

با استفاده از روابط (۲۴)، (۲۷)، (۲۸) و (۳۰) معادلات حرکت دینامیکی حاکم را جهت تحلیل فلاتر می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{ss}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta s}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial s} &= 0 \\ -\frac{N_{\theta\theta}}{R} + \frac{\partial^2 M_{ss}}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_{s\theta}}{\partial s \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_{\theta s}}{\partial s \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} + N_{ss}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ + \frac{N_{\theta\theta}^0}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P_{aero} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

تنش های اولیه N_{ss}^0 و $N_{\theta\theta}^0$ ناشی از بارگذاری حرارتی و فشار داخلی قبلاً از طریق معادلات (۱۳) محاسبه شده‌اند و در معادلات حرکت (۳۱) جایگذاری می‌شوند. با جانشینی تنش‌های منته‌جه برحسب متغیرهای جابجایی به کمک معادلات (۸)، معادلات حرکت را می‌توان برحسب این متغیرها به صورت زیر بدست آورد، که عملگرهای L_{ij} در ضمیمه (ب) آمده است:

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = 0 \quad (32)$$

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = 0 \quad (33)$$

$$L_{31}u + L_{32}v + (L_{33} + \bar{L})w = 0 \quad (34)$$

برای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده می‌توان نوشت:

$$w = 0, M_{ss} = 0 \quad (35)$$

توابع جابجایی به صورت زیر فرض می‌شوند [۲۳ و ۲۵]:

$$u = e^{pt} \cos(n\theta) \left[\sum_{m=1}^{NT} \left(\tilde{u} + A_m \cos\left(\frac{m\pi s}{L}\right) \right) \right] \quad (36)$$

$$v = e^{pt} \sin(n\theta) \left[\sum_{m=1}^{NT} \left(\tilde{v} + B_m \sin\left(\frac{m\pi s}{L}\right) \right) \right] \quad (37)$$

$$w = e^{pt} \cos(n\theta) \left[\sum_{m=1}^{NT} \left(\tilde{w} + C_m \sin\left(\frac{m\pi s}{L}\right) \right) \right] \quad (38)$$

که در آن NT تعداد ترم‌های سری فوریه (تعداد مودهای محوری) است. ترم‌های سری فوریه جابجایی، پاسخ معادله‌ی (۳۲) هستند و با جایگذاری آنها در این معادله می‌توان A_m و B_m را به صورت توابعی از C_m نوشت. \tilde{u} ، \tilde{v} و \tilde{w} جابجایی‌های اضافه‌ای هستند که برای ارضای شرایط مرزی درون صفحه‌ای، در نظر

گرفته شده‌اند. در تابع جابجایی W به دلیل اینکه ترم‌های سری فوریه بطور کامل و به‌تنهایی شرایط مرزی را ارضا می‌کنند، می‌توان \tilde{W} را بطور دلخواه برابر صفر در نظر گرفت. حال با جایگذاری توابع اضافی باقی مانده \tilde{u} و \tilde{v} و $\tilde{W} = 0$ در دو معادله‌ی اول حرکت (۳۲) و (۳۳)، دو معادله‌ی دیفرانسیل همگن بدست خواهد آمد که پاسخ این دو معادله را می‌توان به صورت زیر فرض کرد [۲۳ و ۲۵]:

$$\tilde{u} = \bar{A}e^{\lambda s}, \quad \tilde{v} = \bar{B}e^{\lambda s} \quad (۳۹)$$

بعبارتی دیگر توابع جابجایی فرض شده در معادلات (۳۶)، (۳۷) بصورت مجموع دو پاسخ خصوصی و عمومی دو معادله دیفرانسیل اول حرکت می‌باشند که \tilde{u} ، \tilde{v} را می‌توان پاسخ عمومی آن دو معادله به شمار آورد. حال با جایگذاری معادله (۳۹) در دو معادله‌ی دیفرانسیل همگن بدست آمده، دو معادله‌ی جبری برای ضرایب \bar{A} و \bar{B} بدست خواهد آمد. برای یافتن پاسخ غیر بدیهی آن، دترمینان ماتریس ضرایب باید صفر شود. معادله‌ی مشخصه‌ی حاصل چهار ریشه‌ی مختلط دارد. بنابراین جابجایی‌های اضافی (یا همان پاسخ عمومی) را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲۳ و ۲۵]:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^4 \bar{A}_{im} e^{\lambda_i s}, \quad \tilde{v} = \sum_{i=1}^4 \bar{B}_{im} e^{\lambda_i s} \quad (۴۰)$$

که به ازای هر λ_i می‌توان \bar{B}_{im} را به صورت تابعی از \bar{A}_{im} بیان کرد. در نتیجه، نهایتاً برای هر C_m چهار ضریب مجهول باقی می‌ماند، که با اعمال شرایط مرزی درون صفحه‌ای می‌توان آنها را یافت:

$$BC1: N_{ss} = N_{s\theta} + \frac{M_{s\theta}}{R} = 0, \quad s = 0, L$$

$$BC2: u = N_{s\theta} + \frac{M_{s\theta}}{R} = 0, \quad s = 0, L$$

$$BC3: v = N_{ss} = 0, \quad s = 0, L$$

$$BC4: v = u = 0, \quad s = 0, L \quad (۴۱)$$

بنابراین به منظور حل معادلات حرکت، ابتدا پاسخی برای میدان جابجایی فرض می‌شود که دو معادله‌ی اول را به صورت دقیق برقرار کند. این پاسخ در ادامه منجر به تولید چهار ثابت مجهول می‌شود که این ثابت‌ها با اعمال شرایط مرزی مناسب (BC4- BC1) تعیین می‌شوند، سپس معادله‌ی سوم با روش گلرکین حل می‌شود. حال با جایگذاری توابع جابجایی بدست آمده در معادله (۳۴) و سپس اعمال روش گلرکین، تعداد NT معادله‌ی همگن برای C_m تولید خواهد شد، که می‌توان آن را به صورت کلی زیر نوشت:

$$(p^2 Q_1 + p Q_2 + Q_3) \{C\} = 0 \quad (۴۲)$$

برای پاسخ غیر بدیهی، باید دترمینان ماتریس ضرایب در معادله (۳۹) صفر شود:

$$\det(p^2 Q_1 + p Q_2 + Q_3) = 0 \quad (۴۳)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر به مسئله‌ی مقدار ویژه استاندارد کاهش داد:

$$\det(S - pI) = 0 \quad (44)$$

که در آن ماتریس S به صورت زیر است:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -Q_1^{-1}Q_3 & -Q_1^{-1}Q_2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

روش محاسبه ماتریس S در پیوست پ آمده است.

۴- نتایج عددی

مقادیر ویژه‌ی ماتریس S در معادله (۴۵) کاملاً مختلط هستند. این امر نشان می‌دهد که تغییرات دامنه با زمان، به صورت نمایی یا افزاینده خواهد بود یا کاهنده. ناپایداری فلاتر هنگامی رخ می‌دهد که قسمت حقیقی مقدار ویژه p از منفی به مثبت تغییر علامت دهد. بنابراین نقطه‌ی آغاز فلاتر (مرز فلاتر) فشار جریان آزادی است که به‌ازای آن در یک عدد موج محیطی خاص، قسمت حقیقی مقدار ویژه صفر شود. پوسته‌ی استوانه‌ای مورد نظر از فولاد ضد زنگ (SUS304) بعنوان فلز در سطح داخلی و سیلیکن نیتريد (Si_3N_4) بعنوان سرامیک در سطح خارجی تشکیل شده است. ضخامت استوانه $h = 0.001 \text{ m}$ و $L/R = 2$ بوده و خواص مواد از جدول (۱) گرفته می‌شود. در این بررسی حداقل تعداد مود محوری در نظر گرفته شده (ترم‌های سری فوریه) به جهت همگرایی نتایج، ۲۰ مود می‌باشد.

۴-۱- اعتبارسنجی

جهت اعتبارسنجی، پوسته‌ی استوانه‌ای ایزوترپیک بکار رفته در مرجع [۴] با ویژگی‌های زیر در نظر گرفته شد: $E = 11 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ، $\rho = 8900 \text{ Kg/m}^3$ ، $\nu = 0.35$ ، $h = 0.0001015 \text{ m}$ ، $L = 0.381 \text{ m}$ ، $R = 0.203 \text{ m}$ ، $M = 3$ ، $a_\infty = 213 \text{ m/s}$ ، $T_\infty = 120^\circ\text{F}$ (48.9°C) که دمای ایستایی جریان آزاد و a_∞ سرعت صوت است. این اطلاعات از آزمایشات انجام شده در مرکز تحقیقات ناسا امس^۱ [۴] گرفته شده است. در شکل (۲) مرز فلاتر برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای همگن با مشخصات فوق و با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده (لبه آزاد^۲ BC3) تحت اعمال فشار داخلی بدست آمده و با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی اولسن و فانگ [۴] مقایسه شده است. همواره پاسخ تحلیلی، برای فشار داخلی متوسط اثر پایدار کنندگی بیشتری را نسبت به تحقیقات آزمایشی تخمین می‌زند [۴]. این موضوع در کار حاضر نیز تایید شده و در مجموع مقادیر آن به تحقیقات آزمایشی نزدیک‌تر است.

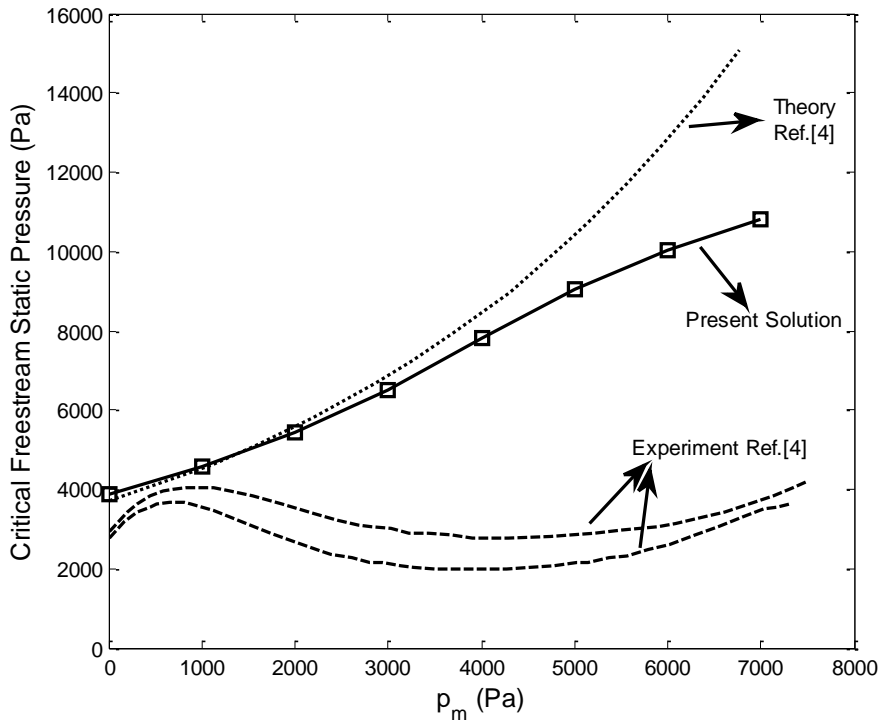
۴-۲- پیش‌بینی فلاتر برای پوسته‌ی استوانه‌ای FGM تحت فشار داخلی

به ازای هر کدام از موده‌های محیطی n ، فشار بحرانی متناظر بدست آمده و نتایج در شکل‌های (۳) و (۴) رسم شده است. این شکل‌ها نشان می‌دهند که برای هر مقدار فشار داخلی یک n بحرانی وجود دارد که به‌ازای آن

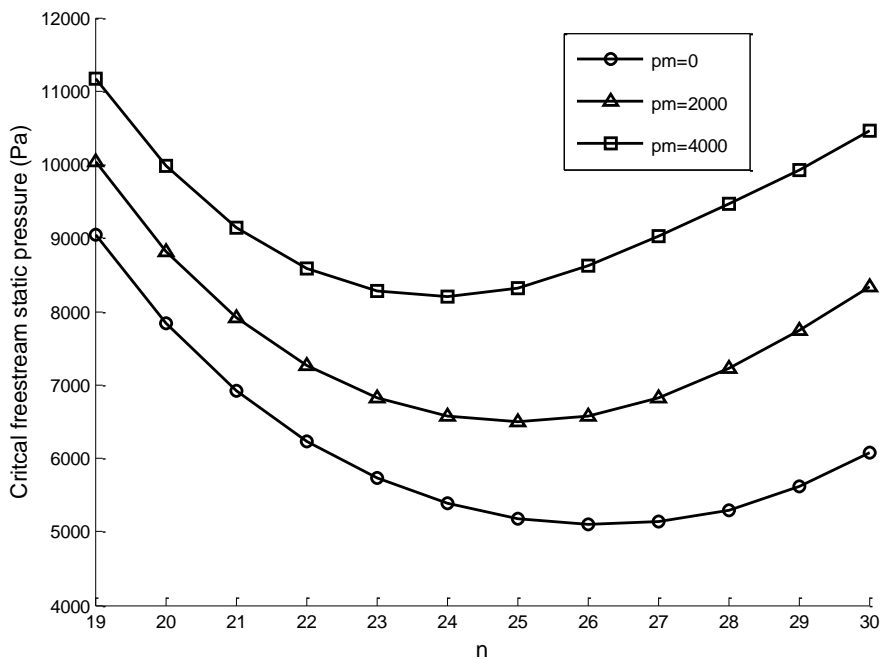
¹ NASA Ames Research Center

² Freely supported

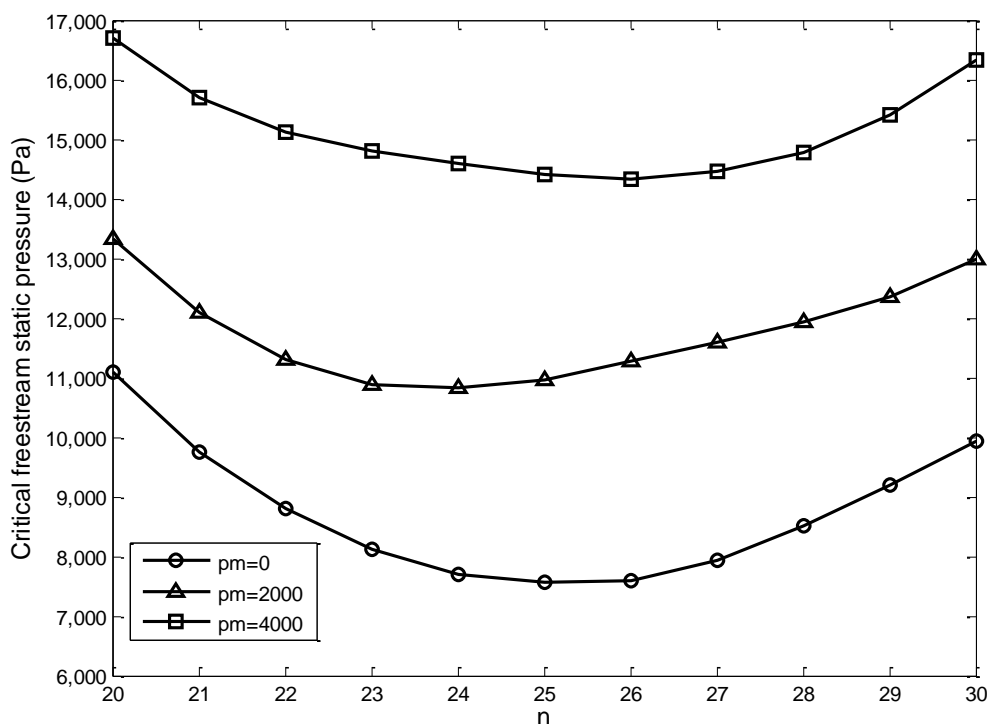
فشار بحرانی مینیمم است و این نقطه همان معیار تخمین فلتر به حساب می‌آید. بعنوان مثال در شکل (۳) فشار بحرانی مینیمم است و این نقطه همان معیار تخمین فلتر به حساب می‌آید. بعنوان مثال در شکل (۳) $P_\infty = 5100 \text{ Pa}$ و $n = 26$ در $p_m = 0$ ، به ترتیب بحرانی ترین عدد موج محیطی و فشار جریان آزاد هستند. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش فشار داخلی، فشار جریان آزاد بحرانی نیز افزایش می‌یابد، این بدان معناست که فشار داخلی اثر پایدار کننده بر پوسته‌ی استوانه‌ای دارد.



شکل ۲- مرز فلتر برای یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک، BC3



شکل ۳- پیش‌بینی فلتر برای پوسته استوانه‌ای FGM تحت فشار داخلی $N=0, L/R=2, R/h=2000$ BC2



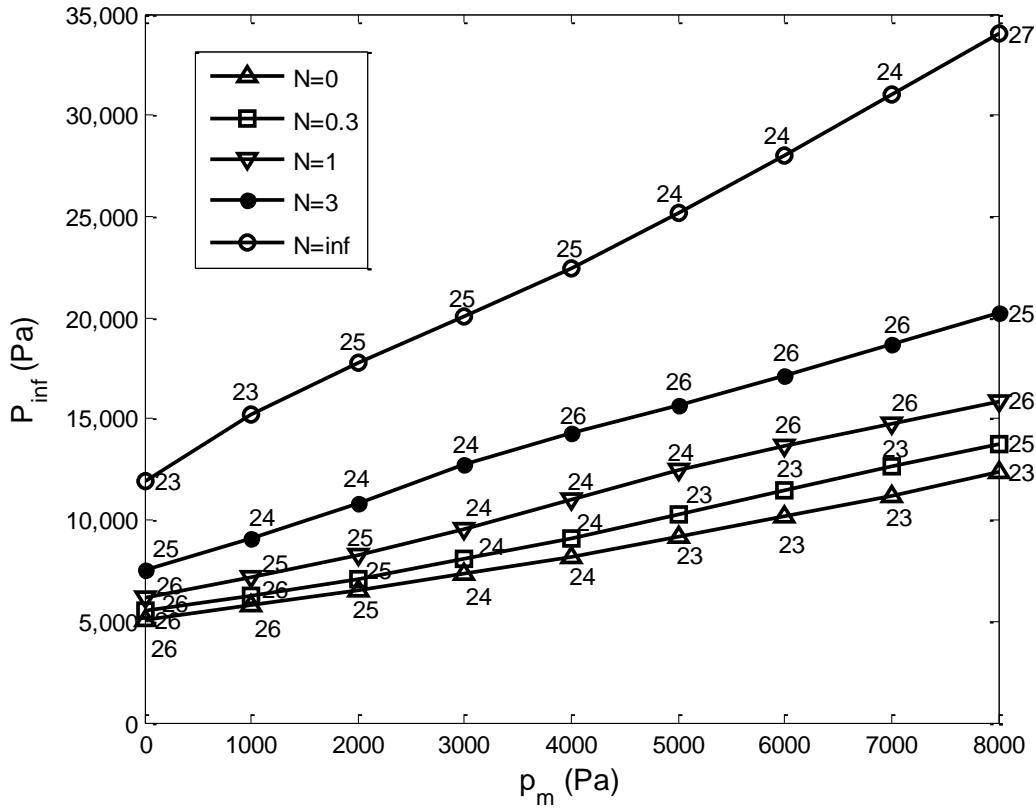
شکل ۴- پیش‌بینی فلاتر برای پوسته استوانه‌ای FGM تحت فشار داخلی BC2, $N=3$, $L/R=2$, $R/h=2000$

به منظور بررسی چگونگی تاثیر اندیس کسر حجمی N بر رفتار فلاتر پوسته استوانه‌ای، در شکل (۵) مرزهای فلاتر بر حسب فشار داخلی و در کسرهای حجمی متفاوت برای یک نمونه شرط مرزی رسم شده است. برای سایر شرایط مرزی نیز نمودار مشابهی بدست خواهد آمد. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش کسر حجمی پوسته‌ی استوانه‌ای هدفمند، فشار بحرانی افزایش یافته و پوسته پایدارتر می‌شود. همچنین با افزایش فشار داخلی نیز فشار بحرانی افزایش می‌یابد. این موضوع هم برای پوسته‌ی سرامیک خالص ($N = inf$) و یا فلز خالص ($N = 0$) و هم برای پوسته‌ی FGM اتفاق می‌افتد. همچنین عدد موج محیطی با افزایش فشار ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

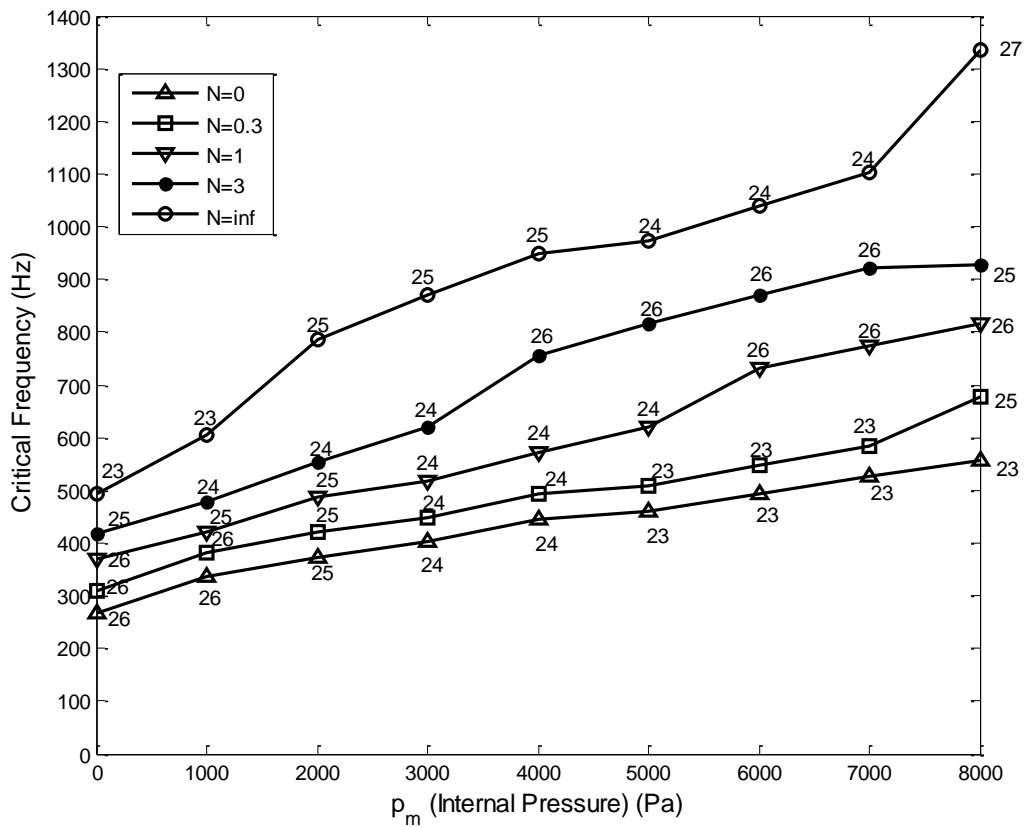
نحوه‌ی تغییرات فرکانس بحرانی (فرکانس در فشار بحرانی) بر حسب فشار داخلی در شکل (۶) آمده است، که نشان می‌دهد با افزایش فشار داخلی و همین‌طور افزایش کسر حجمی، فرکانس ارتعاشات در مرز فلاتر افزایش می‌یابد.

۴-۳- اثر نسبت طول به شعاع بر مرز فلاتر پوسته‌ی استوانه‌ای

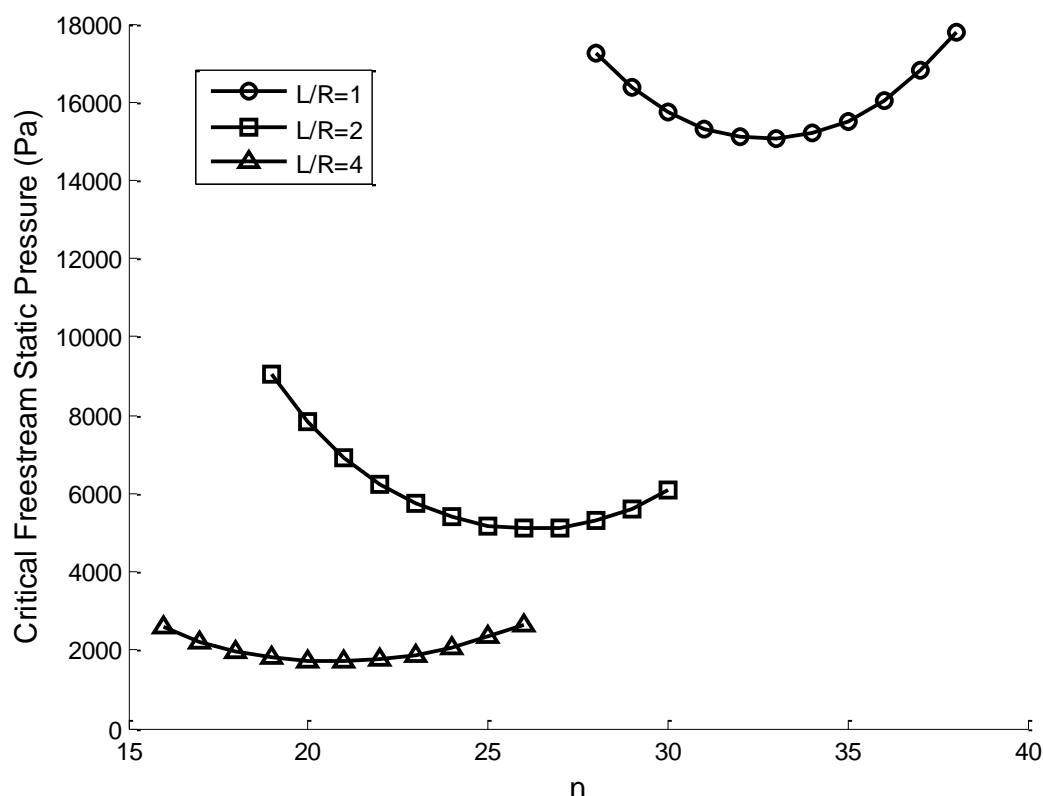
در شکل (۷) مرز فلاتر برای سه استوانه با نسبت‌های طول به شعاع متفاوت آمده است. با افزایش نسبت $\frac{L}{R}$ فشار بحرانی کاهش یافته و عدد موج محیطی بحرانی نیز کاهش می‌یابد. بعبارت دیگر با کاهش این نسبت، پایداری پوسته بیشتر می‌شود. برای نسبت $\frac{L}{R} = 1$ شروع فلاتر در $n = 33$ و $P_{\infty} = 15050 Pa$ می‌باشد، در حالی که در نسبت $\frac{L}{R} = 4$ شروع آن در $n = 21$ و $P_{\infty} = 1700 Pa$ است.



شکل ۵- تاثیر اندیس کسر حجمی N بر مرز فلاتر پوسته استوانه‌ای FGM، BC2، L/R=2، R/h=2000.



شکل ۶- فرکانس در فشار بحرانی (مرز فلاتر) پوسته استوانه‌ای FGM، BC2، L/R=2، R/h=2000.



شکل ۷- اثر نسبت طول به شعاع بر مرز فلاتر $p_m = 0$, $N=0$, $R/h=2000$, BC2

۴-۴- بررسی مرزهای فلاتر پوسته استوانه‌ای هدفمند در معرض بارگذاری دمایی

توزیع دما در راستای ضخامت با حل معادله‌ی انتقال حرارت هدایت پایا و با مدنظر قرار دادن دمای سطح داخلی ($T_m = 300 K$) و دمای سطح خارجی (T_c) بعنوان شرایط مرزی، به صورت سری چند جمله‌ای بدست می‌آید [۱۱]:

$$T(z) = T_c + \frac{(T_m - T_c)Y_1}{Y_2}$$

$$Y_1 = \sum_{i=0}^5 \frac{r^{(Ni+1)}}{Ni+1} \left(-\frac{K_{mc}}{K_c}\right)^i, Y_2 = \sum_{i=0}^5 \frac{1}{Ni+1} \left(-\frac{K_{mc}}{K_c}\right)^i$$

$$K_{mc} = K_m - K_c, r = \frac{h-2z}{2h} \quad (46)$$

جهت مشاهده‌ی اثر دما بر مرزهای فلاتر و موده‌های آن، یک نمونه پوسته استوانه‌ای هدفمند در دماهای مختلف در نظر گرفته شده و نتایج برای شرط مرزی دوم (BC2) که افزایش دما، تنش اولیه‌ای را به سازه القا می‌کند، در جدول (۲) آمده است. مشاهده می‌شود که افزایش دما تا حد زیادی فشار بحرانی را کم می‌کند، به این معنی که پوسته ناپایدارتر می‌شود.

این رفتار تا هنگامی که فشار به صفر نزدیک می‌شود، ادامه دارد ولی پس از آن فشار بحرانی بطور غیر معمول افزایش و کاهش پیدا می‌کند. همزمان با افزایش دما عدد موج محیطی بحرانی نیز افزایش می‌یابد. همچنین در دماهای کمتر از 480K با افزایش توان کسر حجمی فشار بحرانی افزایش می‌یابد. در حالی که این موضوع در دماهای بیشتر و نزدیک به دمای کماتش بحرانی (550K) قطعی نیست. بعبارت دیگر ممکن است در این دماها با افزایش توان کسر حجمی عدد موج بحرانی کاهش یابد.

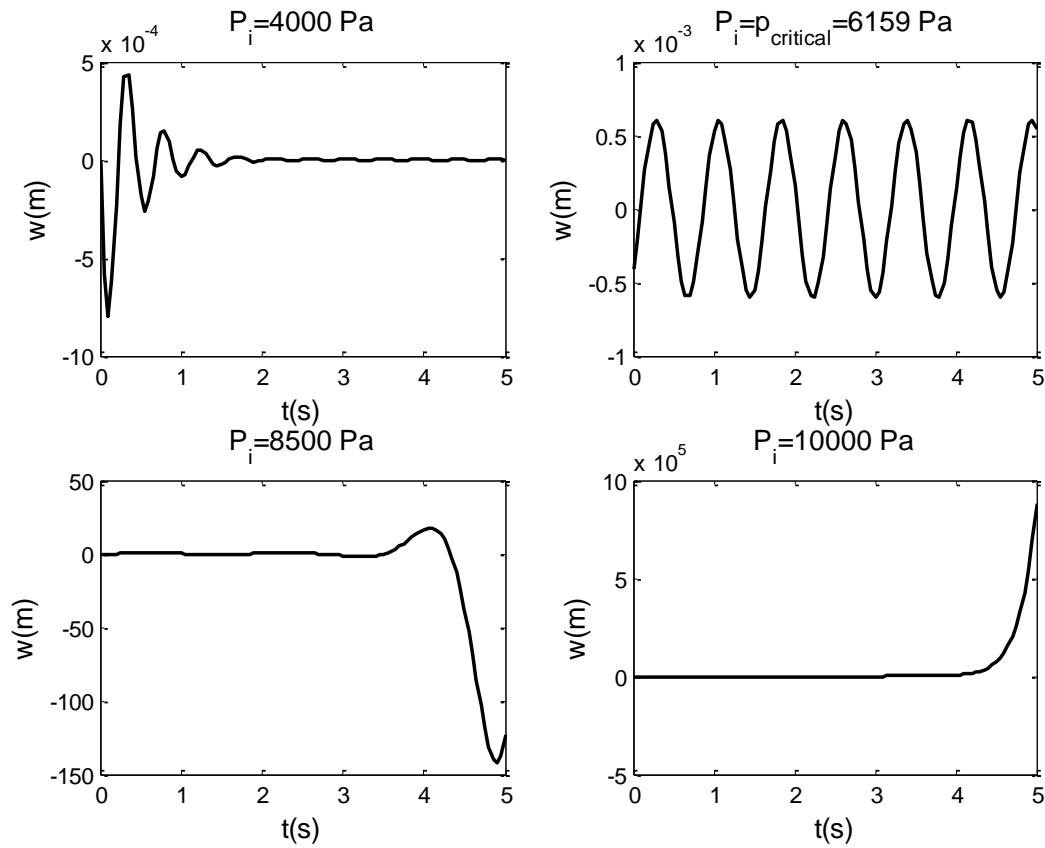
جدول ۲- مرزهای فلتر پوسته استوانه‌ای هدفمند در دماهای مختلف ($\frac{L}{R} = 4$, $\frac{R}{h} = 200$, $h = 0.001$)

N	$T_c = 400$				$T_c = 450$				$T_c = 500$			
	Present		Ref.[8]		Present		Ref.[8]		Present		Ref.[8]	
	n	P_{Cr}	n	P_{Cr}	n	P_{Cr}	n	P_{Cr}	n	P_{Cr}	n	P_{Cr}
0	10	66100	10	67250	14	300	14	465	16	255	14	170
0.3	9	187650	9	187600	10	7258	10	6960	15	140	15	300
1	10	430970	10	429800	10	87900	10	89300	12	250	12	380
3	9	932230	9	907900	10	465050	10	463900	11	89200	11	92200

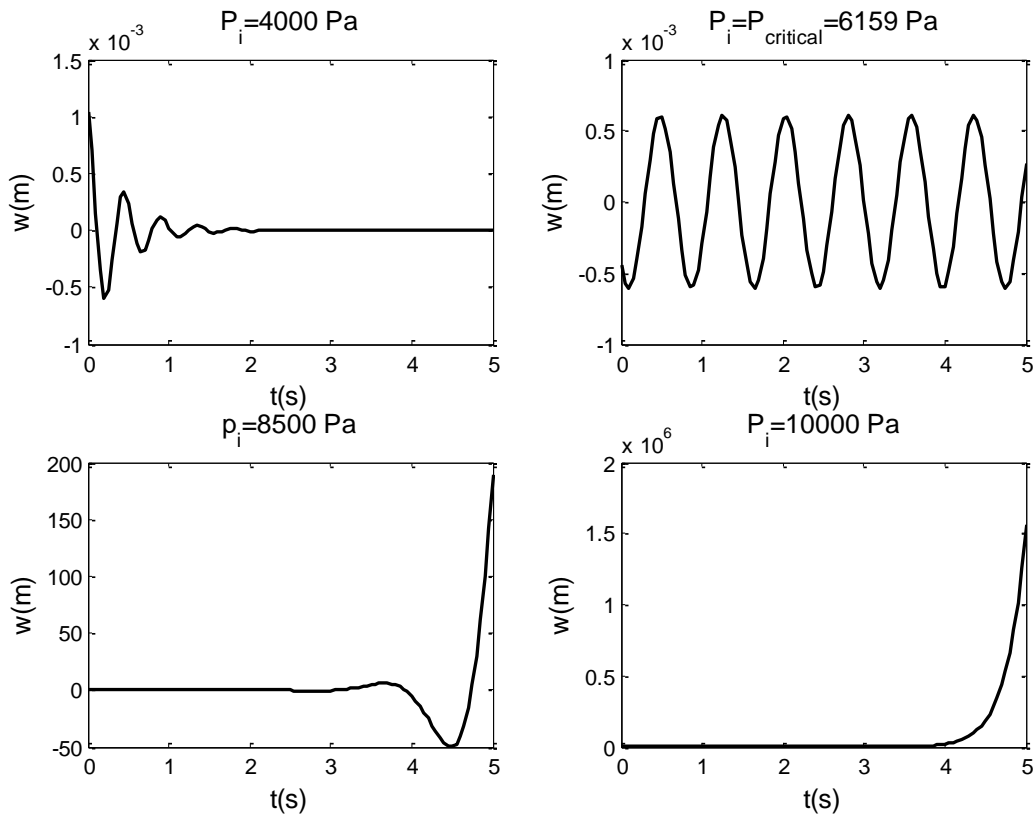
۴-۵- پاسخ زمانی فلتر

به منظور بررسی پاسخ زمانی پوسته‌ی استوانه‌ای هدفمند قبل و پس از فلتر، جابجایی عرضی کسینوسی و سینوسی پوسته بر حسب زمان به ازای فشارهای خارجی متفاوت و در یک عدد موج محیطی ثابت، به ترتیب در شکل‌های (۸) و (۹) رسم شده است. شرط مرزی BC2 فرض شده و $N = 1$ است. از مقایسه‌ی چهار حالت مشخص می‌شود که قبل از فلتر (فشار بحرانی)، پوسته پس از مدتی ارتعاش میرا شده و در خود مرز فلتر ($P_{\infty} = 6159 Pa$) ارتعاشات هارمونیک با دامنه ثابت دیده می‌شود. پس از فشار بحرانی نیز دامنه بطور ناگهانی و به شدت افزایش یافته است.

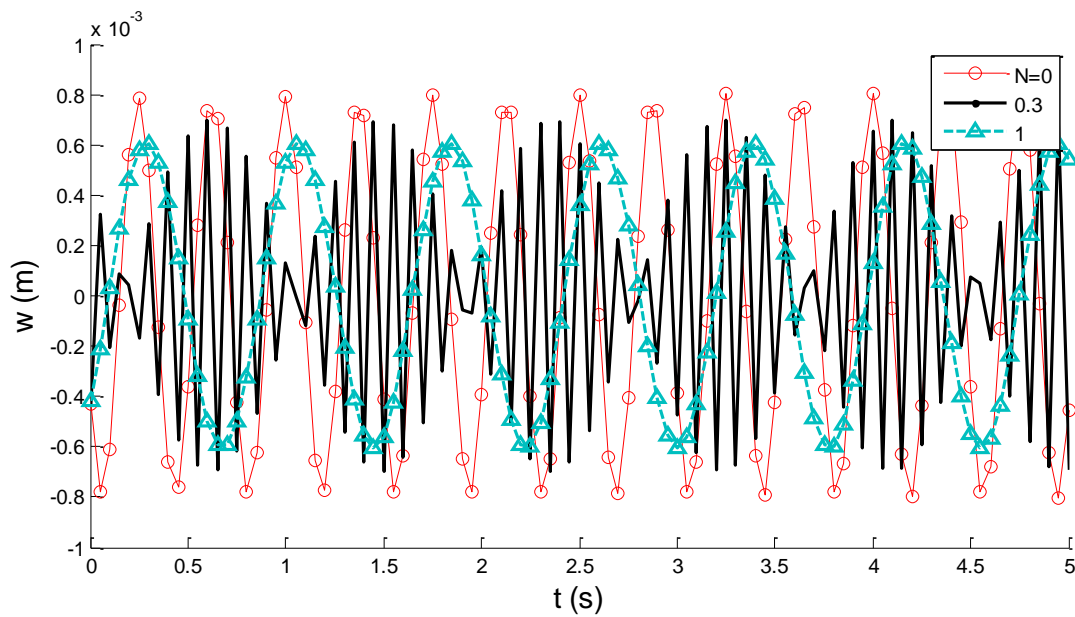
در شکل (۱۰) پاسخ زمانی به‌ازای توان کسر حجمی متفاوت نشان داده شده است. هر کدام از حالات در شرایط بحرانی خود (فشار و مود فلتر) محاسبه شده‌اند. می‌توان ملاحظه نمود که افزایش توان کسر حجمی N منجر به کاهش دامنه نوسانات هارمونیک شده است. بعبارتی اختلاف بین کمترین و بیشترین جابجایی شعاعی با افزایش N کاهش پیدا می‌کند. همین پاسخ در شکل (۱۱) به ازای فشار داخلی متفاوت رسم شده است، که نشان می‌دهد افزایش فشار داخلی نیز منجر به کاهش دامنه فلتر شده است. پاسخ سینوسی نیز در هر دو مورد نتیجه مشابهی خواهد داد.



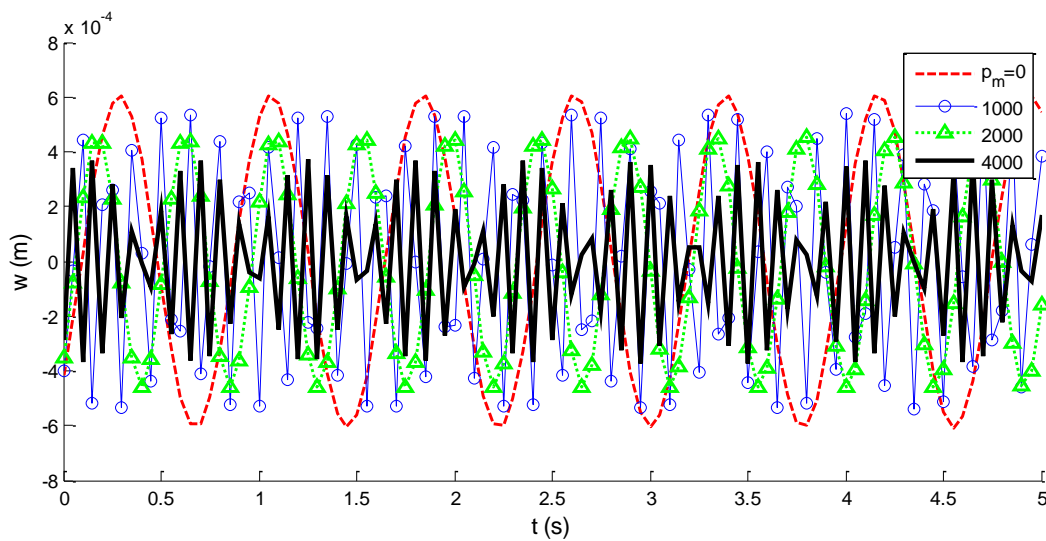
شکل ۸- پاسخ زمانی کسینوسی پوسته استوانه‌ای FGM ($p_m = 0, T_c = 300, \frac{L}{R} = 2, \frac{R}{h} = 2000$)



شکل ۹- پاسخ زمانی سینوسی پوسته استوانه‌ای FGM ($p_m = 0, T_c = 300, \frac{L}{R} = 2, \frac{R}{h} = 2000$)



شکل ۱۰- پاسخ زمانی کسینوسی به ازای توان کسر حجمی متفاوت در مرز فلتر ($p_m = 0, T_c = 300$)



شکل ۱۱- پاسخ زمانی کسینوسی به ازای فشار داخلی متفاوت در مرز فلتر ($N = 1, T_c = 300$)

۵- نتیجه‌گیری

در این مطالعه تخمین فلتر در پوسته‌های استوانه‌ای هدفمند در جریان مافوق صوت خارجی در راستای محور پوسته، مورد بررسی قرار گرفت. پوسته‌ای هدفمند متشکل از فولاد ضد زنگ در سطح داخلی و سیلیکن نیتريد در سطح خارجی در نظر گرفته شد. اثر فشار داخلی، دما و نسبت طول به شعاع استوانه بر مرزهای فلتر مشخص شده و پاسخ زمانی پوسته‌ای استوانه‌ای بدست آمد. تحلیل حاضر بر اساس تئوری پوسته‌ای فلوگه و با بکارگیری روش گلرکین انجام شد. در قسمت اعتبارسنجی این تحلیل نشان داده شد که مرزهای فلتر به داده‌های بدست آمده از تحقیقات آزمایشی نزدیک است.

در ادامه ابتدا چگونگی تعیین مرز فلاتر بررسی شد و اثر فشار بر مرزهای فلاتر مورد مطالعه قرار گرفت. مشاهده شد که همواره فشار داخلی بر پوسته‌ی استوانه‌ای اثر پایدار کننده دارد و افزایش آن در هر کسر حجمی باعث افزایش فرکانس ارتعاشات در مرز فلاتر می‌شود. کاهش نسبت طول به شعاع استوانه، پوسته را در مقابل فلاتر پایدارتر می‌کند. همچنین دیده شد که در مجموع، افزایش دما تا حد زیادی پوسته را ناپایدار می‌کند و بر مود محیطی بحرانی نیز تاثیرگذار است. به منظور بررسی نحوه‌ی نوسانات پوسته‌ی استوانه‌ای هدفمند قبل و پس از فلاتر، پاسخ زمانی آن نشان می‌دهد که ارتعاشات در مرز فلاتر هارمونیک می‌شود و دامنه پس از فلاتر بشدت افزایش می‌یابد و اثر مخرب دارد. همچنین ملاحظه گردید که افزایش توان کسر حجمی و فشار داخلی باعث کاهش دامنه نوسانات در مرز فلاتر می‌شود.

مراجع

- [1] Müller, E., Drašar, Č., Schilz, J., and Kaysser, W.A, "Functionally Graded Materials for Sensor and Energy Applications", *Materials Science and Engineering*, Vol. 362, pp. 17-39, (2003).
- [2] Lee, W.Y., Stinton, D.P., Berndt, C.C., Erdogan, F., Lee, Y.D., and Mutasim, Z., "Concept of Functionally Graded Materials for Advanced Thermal Barrier Coating Applications", *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 79, pp. 3003–3012, (1996).
- [3] Loy, C.T., Lam, K.Y., and Reddy, J.N., "Vibration of Functionally Graded Cylindrical Shells", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, pp. 309–324, (1999).
- [4] Olson, M.D., and Fung, Y.C., "Comparing Theory and Experiment for the Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells", *AIAA Journal*, Vol. 5, No. 10, pp. 1849–1856, (1967).
- [5] Barr, G.W., and Stearman, R.O., "Aeroelastic Stability Characteristics of Cylindrical Shells Considering Imperfections and Edge Constraint", *AIAA Journal*, Vol. 7, pp. 912–919, (1968).
- [6] Ganapathi, M., Varadan, T.K., and Jijen, J., "Field-consistent Element Applied to Flutter Analysis of Circular Cylindrical Shells", *Journal of Sound Vibration*, Vol. 171, No. 4, pp. 509–527, (1994).
- [7] Pidaparti, R.M.V., and Yang Henry, T.Y., "Supersonic Flutter Analysis of Composite Plates and Shells", *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 6, pp. 1109–1117, (1993).
- [8] Haddadpour, H., Mahmoudkhani, S., and Navazi, H.M., "Supersonic Flutter Prediction of Functionally Graded Cylindrical Shells", *Journal of Composite Structures* Vol. 83, pp. 391–398, (2008).
- [9] Prakash, T., and Ganapathi, M., "Supersonic Flutter Characteristics of Functionally Graded Flat Panels Including Thermal Effects", *Journal of Composite Structures*, Vol. 72, No. 1, pp. 8–10, (2006).

- [10] Sabri, F., and Lakis, A.A., "Finite Element Method Applied to Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells", *AIAA Journal*, Vol. 48, No. 1, pp. 78-81, (2010).
- [11] Shen, H.S., "Postbuckling of Axially Loaded FGM Hybrid Cylindrical Shells in Thermal Environments", *Composites Science and Technology*, Vol. 65, pp. 1675–1690, (2005).
- [12] Shen, H.S., and Noda, N., "Postbuckling of FGM Cylindrical Shells under Combined Axial and Radial Mechanical Loads in Thermal Environments", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 4641–4662, (2005).
- [13] Shen, H.S., "Thermal Postbuckling Behavior of Functionally Graded Cylindrical Shells with Temperature-dependent Properties", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 1961–1974, (2004).
- [14] Shen, H.S., "Postbuckling Analysis of Pressure-loaded Functionally Graded Cylindrical Shells in Thermal Environments", *Engineering Structures*, Vol. 25, pp. 487–497, (2003).
- [15] Krumhaar, H., "Supersonic Flutter of a Circular Cylindrical Shell of Finite Length in an Axisymmetrical Mode", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 1, No. 1, (1965).
- [16] Touloukian, Y.S., "*Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials*", McMillan, New York, (1967).
- [17] Reddy, J.N., and Chin, C.D., "Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 21, No. 6, (1998).
- [18] Dowell, E.H., "Aeroelasticity of Plates and Shells", [Book], Leyden : Noordhoff International, (1975).
- [19] Krumhaar, H., "The Accuracy of Linear Piston Theory when Applied to Cylindrical Shells", *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 6, pp. 1448–1449, (1963).
- [20] Amabili, M., and Pellicano, F., "Multimode Approach to Nonlinear Supersonic Flutter of Imperfect Circular Cylindrical Shells", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 69, pp. 117–129, (2002).
- [21] Kostas, P., and Soldatos, "A Flugge-type Theory for the Analysis of Anisotropic Laminated Non-circular Cylindrical Shells", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20, Issue 2, pp. 107-120, (1984)
- [22] Baruch, M., Harari, O., and Singer, J., "Influence of in-plane Boundary Conditions on the Stability of Conical Shells under Hydrostatic Pressure", *Israel Journal of Technology*, Vol. 5, No. 1–2, pp. 12–24, (1967).
- [23] Weller, T., Baruch M., and Singer, J., "Influence of In-plane Boundary Conditions on Buckling of Ring-Stiffened Cylindrical Shells", *Scientific Report No. 10*, Department of Aeronautical Engineering Technion, Israel Institute of Technology - TAE Report No. 101, (1970).

- [24] Leissa, A.W., "Vibration of Shells", Ohio State University, National Aeronautics and Space Administration, (1973).
- [25] Baruch, M., Harari, O., and Singer, J., "Low Buckling Loads of Axially Compressed Conical Shells", J. Appl. Mech. Vol. 37, No. 2, pp. 384-392, (1970)

پیوست‌ها

پیوست (الف): ضرایب j_1 تا j_{14} مربوط به نیروها و ممان‌های منتجه

$$\begin{aligned}
 j_1 &= A_{11} + \frac{B_{11}}{R}, j_2 = B_{11} - \frac{D_{11}}{R}, j_3 = B_{66} + \frac{D_{66}}{2R}, j_4 \\
 &= A_{11} - \frac{B_{11}}{R} + \frac{D_{11}}{R^2} \\
 j_5 &= B_{11} - \frac{D_{11}}{R} + \frac{E_{11}}{R^2}, j_6 = A_{66} - \frac{B_{66}}{R} + \frac{D_{66}}{R^2}, \\
 j_7 &= B_{66} - \frac{D_{66}}{2R} + \frac{E_{66}}{2R^2} + \frac{F_{66}}{2R^3}, j_8 = B_{11} + \frac{D_{11}}{R}, j_9 = D_{11} + \frac{E_{11}}{R} \\
 j_{10} &= D_{66} + \frac{E_{66}}{2R}, j_{11} = B_{66} - \frac{D_{66}}{R} + \frac{E_{66}}{R^2} \\
 j_{12} &= D_{66} - \frac{E_{66}}{2R} + \frac{F_{66}}{2R^2} + \frac{H_{66}}{2R^3}, j_{13} = B_{11} - \frac{D_{11}}{R} + \frac{E_{11}}{R^2} \\
 j_{14} &= D_{11} - \frac{E_{11}}{R} + \frac{F_{11}}{R^2}
 \end{aligned}$$

پیوست (ب): عملگرهای دیفرانسیلی معادلات حرکت

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= j_1 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{j_6}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\
 L_{12} &= \left(\frac{A_{12} + j_6}{R} + \frac{B_{12} + 2j_7}{R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} \\
 L_{13} &= \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial s} - j_2 \frac{\partial^3}{\partial s^3} - \frac{B_{12} + 2j_7}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial \theta^2} \\
 L_{21} &= \left(\frac{A_{12} + A_{66}}{R} + \frac{B_{12} + B_{12}}{R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} \\
 L_{22} &= \left(\frac{j_5 + j_{13}}{R^3} + \frac{j_{14}}{R^4} + \frac{j_4}{R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left(A_{66} + \frac{2j_3 + B_{66}}{R} + \frac{2j_{10}}{R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \\
 L_{23} &= - \left(\frac{j_5}{R^3} + \frac{j_{14}}{R^4} \right) \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \left(\frac{j_4}{R^2} + \frac{j_{13}}{R^3} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \\
 &\quad - \left(\frac{2j_3}{R} + \frac{B_{12}}{R} + \frac{D_{12}}{R^2} + \frac{2j_{10}}{R^2} \right) \frac{\partial^3}{\partial s^2 \partial \theta} \\
 L_{31} &= - \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial s} + \left(\frac{B_{66} + j_{11}}{R^2} + \frac{B_{12}}{R^2} \right) \frac{\partial^3}{\partial s \partial \theta^2} + j_8 \frac{\partial^3}{\partial s^3} \\
 L_{32} &= \left(\frac{B_{12} + B_{66} + j_{11}}{R} + \frac{D_{12} + 2j_{10} + 2j_{12}}{R^2} \right) \frac{\partial^3}{\partial s^2 \partial \theta} + \left(\frac{j_{14}}{R^4} + \frac{j_{13}}{R^3} \right) \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \\
 &\quad + \left(\frac{-j_4}{R^2} - \frac{j_5}{R^3} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \\
 L_{33} &= \frac{j_5 + j_{13}}{R^3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2B_{12}}{R} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left(\frac{2D_{12} + 2j_{10} + 2j_{12}}{R^2} \right) \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial \theta^2} - j_9 \frac{\partial^4}{\partial s^4} \\
 &\quad - \frac{j_{14}}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} - \frac{j_4}{R^2} - \bar{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

$$\bar{\rho} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz$$

$$\begin{aligned}
 \bar{L} &= N_{ss}^0 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{N_{\theta\theta}^0}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\
 &+ \frac{-\gamma_a P_\infty M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \left[\frac{\partial}{\partial s} + \frac{(M^2 - 2)}{U_\infty (M^2 - 1)} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{2R\sqrt{M^2 - 1}} \right]
 \end{aligned}$$

پیوست (پ): اثبات رابطه‌ی (۴۵)

طبق رابطه‌ی (۴۲) داریم:

$$(p^2 Q_1 + p Q_2 + Q_3) \{C\} = 0$$

بردار C بصورت زیر نامگذاری شود:

$$\{C\} = X$$

رابطه‌ای را بصورت زیر فرض می‌کنیم:

$$Y = pX$$

سپس رابطه‌ی (۴۵) بصورت زیر ساده می‌شود:

$$Q_1 pY + Q_2 Y + Q_3 X = 0$$

$$\Rightarrow pY = -Q_1^{-1}(Q_2 Y + Q_3 X)$$

بنابراین بصورت ضرب ماتریسی می‌توان رابطه‌ی زیر را برقرار دانست:

$$\begin{bmatrix} pX \\ pY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -Q_1^{-1}Q_3 & -Q_1^{-1}Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -Q_1^{-1}Q_3 & -Q_1^{-1}Q_2 \end{bmatrix}$$

فهرست نمادهای انگلیسی

- a_{∞} : سرعت صوت (متر بر ثانیه)
- $e_s, e_{s\theta}, e_{\theta}$: کرنش‌های کلی
- E : مدول یانگ (نیوتن بر متر مربع)
- h : ضخامت پوسته استوانه‌ای (متر)
- K_c, K_m : ضریب انتقال حرارت هدایتی فلز و سرامیک (بر کلوین)
- L : طول استوانه (متر)
- m : عدد موج طولی
- M : عدد ماخ
- $M_{\theta s}, M_{s\theta}, M_{\theta\theta}, M_{ss}$: ممان‌های منتجه بر واحد طول
- $M_{\theta s}^0, M_{s\theta}^0, M_{\theta\theta}^0, M_{ss}^0$: ممان‌های منتجه اولیه بر واحد طول
- $M_{\theta\theta}^{th}, M_{ss}^{th}$: ممان‌های منتجه حرارتی بر واحد طول
- n : عدد موج محیطی
- N : توان کسر حجمی ماده هدفمند
- $N_{\theta s}, N_{s\theta}, N_{\theta\theta}, N_{ss}$: نیروهای منتجه بر واحد طول
- $N_{\theta s}^0, N_{s\theta}^0, N_{\theta\theta}^0, N_{ss}^0$: نیروهای منتجه اولیه بر واحد طول
- $N_{\theta\theta}^{th}, N_{ss}^{th}$: نیروهای منتجه حرارتی بر واحد طول
- p : فرکانس (هرتز)
- P_{aero} : فشار آیرودینامیک (پاسکال)
- $P_{efficient}$: خاصیت موثر ماده هدفمند
- p_m : فشار داخلی پوسته (پاسکال)
- P_c, P_m : خاصیت موثر فلز و سرامیک
- P_{∞} : فشار استاتیکی جریان آزاد (پاسکال)
- Q_{ij} : مولفه‌های ماتریس ساختاری
- R : شعاع استوانه (متر)
- S : محور مختصات طولی استوانه
- T : توزیع دما در راستای ضخامت پوسته
- T_c, T_m : دمای سطح داخلی و خارجی پوسته (کلوین)
- u : جابجایی طولی پوسته (متر)
- U_{∞} : سرعت جریان آزاد (متر بر ثانیه)
- v : جابجایی محیطی پوسته (متر)
- V_c, V_m : کسر حجمی فلز و سرامیک (متر مکعب)

W : جابجایی شعاعی پوسته (متر)

Z : محور مختصات شعاعی استوانه

نمادهای یونانی

α : ضریب انبساط حرارتی

γ_a : نسبت گرمای ویژه مخصوص هوا

$\gamma_{s\theta}, \varepsilon_{\theta}, \varepsilon_s$: کرنش‌های محوری، محیطی، برشی پوسته استوانه‌ای

$\gamma_{s\theta}^{NL}, \varepsilon_{\theta}^{NL}, \varepsilon_s^{NL}$: کرنش‌های غیرخطی محوری، محیطی، برشی

θ : محور مختصات محیطی استوانه

K_{θ}, K_s : کرنش‌های خمشی (انحناء) پوسته استوانه‌ای

$K_{s\theta}$: کرنش چرخشی (انحنای عمودی)

λ_i : ریشه‌های معادله‌ی مشخصه

ν : ضریب پواسون

ρ : چگالی پوسته

$\bar{\rho}$: چگالی منتهی به پوسته بر واحد طول

$\sigma_{s\theta}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{ss}$: تنش‌های عمودی و برشی استوانه

Abstract

Prediction of the flutter phenomenon of a functionally graded cylindrical shell with simply supported end conditions under aerodynamic and thermal loadings with considering the internal pressure of the shell is investigated. The volume fraction of constituent materials follows a simple power law in the thickness direction. The aerodynamic load is defined by linearized first-order potential (piston) theory incorporating a correction term. The strain-displacement relations and the equations of motion are written in accordance with Flugge's shell theory in which initial stresses are taken from solution of equilibrium equations. The Galerkin method is used for solving the equations of motion. The effects of volume fraction distributions, temperature and pressure variations on the flutter boundary and time response of the system are fully discussed.