

## حل حجم محدود بر اساس مشخصه‌های مجازی برای جابجایی طبیعی حول یک استوانه افقی

در تحقیق حاضر، حل حجم محدود بر اساس مشخصه‌ها (CB) برای اخذ جواب‌های دقیق، بهبود سرعت همگرایی و پایداری عددی جریان‌های تراکم‌ناپذیر لزوج توسعه یافته است. تراکم‌پذیری مصنوعی به‌عنوان خوش رفتار ساز در مطالعه ما در نظر گرفته شده و طرح رانگ-کوئای مرتبه پنج برای پایش زمانی استفاده شده است. گام‌بندی محلی زمان و هموار سازی صریح مانده‌ها به‌عنوان تکنیک‌های تسریع همگرایی به کار گرفته شده‌اند. شارهای جابجایی با طرح شار مرتبه بالا مشابه طرح Roe محاسبه شده‌اند. این روش اعداد کورانت (CFL) بالایی را تأمین می‌کند و سرعت همگرایی و دقت خوب در گستره وسیعی از اعداد رایلی ۱ تا ۱۰۰۰۰ برای جریان جابجایی طبیعی حول یک استوانه دایروی افقی به-عنوان مطالعه موردی، آشکار می‌نماید. نتایج حاصل با اطلاعات محک موجود در ادبیات فن مقایسه شده‌اند و توافق خوبی با آنها مشاهده می‌شود.

سید اسماعیل رضوی<sup>۱</sup>

دانشیار

وحید فرهنگ‌مهر<sup>۲</sup>

دانشجوی دکترا

واژه‌های راهنما: جریان تراکم‌ناپذیر، جابجایی طبیعی، تراکم‌پذیری مصنوعی (AC, Artificial Compressibility)، فرض بوسینسک، روش مشخصه‌ها (CB, Characteristic Based)، رانگ-کوئا

### ۱- مقدمه

شبیه‌سازی عددی جریان‌های تراکم‌ناپذیر یکی از مسائل پر کاربرد است که توجه پیوسته‌ای در سال‌های اخیر به خود جلب کرده است. گرچه محققان طرح‌های جریان تراکم‌پذیر را برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر استفاده می‌کنند، ولی مشکلات چندی در شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر وجود داشت. خشکی (Stiffness) جملات جابجایی در معادلات حاکم بر جریان‌های سرعت پایین موجب بروز مسائلی در همگرایی، دقت و افزایش حساسیت به شرایط مرزی می‌شود [۱]. برای غلبه بر این مسائل روش CB برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر توسط Drikakis و همکاران [۲] توسعه یافت که بر اساس متغیرهای اولیه به صورت توابعی از مقادیر آنها روی مشخصه‌ها و تشکیل معادلات سازگاری در امتدادهای مشخصه است. بعداً این روش توسعه داده شد و با موفقیت برای محاسبه موارد مختلف جریان تراکم‌ناپذیر به کار رفت [۳، ۴، ۵، ۶]. Neofytou [۷] اصلاحاتی در استخراج معادلات سازگاری پیشنهاد داد که برای فرمول‌های CB

<sup>۱</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز razavi@tabrizu.ac.ir

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز vfarhangmehr@gmail.com

در محاسبات متغیرهای جریان دو و سه بعدی به کار می‌روند. وی فرمول دقت مرتبه سه برای درون‌یابی متغیرهای مشخصه روی وجوه سلول استفاده کرد. معلوم شد که فرضیات ساده‌کننده بیشتر در طرح CB اصلی برای استخراج معادلات سازگاری اعمال شده‌اند. هم‌زمان Zhao, Zhang [۸] یک روش شبکه بی‌سازمان حجم محدود مرتبه بالا برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر بر اساس CB و AC توسعه داده‌اند. مراجع فوق نشان می‌دهند که طرح CB با موفقیت در تعدادی از کاربردها از نقطه نظرهای دقت و سرعت همگرایی استفاده شده‌اند.

در این مطالعه، روش Roe [۹] که در اصل برای شبیه‌سازی معادلات اوپلر تراکم‌پذیر توسعه یافت، برای محاسبه شارهای جابجایی معادلات لزج تراکم‌ناپذیر تعمیم داده می‌شود. طرح ارائه شده بر اساس انتشار امواج اکوستیک مجازی می‌باشد که آن را قادر به میرا کردن نوسانات عددی تولید شده توسط ناپیوستگی‌های محاسبات شار می‌سازد. به این معنی که طرح هیچ تدبیر مرزی خاصی نیاز ندارد. با کمک AC، معادلات حاکم رفتار غالب هذلولوی گرفته که برای کاربرد روش CB ضروری است. نشان داده می‌شود که AC مستلزم یک طرح همگرایی سریع در هر گام زمانی به منظور ارضای شرط تراکم‌ناپذیری می‌باشد [۱۰]. برای دستیابی به سرعت همگرایی بالاتر، تکنیک‌های تسریع همگرایی مانند گام‌بندی زمانی محلی و هموارسازی صریح مانده‌ها استفاده می‌شوند. برای گستره وسیع پایداری و سرعت همگرایی بالا، روش رانگ-کوتای مرتبه پنج برای گسسته‌سازی زمانی استفاده می‌شود. جابجایی طبیعی به عنوان جریان سرعت پایین برای تحلیل دقت و همگرایی طرح ارائه شده، به کار می‌رود.

## ۲- معادلات حاکم

شکل بی‌بعد دیفرانسیلی و حجم محدود معادلات ناویر-استوکس با تراکم‌پذیری مصنوعی و تقریب بوسینسک به صورت زیر است:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F_N}{\partial N} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + Z \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} W dA + \oint_{\partial\Omega} F_N dL = \oint_{\partial\Omega} (R dy - S dx) + \iint_{\Omega} Z dA \quad (2)$$

$$W = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}, F_N = \begin{bmatrix} \beta u_N \\ u u_N + p \cos \zeta \\ v u_N + p \sin \zeta \\ \theta u_N \end{bmatrix}, R = \frac{1}{Re_D} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{bmatrix}, S = \frac{1}{Re_D} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Gr_D \cdot \theta}{Re_D^2} \\ 0 \end{bmatrix}, dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$x = \frac{X}{D}, y = \frac{Y}{D}, U_0 = \frac{\alpha'}{D}, u = \frac{U}{U_0}, v = \frac{V}{U_0}, t = \frac{\tau U_0}{D}, \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, p = \frac{P - P_\infty}{\rho_\infty U_0^2} \quad (۴)$$

$$\Pr = \frac{\nu}{\alpha'}, Gr_D = \frac{g\beta'(T_w - T_\infty)D^3}{\nu^2} = \frac{Ra_D}{Pr}, Re_D = \frac{U_0 D}{\nu} = \frac{1}{Pr}$$

$$\cos \zeta = \frac{\Delta y}{\Delta L}, \sin \zeta = -\frac{\Delta x}{\Delta L}, \Delta L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \vec{N} = \cos \zeta \vec{i} + \sin \zeta \vec{j} \quad (۵)$$

$$u_N = u \cos \zeta + v \sin \zeta, u_p = v \cos \zeta - u \sin \zeta, a = \sqrt{u_N^2 + \beta}$$

برای هر سطح مشترک سلول ها  $\vec{N}, a, F_N, \Delta L, u_N, u_p$ ، که به ترتیب زاویه بین بردار یک عمود بر آن و خط افقی، مولفه های سرعت عمودی و موازی با آن، طول آن، شار جابجایی عمود بر آن، سرعت شبه صوت، بردار یک عمود بر آن یا جهت انتشار موج مجازی مطابق شکل (۱) می باشند.

یک شبکه جبری با فشرده سازی نزدیک سطح جامد استفاده می شود. عدم لغزش و دمای ثابت سطح جامد، یعنی  $u=0, v=0, \theta=1$  در مرز جامد اعمال می شود. فشار روی دیوار جامد با برون یابی با استفاده از یک چند جمله ای مرتبه اول یافته می شود. بخش های ورودی و خروجی مرز دور میدان جریان با  $\vec{N}$ .  $\vec{V}$  تشخیص داده می شوند. در ناحیه ورودی جریان، فشار از ناحیه داخلی برون یابی شد. برای سرعت و دما مقادیر محیط قرار داده شد و در ناحیه خروجی جریان، فشار ثابت و سایر متغیرهای جریان از ناحیه داخلی برون یابی می شود.

### ۳- مدل شار جابجایی

طرحی مشابه Roe برای محاسبه شار جابجایی در هر وجه سلول استفاده می شود، در حالی که برای جملات لزج و رسانش گرمایی، مشتقات مرتبه اول سلول های راست و چپ میانگین گیری می شود. در کار حاضر، رهیافتی مشابه برای معادلات ناویر-استوکس تراکم ناپذیر بر اساس AC به کار می رود. با در نظر گرفتن شکل (۱) داریم:

$$\oint_{\partial \Omega} F_N dL = \sum_{K=1}^4 F_N^{(K)} \Delta L \quad (۶)$$

که  $K$  به هر وجه سلول، یعنی (۱)، (۲)، (۳) و (۴) نسبت داده می شود. با تبدیل شکل دیفرانسیلی معادلات حاکم به شکل شبه خطی با شار جابجایی عمود در هر وجه سلول داریم:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial N} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + Z \quad \text{و} \quad A = \frac{\partial F_N}{\partial W} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \cos \zeta & \beta \sin \zeta & 0 \\ \cos \zeta & u \cos \zeta + u_N & u \sin \zeta & 0 \\ \sin \zeta & v \cos \zeta & v \sin \zeta + u_N & 0 \\ 0 & \theta \cos \zeta & \theta \sin \zeta & u_N \end{bmatrix} \quad (۷)$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر ماتریس ژاکوبین  $A$  به صورت زیر هستند:

$$\lambda_{(1)} = u_N, \lambda_{(2)} = u_N, \lambda_{(3)} = u_N + a, \lambda_{(4)} = u_N - a \quad (۸)$$

$$E^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \zeta \\ \cos \zeta \\ 1 \end{bmatrix}, E^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E^{(3)} = \begin{bmatrix} -a(u_N - a) \\ a \cos \zeta - u_p \sin \zeta \\ a \sin \zeta + u_p \cos \zeta \\ 1 \end{bmatrix}, E^{(4)} = \begin{bmatrix} a(u_N + a) \\ -(a \cos \zeta + u_p \sin \zeta) \\ -a \sin \zeta + u_p \cos \zeta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

که اولین مقدار ویژه و بردار ویژه یک تغییر در امتداد سرعت را نشان می‌دهد و می‌تواند به عنوان یک شبه‌موج برشی که با سرعت سیال در امتداد انتشار  $\vec{N}$  حرکت می‌کند، درک شود. دومی یک شبه‌موج آنتروپی با همان سرعت مقدار ویژه اول را معرفی می‌کند. سومی و چهارمی اغتشاش‌های صوتی مجازی اند که با سرعت  $u_N \pm a$  حرکت می‌کنند. لازم به یادآوری است که مقادیر ویژه و بردارهای ویژه حقیقی و به‌طور خطی مستقل می‌باشند. یک پارامتر میانگین‌گیری وزنی مشابه روش Roe در سطح مشترک سلول‌ها متغیرهای جریان را مانند زیر میانگین‌گیری می‌کند:

$$\omega = \frac{p_L}{p_L + p_R}, \quad \bar{W} = \omega W_L + (1 - \omega) W_R \quad (10)$$

$$\bar{u}_p = \bar{v} \cos \zeta - \bar{u} \sin \zeta, \quad \bar{u}_N = \bar{u} \cos \zeta + \bar{v} \sin \zeta, \quad \bar{a} = \sqrt{\bar{u}_N^2 + \bar{b}^2}$$

$$\bar{\lambda}_{(1)} = \bar{u}_N, \quad \bar{\lambda}_{(2)} = \bar{u}_N, \quad \bar{\lambda}_{(3)} = \bar{u}_N + \bar{a}, \quad \bar{\lambda}_{(4)} = \bar{u}_N - \bar{a} \quad (11)$$

$$\bar{E}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \zeta \\ \cos \zeta \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{E}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{E}^{(3)} = \begin{bmatrix} -\bar{a}(\bar{u}_N - \bar{a}) \\ \bar{a} \cos \zeta - \bar{u}_p \sin \zeta \\ \bar{a} \sin \zeta + \bar{u}_p \cos \zeta \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{E}^{(4)} = \begin{bmatrix} \bar{a}(\bar{u}_N + \bar{a}) \\ -(\bar{a} \cos \zeta + \bar{u}_p \sin \zeta) \\ -\bar{a} \sin \zeta + \bar{u}_p \cos \zeta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

برای محاسبه ماتریس قدرت موج صوتی مجازی  $\alpha_K$ ، سیستم معادلات زیر حل می‌شود:

$$\Delta W = W_R - W_L = \sum_{K=1}^4 \alpha_K \bar{E}^{(K)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{E}_1^{(3)} & \bar{E}_1^{(4)} \\ -\sin \zeta & 0 & \bar{E}_2^{(3)} & \bar{E}_2^{(4)} \\ \cos \zeta & 0 & \bar{E}_3^{(3)} & \bar{E}_3^{(4)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\alpha_3 = \frac{\Delta u \cos \zeta + \Delta v \sin \zeta - \left( \frac{\bar{E}_2^{(4)}}{\bar{E}_1^{(4)}} \cos \zeta + \frac{\bar{E}_3^{(4)}}{\bar{E}_1^{(4)}} \sin \zeta \right) \Delta p}{\left( \bar{E}_2^{(3)} - \frac{\bar{E}_1^{(3)} \bar{E}_2^{(4)}}{\bar{E}_1^{(4)}} \right) \cos \zeta + \left( \bar{E}_3^{(3)} - \frac{\bar{E}_1^{(3)} \bar{E}_3^{(4)}}{\bar{E}_1^{(4)}} \right) \sin \zeta}, \quad \alpha_4 = \frac{\Delta p}{\bar{E}_1^{(4)}} - \frac{\bar{E}_1^{(3)}}{\bar{E}_1^{(4)}} \alpha_3 \quad (14)$$

$$\alpha_1 = (\Delta v - \alpha_3 \bar{E}_3^{(3)} - \alpha_4 \bar{E}_3^{(4)}) / \cos \zeta, \quad \alpha_2 = \Delta \theta - (\alpha_3 - \alpha_4) \bar{\theta} - \alpha_1$$

در نهایت، شار جابجایی عمودی در هر وجه سلول به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_N = 0.5(F_{NR} + F_{NL}) - 0.5 \sum_{K=1}^4 |\bar{\lambda}_{(K)}| \alpha_K \bar{E}^{(K)} \quad (15)$$

مرتبه دقت طرح به انتخاب  $W_R, W_L$  بستگی دارد. همانگونه که در شکل (۱) نشان داده شده، برای وجه AB سلول، آنها مانند زیر به دست می آیند :

$$W_{L,i+1/2,j} = W_{i,j} \quad , \quad W_{R,i+1/2,j} = W_{i+1,j} \quad (۱۶)$$

$$W_{L,i+1/2,j} = \frac{3}{2}W_{i,j} - \frac{1}{2}W_{i-1,j} \quad , \quad W_{R,i+1/2,j} = \frac{3}{2}W_{i+1,j} - \frac{1}{2}W_{i+2,j}$$

جملات لزوج و رسانش گرمایی با سلول های ثانویه مطابق شکل (۲) گسسته سازی می شوند :

$$\oint_{\Omega} (Rdy - Sdx) = \oint_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dy - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) dx \right] = \sum_{K=1}^4 \left[ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_K \Delta y_K - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)_K \Delta x_K \right] \quad (۱۷)$$

که  $\varphi$  معرف  $\theta, v, u$  بوده و K به هر وجه سلول یعنی AB, BC, DA, CD نسبت داده می شود. به عنوان مثال برای وجه AB داریم:

$$\left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_{AB} = \frac{1}{\Omega'} \oint_{\partial\Omega'} \varphi dy = \frac{1}{\Omega'} \sum_{K=1}^4 \varphi_K \Delta y_K = \frac{1}{\Omega'} [\varphi_{AE} \Delta y_{AE} + \varphi_{EB} \Delta y_{EB} + \varphi_{BM} \Delta y_{BM} + \varphi_{MA} \Delta y_{MA}] = \quad (۱۸)$$

$$\frac{1}{\Omega'} [0.5(\varphi_A + \varphi_E) \Delta y_{AE} + 0.5(\varphi_E + \varphi_B) \Delta y_{EB} + 0.5(\varphi_B + \varphi_M) \Delta y_{BM} + 0.5(\varphi_M + \varphi_A) \Delta y_{MA}]$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4}(\varphi_M + \varphi_E + \varphi_S + \varphi_{SE}) \quad , \quad \varphi_B = \frac{1}{4}(\varphi_M + \varphi_N + \varphi_E + \varphi_{NE}) \quad (۱۹)$$

#### ۴- گسسته سازی زمانی

برای گسسته سازی زمانی، طرح رانگ- کوتای مرتبه پنج به دلیل دقت بالا و گستره پایداری وسیع آن استفاده شده است [۱۱] :

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} = \frac{1}{\Omega_{i,j}} \sum_{K=1}^4 [(R\Delta y - S\Delta x)_K - (F_N \Delta L)_K] + \bar{Z} \quad (۲۰)$$

$$W^{(m)} = W^{(0)} - \alpha_m \Delta t Q^{(m-1)}(W) \quad , \quad \alpha_m = 1/4, 1/6, 3/8, 1/2, 1 \quad , \quad m = 1, \dots, 5 \quad (۲۱)$$

که Q طرف دست راست معادله (۲۰) است. تعداد تکرارها برای رسیدن به حالت پایا با استفاده از یک گام زمانی متغیر که به تغییرات محلی جریان و اندازه شبکه به صورت زیر بستگی دارد، کاهش می یابد.

$$\Delta t = \max\left[\frac{CFL \times \text{Min}(\sqrt{\Delta x_{i,j}^2 + \Delta y_{i,j}^2})}{\text{Max}[\sqrt{\beta} + \sqrt{u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2}]}, \frac{CFL}{\max_{mm}(\eta_{mm})}\right] \quad (22)$$

$$\eta_{mm} = \max[|\lambda_{(1)}|, |\lambda_{(2)}|, |\lambda_{(3)}|, |\lambda_{(4)}|] \cdot \sqrt{\Delta x_{i,j}^2 + \Delta y_{i,j}^2}, mm = 1, 2, 3, 4$$

## ۵- نتایج عددی و بحث

برای اعتبارسنجی مدل، یک سری از تست‌های عددی با اعداد رایلی مختلف حول یک استوانه دایروی افقی انجام می‌شود. معادلات دوبعدی آرام تراکم‌ناپذیر جابجایی طبیعی با استفاده از رهیافت ارائه شده حل می‌شود. هوا به عنوان سیال عامل با عدد پرانتل ثابت ۰.۷ انتخاب می‌شود. اعداد نوسلت زاویه‌ای متوسط و محلی بر اساس قطر استوانه برای مقایسه نتایج حاصل با سایر اطلاعات در دسترس در ادبیات فن تعیین می‌شود. برای اطمینان از اینکه حل هیچ وابستگی به شبکه ندارد، شش تراز شبکه ۶۰×۶۰ و ۷۰×۷۰ برای Ra=60، ۱۰۰×۱۰۰ و ۱۱۰×۱۱۰ برای Ra=40 و ۱۲۰×۱۲۰ و ۱۳۰×۱۳۰ برای Ra=2000 آزمایش می‌شوند و نتایج در شکل (۳) نشان داده می‌شوند. استقلال نتایج از شبکه در یک شبکه ۶۰×۶۰ برای 100 ≤ Ra < 1000، ۱۰۰×۱۰۰ برای 1000 ≤ Ra ≤ 10000 و ۱۲۰×۱۲۰ برای 10000 < Ra حاصل می‌شود. در واقع، اختلاف در توزیع عدد نوسلت محلی به نظر می‌رسد برای بهترین دو تراز شبکه متوالی ناچیز است. این منجر شده است که ما از شبکه‌های اشاره شده در همه محاسبات بعدی با در نظر گرفتن هزینه نسبی محاسبه با دقت قابل حصول استفاده کنیم.

به منظور مطالعه اثر پارامتر AC روی دقت حل، توزیع زاویه‌ای عدد نوسلت محلی برای مقادیر مختلف از آن در Ra=60 در شکل (۴) رسم می‌شود. شکل (۴) معلوم می‌کند که نتایج حالت پایا به پارامتر AC حساس نمی‌باشند، اگرچه یافته‌های ما نشان می‌دهد که مقدار آن پایداری و سرعت همگرایی حل را متاثر می‌کند. برای این مطالعه موردی خاص، پارامتر AC برابر ۱۰ رفتار بهتری نشان می‌دهد.

در شکل (۵)، طرح حاضر یک سرعت همگرایی سریع‌تر با نوسان‌های عددی خیلی ناچیز نتیجه می‌دهد که قابلیت طرح ارائه شده برای حل جریان‌های سرعت پایین بدون هیچ تدبیر مرزی خاص را اثبات می‌کند.

شکل (۶) توافق قابل توجه بین عدد نوسلت متوسط محاسبه شده با طرح حاضر و روش میانگین‌گیری شار Jameson و نتایج محک رانشان می‌دهد. در اندازه شبکه، مرز دور میدان و پارامتر AC یکسان، روش میانگین‌گیری شار Jameson در Ra > 1000 دچار واماندگی در همگرایی می‌شود.

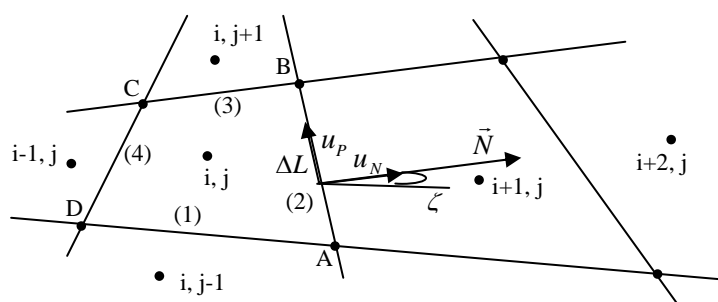
توزیع زاویه‌ای عدد نوسلت محلی حاصل از کار حاضر با دیگر اطلاعات محققان در Ra=1000, 10000 در شکل (۷) مقایسه می‌شود. بیشینه مقدار در نقطه سکون جلویی مشاهده می‌شود که قابل پیش‌بینی بود، از آنجا که رشد به سمت پایین دست لایه مرزی گرمایی می‌تواند مطمئناً مقاومت گرمایی را افزایش دهد.

شکل (۸) خطوط جریان و خطوط دما ثابت برای اعداد رایلی مختلف را نشان می‌دهد. از همه این شکل‌ها قابل مشاهده است که رشد لایه مرزی گرمایی روی سطح استوانه قابل ملاحظه است. از نقطه سکون پایین‌تر، سیال گرم به دلیل گرانش بالا می‌آید، از این رو ضخامت لایه مرزی گرمایی انتظار می‌رود که رشد کند. ولی این پدیده خیلی سراسر نیست. عمقی روی خطوط دما ثابت نزدیک سطح استوانه ظاهر می‌شود. در اعداد رایلی پایین، جریان تحریک شده به سمت بالا حرکت کرده و گردشی حول استوانه ایجاد می‌کند و افزایش آن تشدید جریان تحریک شده را نتیجه می‌دهد. در ابتدا خطوط دما ثابت تقریباً دوایر متحدالمرکز گویای رانش گرمایی خالص هستند که سپس

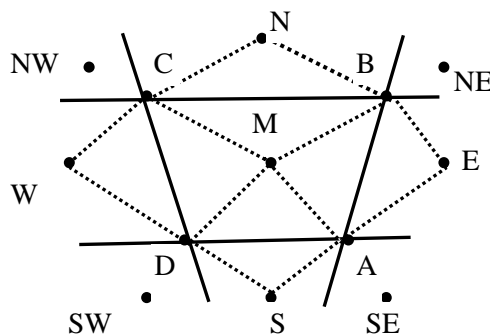
تبدیل به دواير نامتقارن به دليل جابجايی گرمایی می شوند. نتایج حاصل توافق خوب با دیگر نتایج در دسترس [۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵] نشان می دهد.

## ۶- نتیجه گیری

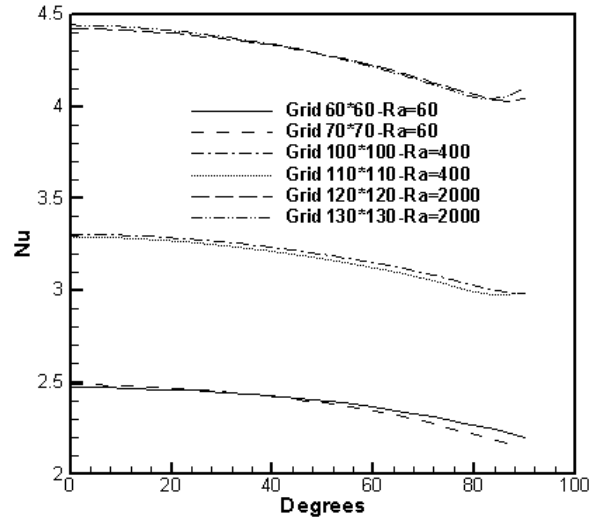
در تحقیق حاضر، یک طرح مرتبه دوم CB برای حل جریان های تراکم ناپذیر توسعه داده شده است. برای تدبیر شار جابجایی، انتشار امواج اکوستیک مجازی در نظر گرفته شده که سرعت همگرایی بالا با نوسانات عددی کمتر بدون هیچ نیازی به میرایی یا تدبیر مرزی خاص را نتیجه می دهد. معادلات حاکم در زمان با طرح رانگ-کوتای مرتبه پنج گسسته سازی شده است. گام بندی زمانی محلی و هموارسازی مانده ها برای تسریع همگرایی به کار گرفته شده و همچنین AC برای کوپل کردن معادلات پیوستگی و ممنتم استفاده شده است. جملات لزج و رسانش گرمایی با یک تکنیک مرتبه دوم گسسته سازی شده است. نتایج حاصل با این طرح با نتایج محک مقایسه شده که از آن توافق قابل توجه مشاهده می شود.



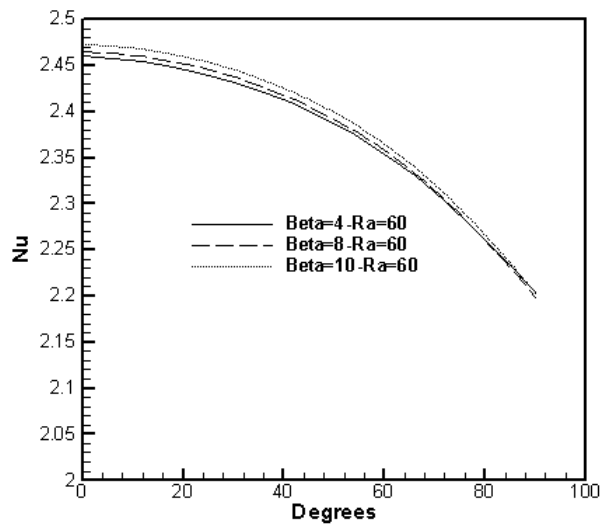
شکل ۱- طرحواره ای از سلول اولیه برای محاسبه شار جابجایی عمودی



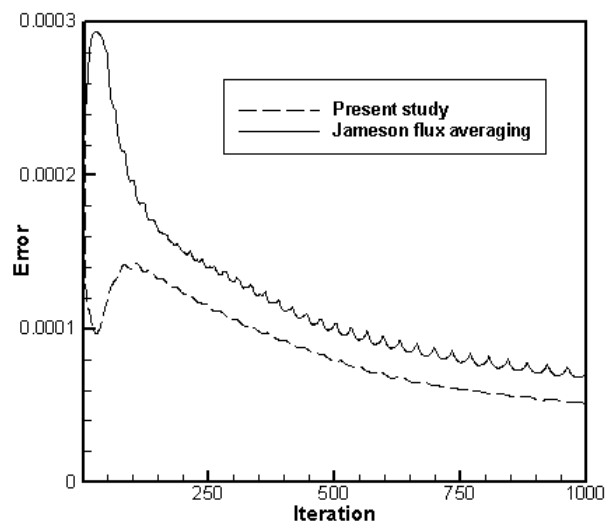
شکل ۲- طرحواره ای از سلول های اولیه و ثانویه برای محاسبه جملات لزج



شکل ۳- دستیابی به استقلال از شبکه

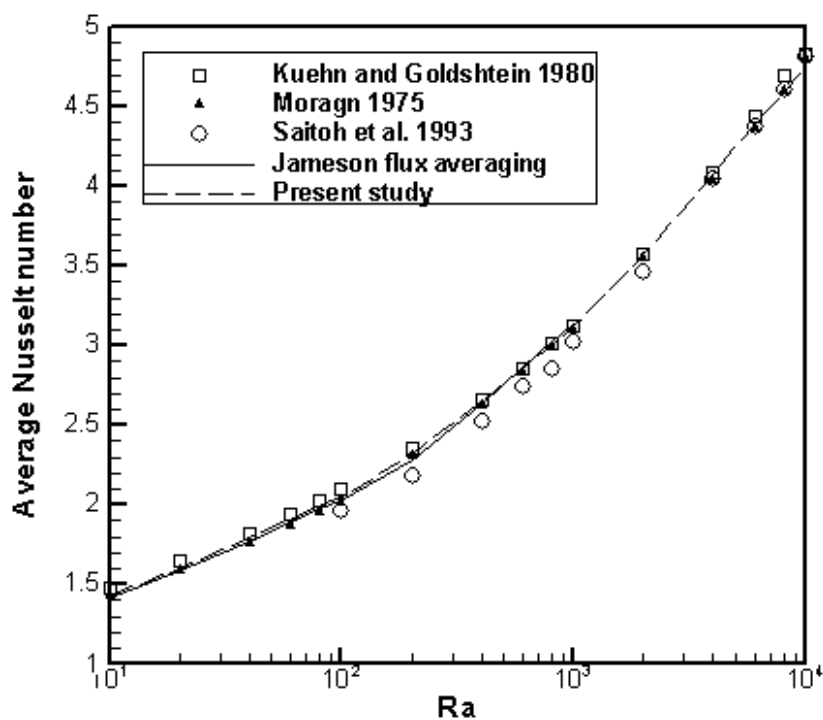


شکل ۴- عدم وابستگی نتایج به پارامتر تراکم پذیری مصنوعی

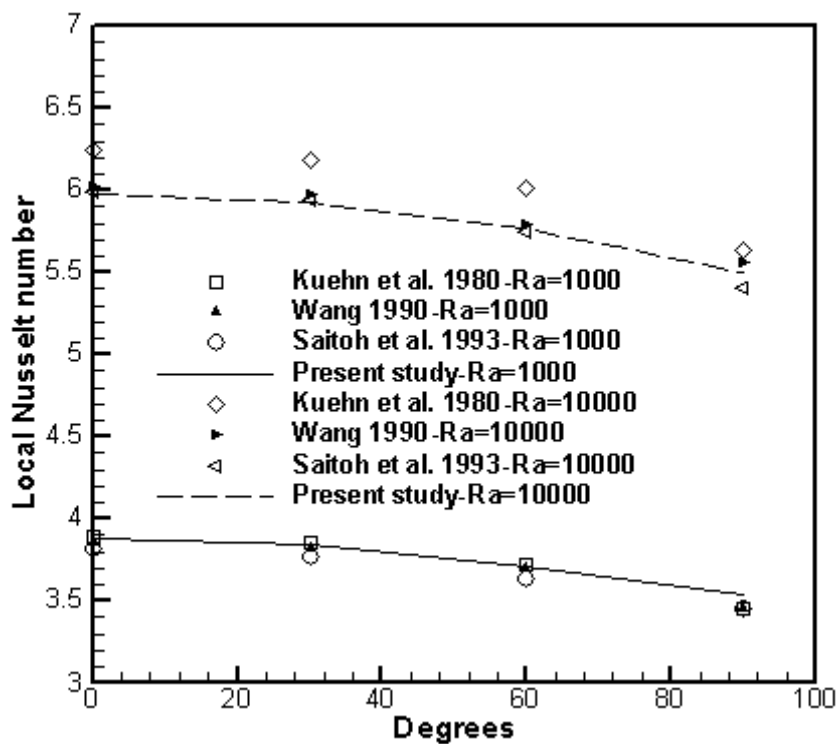


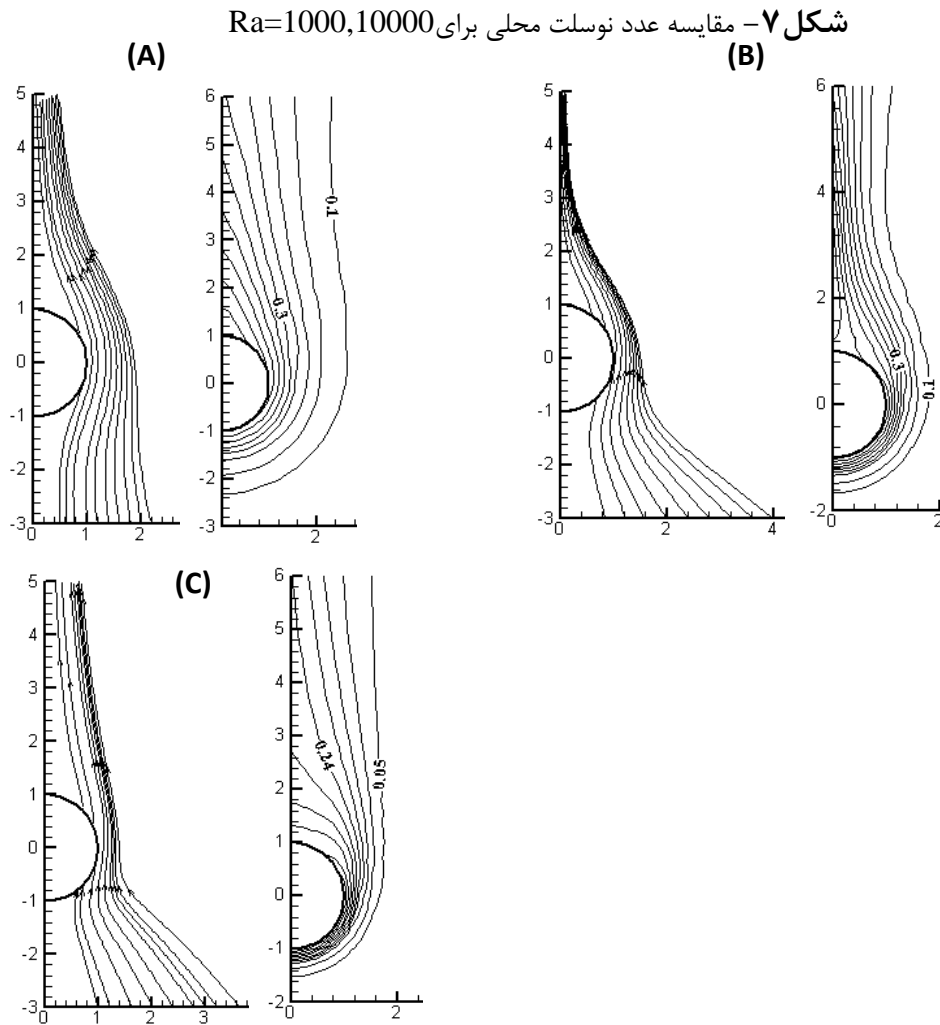
شکل ۵- مقایسه‌ای از سرعت‌های همگرایی بین کار حاضر و روش میانگین‌گیری شار برای Ra=1000





شکل ۶- مقایسه عدد نوسلت متوسط بر حسب اعداد رایلی مختلف





## مراجع

- [1] Volpe, G., "Performance of Compressible Flow Codes at Low Mach Numbers", AIAA Journal, Vol. 31, No. 1, pp. 49-56, (1993).
- [2] Drikakis, D., Govatsos, P.A., and Papatonis, D.E., "A Characteristic-based Method for Incompressible Flows", International Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol. 19, No. 8, pp. 667-685, (1994).
- [3] Shapiro, E., and Drikakis, D., "Artificial Compressibility, Characteristics-based Schemes for Variable Density, Incompressible, Multi-species Flows, Part 1, Derivation of Different Formulations and Constant Density Limit", Journal of Computational Physics, Vol. 210, No. 2, pp. 584-607, (2005).

- [4] Shapiro, E., and Drikakis, D., "Non-conservative and Conservative Formulations of Characteristics Numerical Reconstructions for Incompressible Flows", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 66, No. 9, pp. 1466-1482, (2006).
- [5] Mallinger, F., and Drikakis, D., "Instability in Three Dimensional, Unsteady Stenotic Flows", International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 23, No.5, pp. 657-663, (2002).
- [6] Drikakis, D., and Smolarkiewicz, P.K., "On Spurious Vertical Structures", Journal of Computational Physics, Vol. 172, No. 1, pp. 309-325, (2001).
- [7] Neofytou, P., "Revision of the Characteristic-based Scheme for Incompressible Flows", Journal of Computational Physics, Vol. 222, No. 2, pp. 475-484, (2007).
- [8] Zhao, Y., and Zhang, B., "A High-order Characteristics Upwind FV Method for Incompressible Flow and Heat Transfer Simulation on Unstructured Grids", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, No. 5-7, pp. 733-756, (2000).
- [9] Roe, P.L., "Approximate Riemann Solver, Parameter Vectors and Difference Schemes", Journal of Computational Physics, Vol. 135, No. 2, pp. 250-258, (1997).
- [10] Kwak, D., Kiris, C., and Kim, C.S., "Computational Challenges of Viscous Incompressible Flows", Computers and Fluids, Vol. 34, No. 3, pp. 283-299, (2004).
- [11] Jameson, A., "Analysis and Design of Numerical Schemes for Gas Dynamics 1 Artificial Diffusion, Upwind Biasing, Limiters and their Effect on Accuracy and Multi-grid Convergence", International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 4, pp. 171-218, (1995).
- [12] Kuehn, T.H. and Goldshtein, R.J., "Numerical Solution to the Naveir-Stokes Equations for Laminar Natural Convection about a Horizontal Isothermal Circular Cylinder", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 23, pp. 971-979, (1980).
- [13] Morgan, V.T., *"The Overall Convective Heat Transfer from Smooth Circular Cylinders"*, Academic Press, Inc., New York, (1975).
- [14] Saitoh, T., Sajik, T., and Maruhara, K., "Bench Mark Solutions to Natural Convection Heat Transfer Problems around a Horizontal Circular Cylinder", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 36, No. 5, pp. 1251-1259, (1993).
- [15] Wang, P., Kahawita, M., and Naguyen, T., "Numerical Computational of the Natural Convection Flow about a Horizontal Cylinder using Splines", Numerical Heat Transfer, Vol. 17, pp. 191-215, (1990).

### فهرست نمادهای انگلیسی

ماتریس ژاکوبین بی بعد	A
عدد کورانت	CFL
قطر استوانه (m)	D

بردار ویژه راست بی بعد	E
بردار شار جابجایی عمودی بی بعد	$F_N$
گرانش ( $\text{m}\cdot\text{sec}^{-2}$ )	G
عدد گرافش	Gr
عدد نوسلت	Nu
فشار (Pa) و فشار بی بعد	P, p
عدد پراتل	Pr
مولفه‌های لزج و رسانش گرمایی بی بعد	R, S
عدد رایلی	Ra
عدد رینولدز	Re
دما (K)	T
زمان بی بعد	t
مولفه‌های سرعت ( $\text{m}\cdot\text{sec}^{-1}$ ) و مولفه‌های سرعت بی بعد	U, V, u, v
بردار حالت بی بعد	W
مختصات فیزیکی (m) و مختصات بی بعد	X, Y, x, y
جمله چشمه	Z

### نمادهای یونانی

پارامتر تراکم‌پذیری مصنوعی	$\beta$
ضریب انبساط گرمایی ( $1/K$ )	$\beta'$
مقاومت موج مجازی بی بعد	$\alpha$
نفوذ گرمایی ( $\text{m}^2\cdot\text{sec}^{-1}$ )	$\alpha'$
زاویه بین بردار عمود و خط افقی در وجه سلول	$\zeta$
مساحت سلول‌های اولیه و ثانویه بی بعد	$\Omega, \Omega'$
لزجت سینماتیک ( $\text{m}^2\cdot\text{sec}^{-1}$ )	$\nu$
زمان (sec)	$\tau$
مقدار ویژه بی بعد	$\lambda$
چگالی ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	$\rho$
پارامتر میانگین‌گیری وزنی مشابه روش Roe	$\omega$
دمای بی بعد	$\theta$
موازی و عمود	N, P
محیط	$\infty$
چپ و راست	R, L

دیوار	W
متوسط	-

## Abstract

In this paper, a characteristic-based finite-volume solution of incompressible viscous flows to obtain accurate results and improve convergence rate and numerical stability has been developed. The artificial compressibility as a pre-conditioner has been taken into account in our investigation. The fifth-order Runge-Kutta scheme has been used for marching in time. The local time stepping and implicit residual smoothing as convergence acceleration techniques have been applied. The convective fluxes have been calculated by a Roe-like high-order flux splitting scheme. This method admits high CFL numbers and shows a good convergence rate and accuracy within a wide range of Rayleigh numbers from 1 to 10000 for natural convection flow around a horizontal circular cylinder as a case study. The results have been compared with available benchmark results in the literature. A good agreement exists between them.