

## تحلیل فرآیند هیدروفرمینگ لوله در قالب با

### مقطع مربع یا مثلث

این مقاله به ارائه یک مدل ریاضی برای تحلیل فرآیند هیدروفرمینگ لوله طویل با مقطع گرد در قالب با مقطع به شکل مربع یا مثلث می‌پردازد. به دلیل آنکه لوله مورد نظر طویل می‌باشد، تحلیل فرآیند در حالت کرنش صفحه‌ای انجام شده است. در این مدل ابتدا رابطه تغییرات ضخامت برای حالت بدون اصطکاک و همچنین اصطکاک چسبنده به دست آمده و با استفاده از این دو رابطه، مدلی برای توزیع ضخامت در حالت وجود اصطکاک لغزنده ارائه شده است. سپس با استفاده از روابط تنش و کرنش و با برقراری شرط تعادل در ناحیه تماس لوله تغییر شکل یافته با دیواره قالب، توزیع ضخامت در جداره لوله و فشار شکل دهی لازم در هر مرحله پیشروی فرآیند به دست آمده‌اند. مقایسه نتایج تحلیل حاضر با نتایج سایر محققان انطباق بسیار مناسبی را نشان می‌دهد.

### حشمت اله حقیقت<sup>۱</sup>

استادیار

### امیر جانقربان<sup>۲</sup>

دانشجوی کارشناسی ارشد

واژه‌های راهنما: هیدرو فرمینگ لوله طویل، توزیع ضخامت، فشار شکل دهی

### ۱- مقدمه

هیدروفرمینگ یکی از فرآیندهای شکل‌دهی جدید است که اساس کار آن بر شکل‌دهی توسط فشار سیال می‌باشد. امروزه فرآیند شکل‌دهی فلزات به روش هیدروفرمینگ به دلیل مزایایی که نسبت به دیگر روش‌های شکل‌دهی دارد به صورت گسترده‌ای در صنایع مختلف مانند خودروسازی، صنایع هوافضا، تولید لوازم خانگی و ... مورد استفاده قرار گرفته است. قابلیت تولید قطعات با اشکال پیچیده، نسبت استحکام به وزن بالاتر و تولید قطعات با کیفیت سطح بالا از جمله این مزایا می‌باشند. فرآیند هیدروفرمینگ لوله، فرآیندی است که طی آن یک لوله جدار نازک در اثر اعمال فشار داخلی به شکل از پیش تعیین شده قالب در می‌آید. فشار شکل‌دهی بستگی به پارامترهایی مانند هندسه لوله و قالب، ضریب اصطکاک بین لوله و قالب و همچنین جنس لوله دارد. ارائه روش‌های ساده اما دقیق و معتبر می‌تواند برای پیش‌بینی ارتباط بین این پارامترها با فشار شکل‌دهی و نحوه تغییرات ضخامت بسیار موثر باشد.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی کرمانشاه  
hhaghighat@razi.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی کرمانشاه  
janghorban.a@gmail.com

تاکنون تحقیقات مختلفی با استفاده از مدل‌های ریاضی و همچنین روش‌های اجزا محدود بر روی هیدروفرمینگ لوله انجام گرفته است. در سال (۱۹۹۹) اصنافی [۱] به بررسی محدودیت‌های موجود در فرآیند هیدروفرمینگ و نحوه تاثیر مسیر بارگذاری بر روی این فرآیند پرداخت. در سال ۲۰۰۰ کریدلی و همکاران [۲] با استفاده از شبیه سازی اجزا محدود به بررسی تاثیر ضریب کار سختی، ضریب اصطکاک و شعاع گوشه‌های قالب بر روی نحوه توزیع ضخامت پرداختند. در سال (۲۰۰۱) میلر و همکاران [۳و۴] طی دو کار متوالی با ارائه یک مدل تحلیلی توانستند تاثیرات کشش، فشار و مسیر بارگذاری را بر روی کیفیت لوله تغییر شکل یافته مورد بررسی قرار دهند. مطابقت بالای نتایج حاصل از این تحقیقات با نتایج آزمایشگاهی بدین معنا بود که تحلیل دو بعدی این فرآیند می‌تواند ابزار دقیقی برای مطالعه پارامتریک فرآیند هیدروفرمینگ باشد. بررسی دو بعدی هیدروفرمینگ لوله در یک قالب مربعی در سال (۲۰۰۲) توسط هوانگ و آلتان [۵] با استفاده از شبیه سازی اجزا محدود انجام گرفت. اندازه گیری آزمایشگاهی ضریب اصطکاک در طی هیدروفرمینگ نیز در سال (۲۰۰۲) توسط وولرتسن و پلانک [۶] انجام گرفت. تقریب آنها بر اساس مرتبط بودن تغییرات ضخامت در طول محور لوله با ضریب اصطکاک برای یک لوله تحت فشار بود. در سال (۲۰۰۳) کریدلی و همکاران [۷] فرآیند هیدروفرمینگ در قالب مربعی را با نرم افزار تجاری آباکوس شبیه سازی نمودند. آن‌ها بر روی تاثیرات ضریب کار سختی، ضخامت اولیه لوله، و زاویه اولیه گوشه‌های قالب، بر نحوه پر شدن گوشه‌ها و توزیع ضخامت لوله تغییر شکل یافته کار کردند. راما و همکاران [۸] با استفاده از تئوری شبیه سازی غشایی به تحلیل کرنش صفحه‌ای هیدروفرمینگ لوله با شکل قالب‌های متقارن متعددی پرداختند و برای اعتبار دهی به حل تحلیلی خود فرآیند را با روش المان محدود شبیه سازی و نتایج را مورد مقایسه قرار دادند. مدلی که آنها برای بیان رفتار پلاستیک ماده در نظر گرفتند مدل توانی بود. هوانگ و چن [۹و۱۰] به بررسی نحوه شکل‌گیری لوله در یک قالب مربعی توسط تحلیل‌های ریاضی، با در نظر گرفتن اصطکاک کاملاً چسبنده و لغزنده پرداختند. در سال (۲۰۰۶) اسمیت و همکاران [۱۱] و همچنین اسمیت و سان [۱۲] برای تحلیل هیدروفرمینگ کرنش صفحه‌ای یک سری روابط ارائه دادند. گسترش مطالعات بر روی چگونگی پر شدن گوشه‌ها در یک قالب مربعی توسط لویی و همکاران [۱۳] توسط تحلیل‌های مکانیکی و شبیه‌سازی عددی انجام گرفت. اوربان و هیو [۱۴] مدل ریاضی برای مشخص کردن نحوه تغییرات تنش و کرنش در راستای ضخامت جداره لوله در هنگام منبسط شدن لوله در قالب مربعی ارائه دادند. آن‌ها همچنین تاثیر اصطکاک هنگام پر شدن گوشه‌ها در سه حالت لغزنده<sup>۱</sup>، کاملاً چسبنده<sup>۲</sup> و همچنین بدون اصطکاک<sup>۳</sup> را مورد بررسی قرار دادند. گوان و پور بقراط [۱۵] با استفاده از سری فوریه توانستند مدلی تعمیم یافته برای تحلیل فرآیند هیدروفرمینگ لوله در حالت کرنش صفحه‌ای ارائه دهند. آنها در تحلیل خود تاثیر کارسختی و همچنین ناهمسانگردی را نیز لحاظ کردند، ضمناً برای انجام این فرآیند از تغذیه محوری نیز کمک گرفته شده بود. در سال (۲۰۰۸) یانگ و انجیل [۱۶] نیز بر اساس تئوری تغییر شکل، یک مدل تحلیلی برای فرآیند کرنش صفحه‌ای هیدروفرمینگ، برای قالب‌هایی به شکل چند

---

<sup>1</sup> Sliding

<sup>2</sup> Sticking

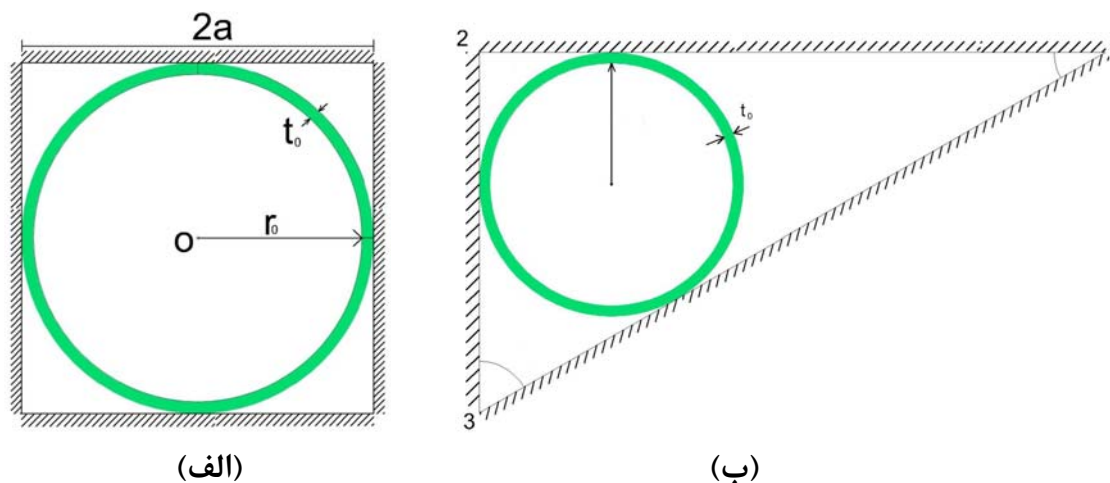
<sup>3</sup> Frictionless

ضلعی‌های غیرمنتظم ارائه دادند. در سال (۲۰۰۹) ژیانگ و همکاران [۱۷] به تحلیل فرآیند هیدروفرمینگ لوله با قالب مربعی پرداختند. آنها در تحلیل خود به بررسی نحوه تغییر ضخامت در جداره لوله و تاثیر ضریب اصطکاک و همچنین ضریب کار سختی پرداختند. کورکولیس و کاریاکیدس [۱۸] به بررسی آزمایشگاهی و اجزاء محدود هیدروفرمینگ یک لوله آلومینیومی پرداختند. هدف اصلی آنها در این تحلیل بررسی تاثیرات ناهمسانگردی برچگونگی انجام فرآیند بود.

همان‌گونه که ذکر شد برای تحلیل فرآیند هیدروفرمینگ لوله در حالت کرنش صفحه ای تا کنون کارهای متعددی انجام شده و هر کدام با استفاده از روشی خاص این فرآیند را تحلیل نموده‌اند. روش‌هایی که تا کنون برای تحلیل فرآیند هیدروفرمینگ لوله کرنش صفحه‌ای مورد استفاده قرار گرفته عموماً روش‌های پیچیده می‌باشند. در این مقاله با استفاده از یک مدل ریاضی به تحلیل فرآیند هیدرو فرمینگ لوله کرنش صفحه ای در قالب‌های با شکل مقطع مربع و یا مثلثی پرداخته می‌شود. مدل بر اساس این واقعیت بنا نهاده شده که توزیع ضخامت در حالت اصطکاک لغزنده بین منحنی توزیع ضخامت در حالت بدون اصطکاک و اصطکاک چسبنده قرار دارد. علی‌رغم سادگی مدل تحلیلی ارائه شده، نتایج آن انطباق بسیار بالایی با نتایج سایر محققان دارد.

## ۲- تحلیل فرآیند

شکل (۱) فرآیند هیدروفرمینگ لوله کرنش صفحه ای در قالب با مقطع‌های مربعی و مثلث شکل را نشان می‌دهد. به دلیل آنکه طول لوله زیاد می‌باشد فرآیند در حالت کرنش صفحه‌ای تحلیل شده و فقط مقطع لوله

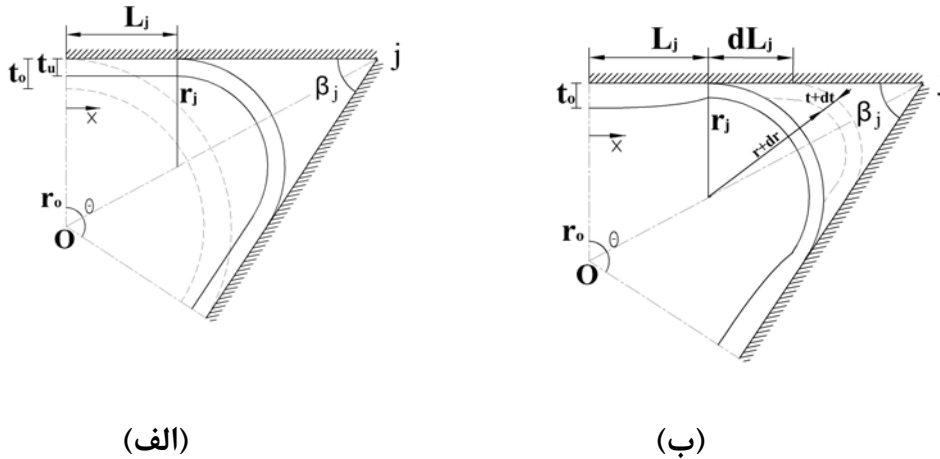


شکل ۱- مقطع لوله و قالب (الف) مربع و (ب) مثلث

و قالب نشان داده شده است. همانطور که در این شکل نشان داده شده سطح تماس لوله با هر ضلع قالب در ابتدا یک نقطه بوده که با اعمال فشار داخلی به لوله توسط سیال، لوله تغییر شکل الاستیک داده و سپس وارد ناحیه پلاستیک می‌شود. به مرور که فشار شکل دهی افزایش می‌یابد لوله منبسط شده، طول تماس بین لوله و قالب افزایش و نهایتاً لوله به شکل قالب در می‌آید. ضخامت لوله در ابتدا  $t_0$  و شعاع آن  $r_0$  بوده که با افزایش فشار، ضخامت و شعاع لوله تغییر می‌یابند.

## ۱-۲- فرضیات توزیع ضخامت

بخشی از مقطع لوله و قالب مقابل یک گوشه دلخواه قالب در شکل (۲) نشان داده شده است. همانطور که در این شکل نشان داده شده در لوله تغییر شکل یافته دو ناحیه وجود دارد، ناحیه تماس خطی بین لوله و قالب و ناحیه انبساط آزاد که به شکل کمانی از دایره بوده و با لوله در تماس نمی‌باشد. اگر جداره داخلی قالب



شکل ۲- تغییر شکل لوله در گوشه قالب در حالت الف- بدون اصطکاک و ب- اصطکاک چسبنده

بدون اصطکاک باشد، ضخامت ناحیه تماس یکنواخت و برابر ضخامت ناحیه کمان خواهد بود، به عبارتی در حالت بدون اصطکاک ضخامت در سرتاسر جداره لوله تغییر شکل یافته، یکنواخت خواهد بود (شکل ۲-الف)؛ اما چنانچه بین لوله و قالب اصطکاک چسبنده وجود داشته باشد، ضخامت در جداره لوله متغیر خواهد بود (شکل ۲-ب). به طوریکه در ناحیه تماس خطی، از نقطه تماس اولیه تا انتهای طول تماس (ابتدای ناحیه کمان) ضخامت کاهش یافته تا در انتهای ناحیه تماس به کمترین مقدار خود برسد. این مقدار در ناحیه کمانی شکل ثابت باقی خواهد ماند. بنابراین میزان ضریب اصطکاک نقش بسیار مهمی را در نحوه تغییرات ضخامت لوله تغییر شکل یافته ایفا می‌کند. در این تحلیل سه حالت متفاوت برای اصطکاک بین لوله و قالب در نظر گرفته می‌شود: بدون اصطکاک، اصطکاک چسبنده و حالت اصطکاک لغزنده.

### • توزیع ضخامت در حالت بدون اصطکاک

هنگامی که اصطکاک وجود نداشته باشد، همانطور که در شکل ۲-الف نشان داده شده، ضخامت در محیط لوله تغییر شکل یافته یکنواخت است. در این حالت با استفاده از اصل تراکم ناپذیری، حجم لوله در طول فرآیند برابر حجم آن در حالت اولیه قرار می‌گیرد. در رابطه (۱) حرف  $j$  نشان دهنده شماره گوشه قالب می‌باشد، به عبارتی در یک  $n$  ضلعی تعداد گوشه‌ها  $j=1,2,\dots,n$  خواهد بود. زاویه هر کدام از گوشه‌ها نیز با  $\beta$  نشان داده می‌شود و  $\theta$  زاویه کمان روبروی هر گوشه را نشان می‌دهد. با توجه به اصل تراکم ناپذیری می‌توان نوشت:

$$t_u [2(\sum_{j=1}^n L_j) + \sum_{j=1}^n r_j \theta_j] = 2\pi r_0 t_0 \quad (1)$$

که  $\theta_i = \pi - \beta_i$  و  $L_j$  طول ناحیه تماس، و  $t_u$  ضخامت لوله تغییر شکل یافته می‌باشد. لازم به ذکر است برای تحلیل قالب مربعی به دلیل تقارن، می‌توان تنها یکی از گوشه‌ها را تحلیل و نتایج را به کلیه گوشه‌ها تعمیم داد، اما برای قالب مثلثی باید هر کدام از گوشه‌ها به طور جداگانه تحلیل شوند. حال با توجه به اینکه هندسه مورد تحلیل در این مقاله قالب مربعی و مثلثی می‌باشد، با استفاده از رابطه (۱) برای قالب مربعی به دلیل تقارن ( $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L$ ) می‌توان نوشت:

$$t_u(L) = \frac{t_o}{\frac{4}{\pi} - \frac{L - r_o}{r_o} (\frac{4}{\pi} - 1)} \quad (2)$$

و مقدار ضخامت یکنواخت برای قالب با مقطع مثلثی:

$$t_u(L) = \frac{2\pi r_0 t_0}{2\sum_{j=1}^3 L_j + \sum_{j=1}^3 r_j \theta_j + 2\pi r_0} \quad (3)$$

#### • توزیع ضخامت در حالت اصطکاک چسبنده

هنگامی که ضریب اصطکاک خیلی بزرگ باشد با افزایش فشار و منبسط شدن لوله، جداره لوله به محض تماس با قالب به آن می‌چسبد و هیچ لغزشی بین لوله و قالب رخ نمی‌دهد. در این حالت پس از تماس لوله با قالب، ضخامت هر نقطه از لوله ثابت و همچنین نقطه تماس اولیه لوله با قالب نیز تا انتها با همان ضخامت اولیه  $t_o$  باقی خواهد ماند. در این حالت نیز با استفاده از اصل تراکم ناپذیری و با توجه به شکل ۲-ب می‌توان نوشت:

$$[(r_j + dr_j)(\pi - \beta_j) + 2dl_j](t + dt) = r_0 t_0 (\pi - \beta_j) \quad (4)$$

از طرف دیگر با فرض مماس بودن کمان‌ها بر ضلع مثلث داریم:

$$r_0 - r_j = L_j \tan(\beta_j / 2) \Rightarrow dl_j = \frac{-dr_j}{\tan(\beta_j / 2)} \quad (5)$$

با صرف نظر از مقادیر کوچک و ساده سازی، معادله به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{dt}{t} = \left( \frac{2}{(\pi - \beta_j) \tan(\beta_j / 2)} - 1 \right) \frac{dr_j}{r_j} \quad (6)$$

حال با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی و اعمال شرط مرزی که در  $t = t_0$  داریم  $r = r_0$  و همچنین انجام همین روند برای دو گوشه دیگر، رابطه توزیع ضخامت برای گوشه‌های مثلث به صورت رابطه زیر خواهد بود:

$$t_s = t_0 \left( \frac{r_j}{r_0} \right)^{\left[ \frac{2}{(\pi - \beta_j) \tan(\beta_j / 2)} - 1 \right]} \quad (7)$$

که :

$$t_s(x) = t_0 \left( \frac{r_0 - x \tan \frac{\beta_j}{2}}{r_0} \right)^{\left[ \frac{2}{(\pi - \beta_j) \tan(\beta_j/2)} - 1 \right]} \quad (8)$$

بنابراین محاسبه ضخامت در انتهای ناحیه خطی در حالت اصطکاک چسبنده برای مقطع مربعی با رابطه زیر انجام می‌شود:

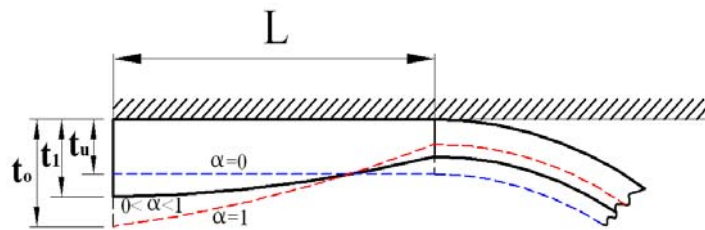
$$t_s = t_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{[4/\pi - 1]} \quad (9)$$

و ضخامت ناحیه تماس در فاصله X از نقطه اولیه تماس از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$t_s(x) = t_0 \left( \frac{r_0 - x}{r_0} \right)^{\frac{4}{\pi} - 1} \quad (10)$$

در حالت وجود اصطکاک لغزنده، مدل توزیع ضخامت بر اساس این واقعیت بنا نهاده شده که توزیع ضخامت در این حالت بین منحنی توزیع ضخامت در حالت بدون اصطکاک و اصطکاک چسبنده قرار دارد. این واقعیت در شکل (۳) نشان داده شده است. می‌توان فرض نمود که مقدار ضخامت در هر فاصله X از نقطه اولیه تماس لوله و قالب از رابطه زیر تبعیت می‌نماید:

$$t(x) = t_u(L) + \alpha [t_s(x) - t_u(L)] \quad (11)$$



شکل ۳- تغییرات ضخامت ناحیه تماس برای حالت بدون اصطکاک ( $\alpha=0$ )، اصطکاک چسبنده ( $\alpha=1$ ) و اصطکاک لغزنده ( $0 < \alpha < 1$ )

وقتی  $\alpha=0$  باشد حالت بدون اصطکاک، وقتی  $\alpha=1$  باشد حالت چسبنده و هنگامی که  $0 < \alpha < 1$  باشد اصطکاک لغزنده خواهد بود. مقدار مناسب پارامتر  $\alpha$  از شرط تعادل ناحیه خطی تماس تعیین می‌شود.

## ۲-۲- تنش و کرنش

تنش موثر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2} \quad (12)$$

از آنجایی که فرآیند کرنش صفحه‌ای،  $\varepsilon_z = 0$  می‌باشد:

$$\varepsilon_t + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta = 0 \Rightarrow \varepsilon_t = -\varepsilon_\theta \quad (13)$$

همچنین با استفاده از قانون جریان:

$$\frac{\varepsilon_t}{\sigma'_t} = \frac{\varepsilon_\theta}{\sigma'_\theta} = \frac{\varepsilon_z}{\sigma'_z} = d\lambda \quad (14)$$

با توجه به  $\varepsilon_z = 0$  و طبق تعریف تنش متوسط و تنش کاهش یافته از (۱۴)، (۱۵) به دست می‌آید:

$$\sigma_t - \sigma_m = \sigma_m - \sigma_\theta \quad (15)$$

با قرار دادن مقدار  $\sigma_m$  در رابطه (۱۵):

$$\sigma_t + \sigma_\theta = 2/3(\sigma_t + \sigma_\theta + \sigma_z) \quad (16)$$

در نتیجه رابطه بین  $\sigma_z$  با  $\sigma_t$  و  $\sigma_\theta$  مطابق رابطه (۱۷) حاصل می‌شود:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_\theta + \sigma_t}{2} \quad (17)$$

همچنین با توجه به فشار داخلی مخزن:

$$\sigma_t = -p \quad (18)$$

با جایگذاری روابط (۱۷) و (۱۸) در رابطه (۱۲)، تنش موثر به صورت رابطه زیر در می‌آید:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_\theta + p) \quad (19)$$

کرنش موثر نیز با استفاده از رابطه زیر ارائه می‌شود:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_z - \varepsilon_t)^2 + (\varepsilon_t - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2} \quad (20)$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۲۰)، کرنش معادل از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_t \quad (21)$$

حال برای یافتن ارتباط بین تنش موثر و کرنش موثر از قانون توانی استفاده می‌شود:

$$\bar{\sigma} = K(\bar{\varepsilon})^n \quad (22)$$

برای محاسبه کرنش نیز در هر مرحله از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$(\varepsilon_t)_i = \ln \frac{t_i}{t_0}, (\varepsilon_\theta)_i = \ln \frac{t_0}{t_i} \quad (23)$$

با جایگذاری روابط (۱۹) و (۲۱) در رابطه (۲۲) تنش محیطی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} K \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_t \right)^n - p \quad (24)$$

از آنجایی که  $\frac{t}{r} < 10$  می‌باشد، می‌توان از فرض جدار نازک بودن لوله استفاده کرد. در هر میزان طول تماس  $L$  برای به دست آوردن فشار شکل‌دهی  $P$ ، لوله بصورت یک مخزن استوانه‌ای جدار نازک در نظر گرفته می‌شود. بنابراین در ناحیه کمان ارتباط بین فشار شکل‌دهی و تنش محیطی از رابطه زیر به دست آورده می‌شود:

$$P = \frac{\sigma_\theta t}{r} \quad (25)$$

و با ترکیب روابط (۲۴) و (۲۵) رابطه نهایی زیر برای محاسبه فشار حاصل می‌شود:

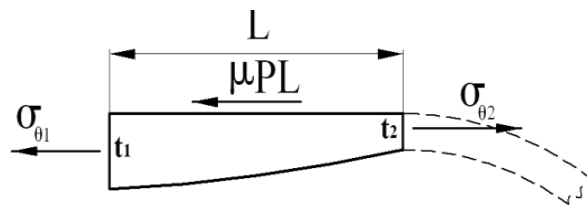
$$p = \frac{2k}{\sqrt{3}} \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_r\right)^n}{\left(1 + \frac{r}{t}\right)} \quad (26)$$

که در این رابطه  $\Gamma$  شعاع کمان،  $t_2$  ضخامت کمان و  $\sigma_\theta$  مولفه تنش در راستای محیطی می‌باشد. بنابراین در هر طول تماس  $L$  و بازای مقادیر مختلف فرض شده برای  $\alpha$ ، فشار شکل دهی متناظر با آن از رابطه (۲۶) به دست می‌آید.

### ۲-۳- تعادل ناحیه خطی

همانگونه که در بخش قبل نیز توضیح داده شد مقدار  $\alpha$  از شرط برقراری تعادل ناحیه خطی لوله در تماس با قالب استفاده می‌شود. با توجه به شکل (۴) برای ناحیه تماس به طول  $L$ ، تنش برشی اصطکاکی برابر  $\mu P$  می‌باشد. از نوشتن رابطه تعادل در جهت  $x$  داریم:

$$\sum F(x) = \sigma_{\theta 2} t_2 - \sigma_{\theta 1} t_1 - \mu PL \quad (27)$$



شکل ۴- نمودار آزاد ناحیه تماس لوله با قالب

برای تشخیص مقدار مناسب  $\alpha$  باید رابطه تعادل بالا برای ناحیه خطی ارضا شود، در ابتدا و انتهای ناحیه تماس داریم:

$$\varepsilon_{r1} = \ln \frac{t_1}{t_0}, \quad \varepsilon_{r2} = \ln \frac{t_2}{t_0} \quad (28)$$

به همین ترتیب تنش محیطی در  $(\sigma_{\theta 1})x = 0$  و در  $x = L$  ( $\sigma_{\theta 2}$ ) که در شکل ۴ نشان داده شده است را می‌توان به کمک رابطه (۲۹) به دست آورد.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta 1} &= \frac{2}{\sqrt{3}} K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{r1}\right)^n - p \\ \sigma_{\theta 2} &= \frac{2}{\sqrt{3}} K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{r2}\right)^n - p \end{aligned} \quad (29)$$

حال برای طول مشخص  $L$  و با توجه به مقدار در نظر گرفته شده برای  $\alpha$ ، مقادیر حاصل از رابطه (۲۹) در معادله تعادل (۲۷) جایگذاری می‌شود. یکی از دو حالت زیر ممکن است پیش آید:

$$\sigma_{\theta 2} t_2 - \sigma_{\theta 1} t_1 - \mu PL = 0 \quad (30\text{-الف})$$

$$\sigma_{\theta 2} t_2 - \sigma_{\theta 1} t_1 - \mu PL < 0 \quad (30\text{-ب})$$



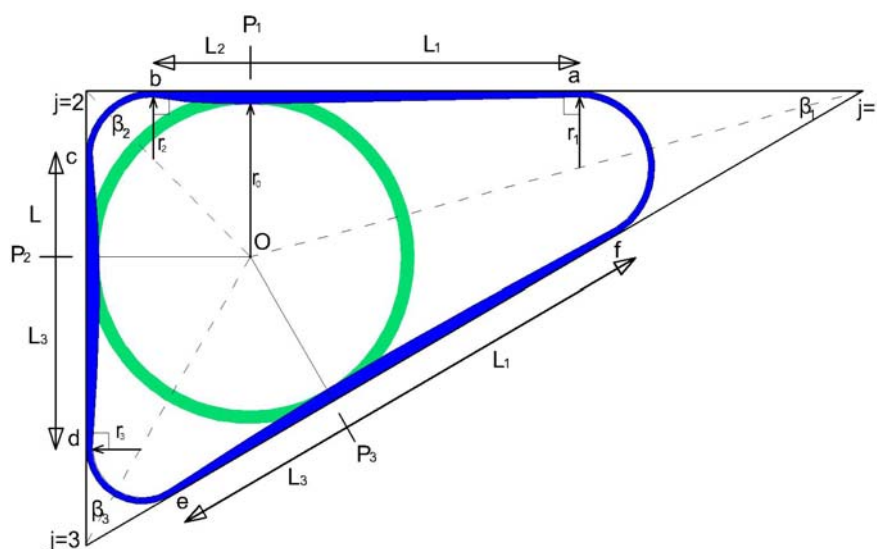
اگر رابطه (۳۰-الف) برقرار شود بدین معناست که مقدار  $\alpha$  مقدار درستی می‌باشد، بنابراین فشار و همچنین ضخامت متناظر به دست آمده از این مقدار  $\alpha$  تایید و به‌عنوان فشار شکل دهی و ضخامت در فاصله  $L$  می‌باشند.

اما اگر (۳۰-ب) برقرار شود بدین معناست که مقدار  $\alpha$  صحیح نمی‌باشد، بنابراین مقدار  $\alpha$  به میزان  $d\alpha$  افزایش داده می‌شود و مجدداً مقادیر  $t_1$ ،  $t_2$ ،  $\varepsilon_{t1}$ ،  $\varepsilon_{t2}$  و همچنین  $\sigma_{\theta1}$  و  $\sigma_{\theta2}$  به ترتیب با استفاده از روابط (۱۱) و (۲۸) و (۲۹) به دست آورده شده و دوباره رابطه (۳۰-الف) بررسی می‌شود که آیا برقرار است یا خیر و این روند افزایش مقدار  $\alpha$  تا جایی ادامه داده می‌شود که این تساوی برقرار شود.

بنابراین برای طول تماس‌های مختلف باید این روند را طی کرده و با قرار دادن مقادیر مختلف  $\alpha$  و چک کردن رابطه تعادل (۲۷)، فشار شکل‌دهی و نحوه توزیع ضخامت در کل فرآیند به دست می‌آید. بدین ترتیب همانطور که در قسمت ۲ ذکر شد تحلیل فرآیند در قالب مربعی به پایان می‌رسد.

## ۲-۴- تحلیل برای قالب با مقطع مثلثی

شکل (۵) نمای مقطع لوله درون قالب را قبل از شروع فرآیند و حین فرآیند نشان می‌دهد. طبق روابطی که تاکنون ذکر شد تحلیل یکی از گوشه‌های مثلث به انجام می‌رسد. اما به منظور یافتن نحوه توزیع ضخامت و همچنین ارتباط فشار شکل‌دهی با طول تماس ایجاد شده در گوشه‌های ۲ و ۳، از روابطی که ذکر خواهد شد استفاده می‌شود.

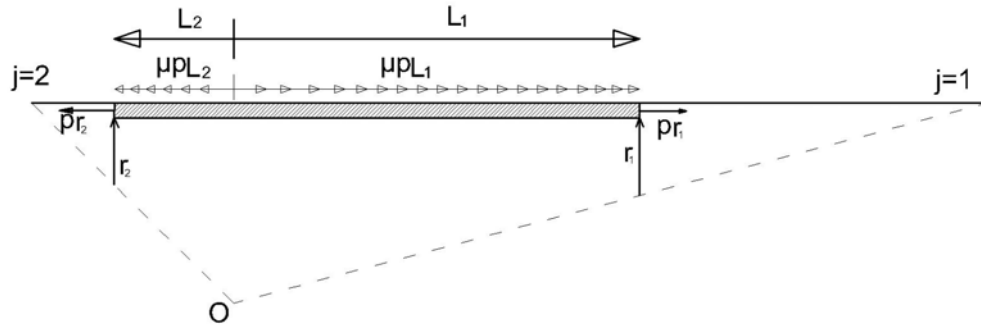


شکل ۵- نمایش نقاط مختلف تحلیل روی لوله در داخل قالب مثلثی

### ۲-۴-۱- طول ناحیه تماس $L_2, L_3$ بر حسب $L_1$

ابتدا با استفاده از شکل ۶ رابطه تعادل در ناحیه خطی مشترک گوشه ۱ و ۲ نوشته می‌شود:

$$pr_1 - \mu p L_1 = pr_2 - \mu p L_2 \quad (31)$$



شکل ۶- نیروهای وارد بر لوله در ناحیه تماس روی ضلع بالایی مثلث

از طرف دیگر با توجه به مماس بودن کمان ها بر سطح قالب، روی هر نیمساز می توان رابطه زیر را نوشت:

$$\begin{cases} r_1 = r_0 - L_1 \tan(\beta_1 / 2) \\ r_2 = r_0 - L_2 \tan(\beta_2 / 2) \end{cases} \quad (32)$$

بنابراین با جایگذاری (۳۲) در (۳۱) رابطه بین  $L_1$  و  $L_2$  طبق رابطه زیر به دست می آید:

$$L_2 = \frac{L_1 \tan(\beta_1 / 2) + \mu L_1}{\tan(\beta_2 / 2) + \mu} \quad (33)$$

به همین ترتیب در ناحیه خطی مشترک گوشه ۳ و ۱ رابطه تعادل نوشته می شود:

$$pr_1 - \mu p L_1 = pr_3 - \mu p L_3 \quad (34)$$

مجددا در ناحیه خطی بین گوشه های ۳ و ۱:

$$r_3 = r_0 - L_3 \tan(\beta_3 / 2) \quad (35)$$

با جای گذاری (۳۵) در (۳۴) رابطه زیر حاصل می شود:

$$L_3 = \frac{L_1 \tan(\beta_1 / 2) + \mu L_1}{\tan(\beta_3 / 2) + \mu} \quad (36)$$

در حالت بدون اصطکاک  $\mu=0$  و مقدار  $r_1 = r_2 = r_3 = r$  برابر است با:

$$r_j = r_0 - L_j \tan \frac{\beta_j}{2} \quad (37)$$

## ۲-۴-۲- رابطه توزیع ضخامت در گوشه های ۳ و ۲

اگر نقاط انتهایی ناحیه تماس لوله با قالب طبق شکل (۵) با حروف a, b, c, d, e, f, نشان داده شوند آنگاه در هر مرحله از تماس لوله به قالب که با  $\bar{i}$  مشخص می شود، در هر گوشه ضخامت دو انتهای ناحیه کمان طبق رابطه (۳۸) برابر در نظر گرفته می شود. ضمناً  $P_1, P_2, P_3$  نقاط تماس اولیه لوله با قالب می باشند.

$$t_a = t_f, t_b = t_c, t_d = t_e \quad (38)$$

برای به دست آوردن توزیع ضخامت ناحیه تماس در گوشه های ۳ و ۲ از رابطه (۱۱) استفاده می شود. با داشتن مقدار  $t_u$  و  $t_s$  و البته مقدار  $\alpha$  مربوط به هر ناحیه تماس، می توان نحوه تغییرات ضخامت ناحیه تماس مربوطه را به دست آورد. مقادیر مربوط به  $t_s$  و  $t_u$  از روابط (۳) و (۸) به دست می آیند. با توجه به رابطه (۱۱) و

مشترک بودن نقطه  $P_1$  بین دو گوشه ۱ و ۲ طبق شکل (۵)، مقدار  $\alpha$  مربوط به ناحیه خطی  $P_2b$  از رابطه (۳۹) به دست می‌آید.

$$\alpha_b = \frac{t_{p1} - t_u}{t_{s1} - t_u} \quad (39)$$

مقدار  $t_{p1}$  از تحلیل گوشه ۱ موجود می‌باشد، ضمناً همانطور که ذکر شد مقدار  $t_u$  نیز از رابطه (۳) به دست می‌آید.  $t_{s1}$  نشان دهنده ضخامت در حالت کاملاً چسبیده برای نقطه  $P_1$  می‌باشد که در نقطه اولیه تماس، همان مقدراً ضخامت اولیه لوله را به خود می‌گیرد.

حال با داشتن مقدار  $\alpha_b$  می‌توان در هر مرحله ضخامت نقطه  $b$  را طبق رابطه (۱۱) به دست آورد. بدین ترتیب توزیع ضخامت روی ضلع بالایی مثلث به دست می‌آید. اما برای یافتن توزیع ضخامت روی اضلاع دیگر مثلث با استفاده از رابطه (۳۸) و همچنین استفاده مجدد از رابطه (۱۱) می‌توان ضخامت کلیه نقاط را به دست آورد.

### ۳- نتایج و بحث

روند تحلیل بدین صورت است که ابتدا طول ناحیه تماس  $L$  به‌عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود. با روابطی که برای نحوه توزیع ضخامت بین لوله و قالب در دو حالت بدون اصطکاک و اصطکاک چسبیده ارائه شد، رابطه توزیع ضخامت برای ضرایب مختلف اصطکاک تخمین زده می‌شود. حال با استفاده از تحلیل تنش و کرنش که در جداره لوله انجام داده می‌شود و همچنین برقراری شرط تعادل در ناحیه تماس لوله با قالب، فشار شکل‌دهی محاسبه شده و همچنین صحت رابطه تخمین زده شده برای توزیع ضخامت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در این قسمت ابتدا نتایج قالب چهار ضلعی و سپس نتایج حاصل از تحلیل فرآیند در قالب سه ضلعی آورده شده است. به منظور اعتبار دهی به تحلیل مقطع چهار ضلعی از نتایج مرجع [۱۰] و برای مقطع سه ضلعی از نتایج مرجع [۱۶] استفاده شده است.

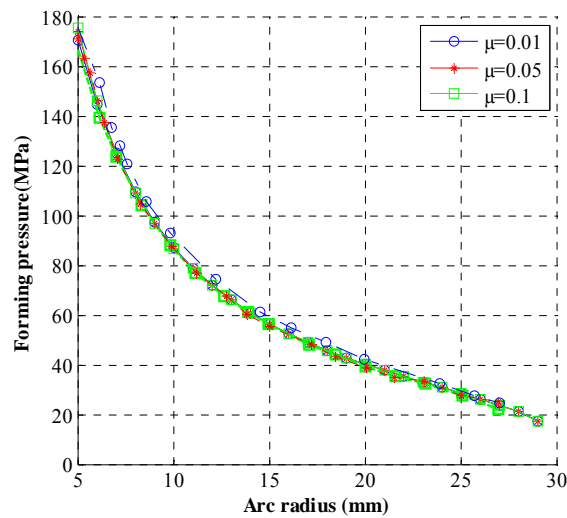
#### ۳-۱- نتایج مربوط به قالب مربعی

در تحلیل قالب مربعی، جنس لوله از فلز AISI 1008 بوده و رابطه تنش سیلان آن از رابطه  $\bar{\sigma} = 657.2\bar{\epsilon}^{0.24}$  تبعیت می‌کند. همچنین شعاع اولیه لوله  $r_0 = 30mm$  و طول هر ضلع قالب  $2a = 60mm$  می‌باشد. ضخامت اولیه لوله نیز  $t_o = 2mm$  در نظر گرفته شده است [۱۰].

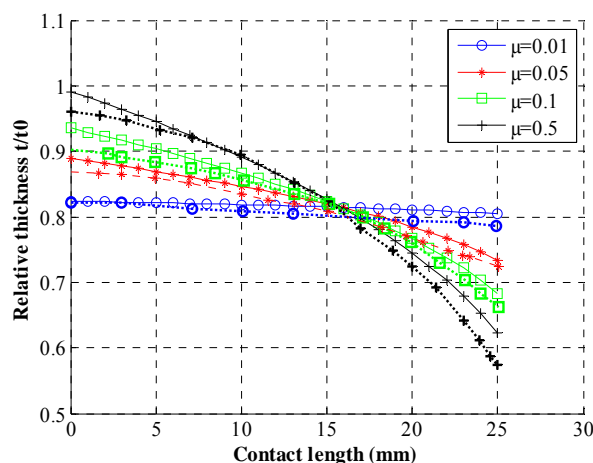
در شکل (۷)، نمودار مربوط به فشار مورد نیاز برای شکل دهی لوله برحسب شعاع گوشه در قالب چهار ضلعی ارائه شده است. شعاع لوله در ابتدا ۳۰ میلی متر بوده و به مرور که فشار داخلی افزایش می‌یابد لوله منبسط شده و با پر کردن گوشه‌های قالب، شکل قالب مربعی را به خود می‌گیرد. بنابراین شعاع لوله در گوشه‌های قالب به مرور کاهش می‌یابد. همچنین به منظور بررسی تاثیرات ضریب اصطکاک بر روی فشار شکل دهی، این نمودار برای سه ضریب اصطکاک متفاوت به دست آمده است. بنابر نتایج به دست آمده افزایش ضریب اصطکاک به میزان کم، تاثیر چندانی بر روی فشار شکل دهی ندارد، زیرا فشار درون لوله

برروی ناحیه آزاد یا کمائی شکل لوله اثر می‌گذارد در حالیکه ضریب اصطکاک برروی ناحیه در تماس با قالب تاثیر گذار است.

شکل (۸) نحوه توزیع ضخامت جداره لوله در ناحیه تماس لوله با قالب را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل نیز نشان داده شده است این نمودار برای چهار مقدار مختلف ضریب اصطکاک به دست آمده است. دیده می‌شود که با افزایش ضریب اصطکاک از مقدار  $\mu=0.01$  که تقریباً حالت بدون اصطکاک است تا مقدار  $\mu=0.5$ ، این نحوه تغییرات ضخامت از حالت بدون اصطکاک که یک خط افقی می‌باشد فاصله گرفته و به حالت کاملاً چسبنده نزدیک می‌شود. در واقع با افزایش ضریب اصطکاک لغزش لوله روی سطح قالب کاهش



شکل ۷- تغییر فشار شکل دهی بر حسب شعاع گوشه برای ضرایب اصطکاک مختلف  
خط چین نتایج مرجع [۱۰] و خطوط پیوسته مربوط به تحلیل حاضر



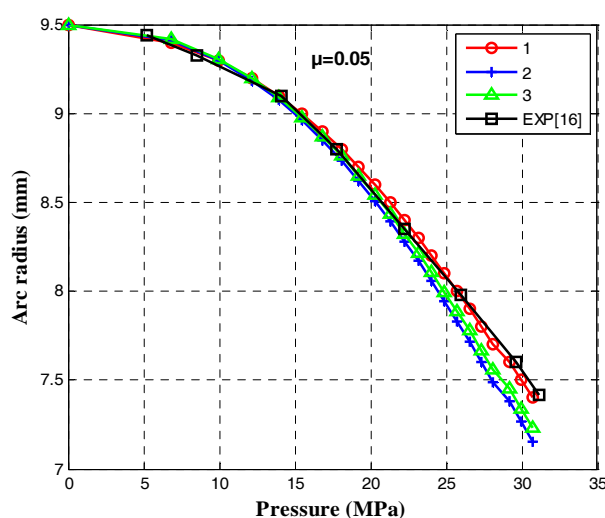
شکل ۸- توزیع ضخامت در طول ناحیه تماس برای ضرایب اصطکاک متفاوت  
خط چین مربوط به مرجع [۱۰] و خط پیوسته مربوط به تحلیل حاضر

یافته و کشش ماده از مرکز قالب به سمت انتهای ناحیه تماس کم می‌شود. بدین صورت، اختلاف در مقدار ضخامت بین ابتدا و انتهای ناحیه تماس افزایش می‌یابد.

### ۳-۲- نتایج مربوط به قالب مثلی

در این تحلیل جنس لوله از فلز Copper (Alloy122) در نظر گرفته شده که رابطه تنش سیلان آن از  $\bar{\sigma} = 560\bar{\epsilon}^{0.46}$  تبعیت می‌کند. همچنین شعاع اولیه لوله استفاده شده  $r_0 = 9.5\text{ mm}$  و ضخامت اولیه لوله نیز  $t_0 = 0.813\text{ mm}$  در نظر گرفته شده است [۱۶].

در شکل (۹) رابطه مربوط به فشار شکل‌دهی و شعاع گوشه‌ها برای سه گوشه مثلث آورده شده است. ضریب اصطکاک نیز با توجه به مرجعی که برای اعتبار دهی مورد استفاده قرار گرفته است  $\mu = 0.05$  در نظر گرفته شده است. هنگامی که فشار شکل‌دهی افزایش می‌یابد، لوله در داخل قالب به مرور منبسط شده و همزمان که طول ناحیه تماس افزایش می‌یابد شعاع قسمتی از لوله که در گوشه‌های قالب قرار می‌گیرد نیز از مقدار اولیه ۹٫۵ میلی‌متر کاهش می‌یابد و در انتهای فرآیند با توجه به متفاوت بودن زاویه‌ها، شعاع هر گوشه به شعاع متفاوتی می‌رسد. در شکل (۹) نتایجی که با استفاده از کار آزمایشگاهی انجام شده در مرجع [۱۶] به دست آمده، نشان داده شده است. لازم به ذکر است که در مرجع ذکر شده در اثر افزایش فشار، شعاع لوله در هر سه گوشه تقریباً به یک میزان کاهش یافته و به همین دلیل رابطه بین فشار و شعاع گوشه‌ها تنها با یک نمودار نشان داده شده است.

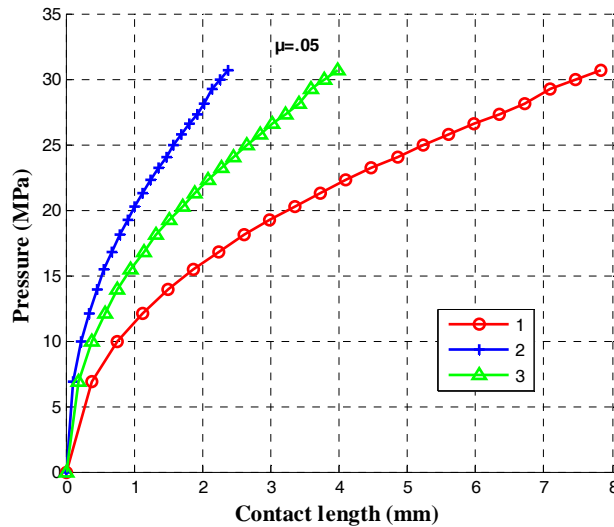


شکل ۹- تغییر فشار شکل‌دهی بر حسب شعاع لوله در گوشه‌های مختلف قالب

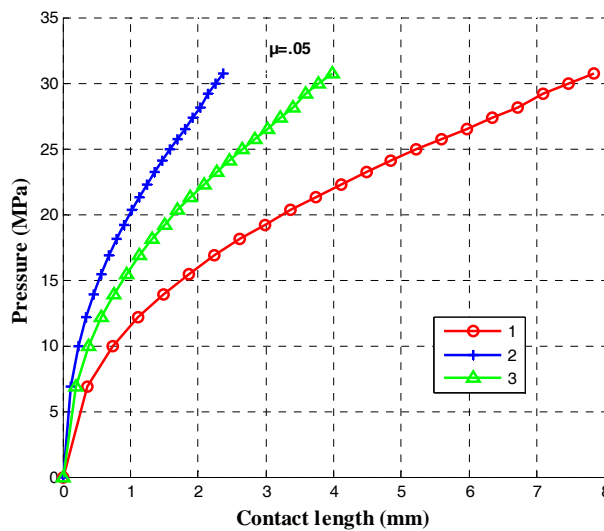
همچنین ارتباط بین فشار شکل‌دهی و طول ناحیه تماس در شکل (۱۰) رسم شده است. همانطور که از شکل (۱۰) نیز بر می‌آید هر چه زاویه گوشه کوچکتر باشد طول ناحیه تماس نیز افزایش می‌یابد، به عبارت دیگر طول ناحیه تماس گوشه ۳۰ درجه بیشتر از ۶۰ درجه و طول تماس در گوشه ۶۰ درجه نیز بیشتر از گوشه ۹۰ درجه می‌باشد.

در شکل (۱۱) تغییر ضخامت ناحیه کمان بر حسب طول تماس برای هر سه گوشه، در طول فرآیند آورده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود با افزایش طول تماس ضخامت نیز در حال کاهش می‌باشد. ضخامت

لوله در ابتدای فرآیند ۰/۸۱۳ میلی متر بوده است که در انتهای فرآیند برای گوشه‌های مختلف مقادیر مختلفی پیدا می‌کند.

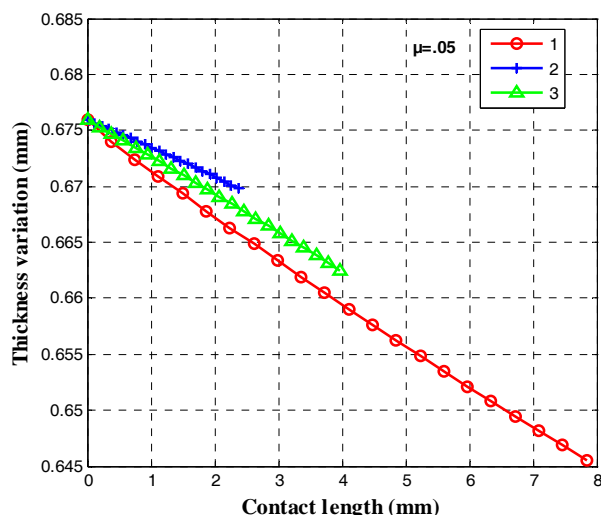


شکل ۱۰- تغییر فشار شکل دهی بر حسب طول ناحیه تماس در گوشه‌های مختلف قالب

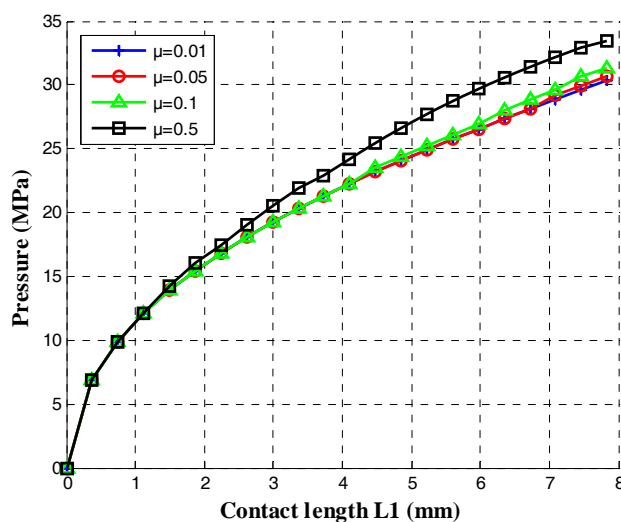


شکل ۱۱- تغییر ضخامت ناحیه کمان بر حسب طول ناحیه تماس در گوشه‌های قالب

نتایج مربوط به نحوه تغییر ضخامت در طول ناحیه تماس در شکل (۱۲) آورده شده است. همانطور که در نمودار نیز مشاهده می‌شود با توجه با پایین بودن ضریب اصطکاک در طول ناحیه تماس تغییرات ضخامت چندان زیاد نبوده و تا حدودی به حالت بدون اصطکاک نزدیک می‌باشد. ضمناً در گوشه‌هایی که دارای طول تماس بیشتری هستند تغییرات ضخامت بیشتری نیز نسبت به گوشه‌های دیگر بوجود آمده است. به منظور بررسی تاثیر ضریب اصطکاک بر روی پارامترهای مختلف گوشه ۳۰ درجه به عنوان نمونه مورد بررسی قرار گرفت. شکل (۱۳) تاثیر ضریب اصطکاک بر فشار شکل دهی را بر حسب شعاع لوله در گوشه ۳۰ درجه نشان می‌دهد.

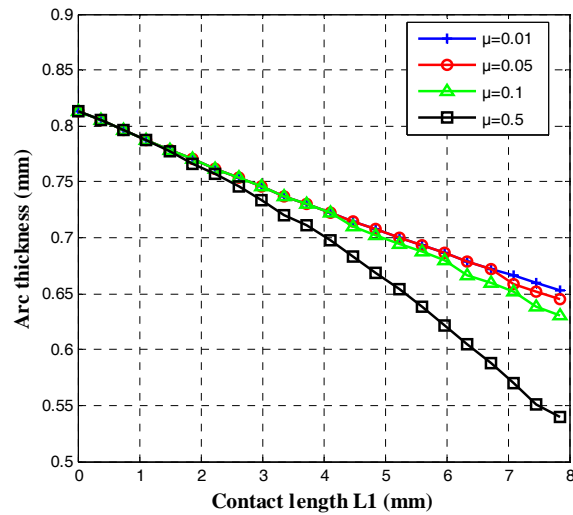


شکل ۱۲- تغییر ضخامت در طول ناحیه تماس برای گوشه‌های مختلف لوله تغییر شکل یافته

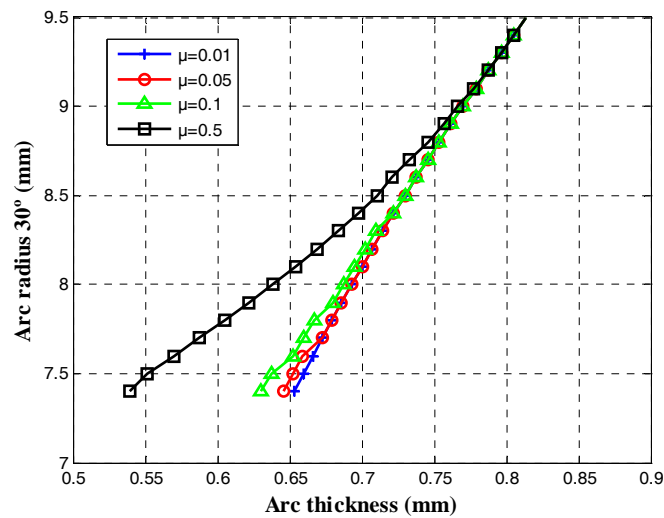


شکل ۱۳- تغییر فشار شکل دهی بر حسب طول ناحیه تماس در گوشه ۳۰ درجه برای ضرایب اصطکاک مختلف

به منظور بررسی تاثیر ضریب اصطکاک بر تغییرات ضخامت ناحیه کمان، این پارامتر بر حسب چهار مقدار متفاوت ضریب اصطکاک مورد بررسی قرار گرفت و نتایج به دست آمده در نمودار شکل (۱۴) رسم شده است. شکل (۱۴) این تغییرات را بر حسب طول تماس در گوشه ۱ و شکل ۱۵ تغییرات ضخامت را بر حسب شعاع لوله تغییر شکل یافته در گوشه ۳۰ درجه نشان می‌دهد. همانطور که در نمودار نیز مشاهده می‌شود ضخامت از مقدار اولیه  $t_0 = 0,813$  میلی متر آغاز می‌شود، اما در انتهای فرآیند با توجه به ضرایب مختلف اصطکاک به مقادیر مختلفی دست می‌یابیم، بصورتی که با افزایش میزان اصطکاک از  $\mu = 0,1$  به  $\mu = 0,5$  ضخامت ناحیه کمان نیز از مقدار  $0,65$  میلی متر به  $0,54$  میلی متر کاهش می‌یابد. علت این است که با افزایش ضریب اصطکاک لغزش لوله روی سطح قالب کاهش یافته و کشش ماده از کل ناحیه تماس صورت نمی‌گیرد، بلکه کشش ماده بیشتر از انتهای ناحیه تماس انجام می‌گیرد که ضخامت ناحیه تماس در ابتدا بیشتر و در انتهای طول تماس کمتر خواهد بود.



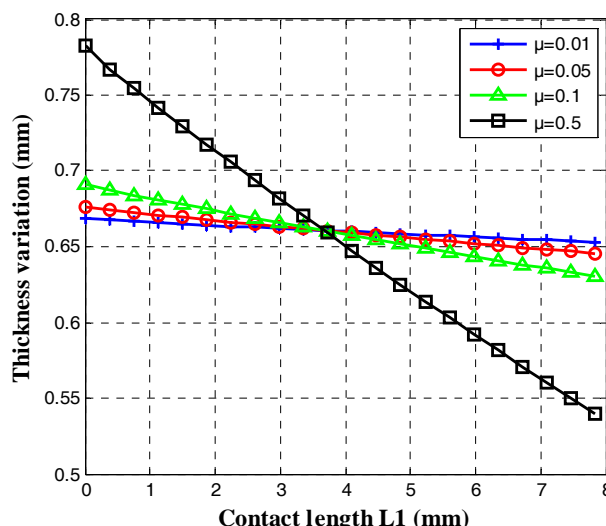
شکل ۱۴- تغییر ضخامت ناحیه کمان بر حسب طول تماس در گوشه ۳۰ درجه برای ضرایب اصطکاک متفاوت



شکل ۱۵- تغییر ضخامت ناحیه کمان بر حسب شعاع لوله در گوشه ۳۰ درجه برای ضرایب اصطکاک متفاوت

تأثیر ضریب اصطکاک بر توزیع ضخامت در طول ناحیه تماس در گوشه ۳۰ درجه در شکل (۱۶) آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در انتهای فرآیند که طول  $L_1$  حدود ۷,۵ میلی متر پیشروی کرده است ضخامت در ابتدای طول تماس از مقدار اولیه  $t_0 = 0,813$  میلی متر کاهش یافته و برای ضرایب اصطکاک مختلف مقادیر متفاوتی را به خود اختصاص داده است.





شکل ۱۶- تغییر ضخامت ناحیه تماس بر حسب طول تماس در گوشه ۳۰ درجه برای ضرایب اصطکاک متفاوت

با توجه به شکل دیده می‌شود که با افزایش ضریب اصطکاک توزیع ضخامت به حالت کاملاً چسبیده نزدیک می‌شود و تغییرات ضخامت در طول این ناحیه افزایش می‌یابد، صورتی که ضخامت ابتدا تغییر کمتری می‌کند در حالی که ضخامت انتهای آن دچار کاهش بیشتری می‌شود. هنگامی که ضریب اصطکاک  $\mu=0,01$  باشد اختلاف ضخامت در ابتدا و انتهای این طول حدود  $0,02$  میلی متر می‌باشد در حالیکه در  $\mu=0,5$  این تفاوت به حدود  $0,25$  میلی متر می‌رسد.

#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله فرآیند هیدروفرمینگ لوله کرنش صفحه ای در شرایط اصطکاک لغزنده تحلیل و نتایج زیر حاصل شدند:

- انطباق مناسبی بین نتایج به دست آمده از تحلیل حاضر با نتایج موجود در مراجع وجود دارد.
- افزایش ضریب اصطکاک تاثیر چندانی بر فشار شکل دهی نمی‌گذارد.
- نحوه توزیع ضخامت در جداره لوله به شدت وابسته به ضریب اصطکاک می‌باشد.
- نقطه بحرانی لوله در فرآیند، محل اتصال ناحیه خطی با ناحیه کمان می‌باشد.
- با افزایش ضریب اصطکاک، ضخامت انتهای طول تماس، کاهش می‌یابد.
- در قالب با زوایای نابرابر، طول ناحیه تماس در گوشه‌های با زاویه کمتر بیشتر می‌باشد.
- در انجام فرآیند درون قالب با زوایای نابرابر، گوشه با زاویه کمتر گوشه بحرانی می‌باشد.

## مراجع

- [1] Asnafi, N., “Analytical Modelling of Tube Hydroforming”, *International Journal of Thin-Walled Structures*, Vol. 34, pp. 295–330, (1999).
- [2] Kridli, G., Bao, L., and Mallick, P., “Two-dimensional Plane Strain Modeling of Tube Hydroforming”, *Proceedings of the ASME, Manufacturing in Engineering Division*, Vol. 11, pp. 629–634, (2000).
- [3] Miller, J.E., Kyriakides, S., and Bastard, A.H., “On Bend–stretch Forming of Aluminum Extruded Tubes I: Experiments”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 43, pp. 1283–1317, (2001).
- [4] Miller, J.E., Kyriakides, S., and Corona, E., “On Bend–stretch Forming of Aluminum Extruded Tubes II: Analysis”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 43, pp. 1319–1338, (2001).
- [5] Hwang, Y., and Altan, T., “Finite Element Analysis of Tube Hydroforming Processes in a Rectangular Die”, *Finite Elem. Anal. Des.* Vol. 39, pp. 1071–1082, (2002).
- [6] Vollertson, F., and Plancak, M., “On the Possibilities for the Determination of the Coefficient of Friction in the Hydroforming of Tubes”, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 1125/1126, pp. 412–420, (2002).
- [7] Kridli, G.T., Bao, L., Mallick, P.K., and Tian, Y., “Investigation of Thickness Variation and Corner Filling in Tube Hydroforming”, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 133, pp. 287–296, (2003).
- [8] Rama, S.C., Ma, L., Smith, L.M., and Zhang, J.M., “A Two-dimensional Approach for Simulation of Hydroforming Expansion of Tubular Cross-section without Axial Feed”, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 141, pp. 420–430, (2003).
- [9] Hwang, Y.M., and Chen, W.C., “Analysis and Finite Element Simulation of Tube Expansion in a Rectangular Cross-sectional Die”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B. International Journal of Eng. Manufact.*, Vol. 217, pp. 27–35, (2003).
- [10] Hwang, Y.M., and Chen, W.C., “Analysis of Tube Hydroforming in a Square Cross-sectional Die”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 21, pp. 1815–1833, (2005).
- [11] Smith, L.M., Caveney, J.J., and Sun, T., “Fundamental Concepts for Corner Forming Limit Diagrams and Closed-form Formulas for Planar Tube Hydroforming Analysis”, *International Journal of Manufact. Sci. Eng.*, Vol. 128, pp. 874–883, (2006).
- [12] Smith, L.M., and Sun, T., “A Non-finite Element Approach for Tubular Hydroforming Simulation Featuring a New Sticking Friction Model”, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 171, pp. 214–22, (2006).

- [13] Liu, G., Yuan, S., and Teng, B., "Analysis of Thinning at the Transition Corner in Tube Hydroforming", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 177, pp. 688–691, (2006).
- [14] Orban, H., and Hu, S.J., "Analytical Modeling of Wall Thinning during Corner Filling in Structural Tube Hydroforming", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 194, pp.7–14, (2007).
- [15] Guan, Y., and Pourboghra, F., "Fourier Series Based Finite Element Analysis of Tube Hydroforming-generalized Plane Strain Model", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 197, pp. 379–392, (2008).
- [16] Yang, C., and Ngaile, G., "Analytical Model for Planar Tube Hydroforming: Prediction of Formed Shape, Corner Fill, Wall Thinning, and Forming Pressure", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, pp. 1263-1279, (2008).
- [17] Xianghe, X., Weigang, Z., Shuhui, L., and Zhongqin, L., "Analysis of Thickness Distribution of Square-sectional Hydroformed Parts", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 209, pp. 158–164, (2009).
- [18] Yannis, P., and Korkolis, S. K., "Hydroforming of Anisotropic Aluminum Tubes: Part II Analysis", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, No. 2, pp. 83-90, (2010).

### فهرست نمادهای انگلیسی

$L$ : طول ناحیه تماس لوله تغییر شکل یافته با قالب

$p$ : فشار شکل دهی

$r_o$ : شعاع داخلی لوله اولیه

$r$ : شعاع لوله در گوشه‌ها

$t_0$ : ضخامت اولیه لوله

$t_s(x)$ : ضخامت لوله تغییر شکل یافته در حالت کاملاً چسبیده در فاصله  $x$  از نقطه تماس اولیه

$t_u$ : ضخامت لوله در حالت بدون اصطکاک

$t(x)$ : ضخامت لوله تغییر شکل یافته در فاصله  $x$  از نقطه تماس اولیه در حالت اصطکاک لغزنده

$K$ : نرخ سختی کرنش

$n$ : ضریب کار سختی

### نمادهای یونانی

$0 \leq \alpha \leq 1$  :  $\alpha$

$\bar{\sigma}$ : تنش موثر

$\bar{\epsilon}$ : کرنش موثر

$\mu$ : ضریب اصطکاک

$\sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_t$ : تنش در راستای ضخامت، محیط و طول لوله

$\sigma'$ : تنش کاهش یافته

$\sigma_m$ : تنش متوسط

$\varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \varepsilon_t$ : کرنش در راستای ضخامت، محیط و طول لوله

**Abstract**

In this paper, an analytical solution is presented to analyse plane strain tube hydroforming process in two different shape of die, square and triangular cross section dies. In this model, thickness variation along the linear segment is predicted by using thickness variation in two cases of friction between tube and die wall: friction less and full sticking friction. Then by analysing stress and strain relations and satisfying equilibrium in the linear segment, predicted thickness variation will be optimized and also forming pressure will be estimated. Also effect of most important parameters such as friction coefficient and work hardening exponent are considered. At the end, obtained results are compared with available results from papers in order to validate presented method.