

کنترل پیش‌بین غیرخطی برای ردیابی مسیر یک ربات بازودار سیار

حسین میرزائی نژاد^۱

استادیار

علی محمد شافعی^۲

دانشیار

در این مقاله به مدل‌سازی دینامیکی و کنترل ردیابی مسیر یک ربات دو لینکی با مفاصل دورانی سوار بر پایه سیار، پرداخته شده است. برای تحقق این هدف، معادلات حرکت برای سیستم ذکر شده در فرم بسته، با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل استخراج می‌شوند. سپس بر اساس رویکرد کنترل غیرخطی پیش‌بین، قوانین کنترل سینماتیکی و دینامیکی استخراج می‌شوند. قوانین کنترلی بهینه بر اساس کمینه کردن اختلاف بین پاسخ‌های مطلوب و پیش‌بینی شده خروجی‌های سیستم به صورت تحلیلی توسعه داده می‌شوند. در نهایت، نتایج حاصل از شبیه‌سازی یک ربات بازودار سیار در ردیابی مسیر مرجع همزمان پایه سیار و مجری نهایی در حضور نامعینی‌های پارامتریک، نشان از توانایی سیستم کنترلی طراحی شده در رسیدن به اهداف مورد نظر را دارد.

واژه های راهنما: ربات چرخ‌دار، فرمولاسیون گیبس-اپل، ردیابی، کنترل پیش‌بین غیرخطی

۱- مقدمه

با توجه به کاربرد وسیع منیپولاتورهای^۳ سیار در صنایع مختلف، از جمله عملیات‌های نظامی، فعالیت‌های کشاورزی و مأموریت‌های فضایی، مسئله مدل‌سازی و کنترل آن‌ها مورد توجه محققین قرار گرفته است. با وجود تحقیقات بسیار زیاد بر روی سینماتیک ربات‌های چرخ‌دار، مطالعات بسیار کمی در ارتباط با مدل‌سازی کلی دینامیکی این نوع سیستم‌های رباتیکی می‌توان یافت. امروزه فرمولاسیون نیوتون-اویلر و لاگرانژین از روش‌های رایجی هستند که برای استخراج معادلات حرکت پایه سیار چرخ‌دار استفاده می‌شوند. با این وجود، در بیشتر این کارهای تحقیقاتی، به دست آوردن مدل دقیق دینامیکی به طور نمادین کار بسیار دشواری است. علاوه بر این، معمولاً مدل‌سازی ریاضی این‌گونه از سیستم‌ها با فرض‌های ساده کننده‌ای همچون فرض حرکت صفحه‌ای و یا فرض وجود قیود هولونومیک همراه است [۴-۱]. حال آنکه، با در نظر گرفتن قیود غیرهولونومیک سیستم و استفاده از روش لاگرانژین، ضرایب لاگرانژ در معادلات حرکت ظاهر می‌شوند که به

^۱ نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران h_mirzaeinejad@uk.ac.ir

^۲ دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران shafei@uk.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۶/۰۴، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۰۳

سختی می‌توان آن‌ها را از فرم قیدی معادلات حرکت حذف نمود. برای اجتناب از محاسبه ضرایب لاگرانژ، ساها و آنجلس مفهوم ماتریس متعامد تکامل یافته را برای استخراج معادلات دینامیکی بدون قید توسعه دادند [۵]. وثوقی و همکاران از فرمولاسیون گیبس-اپل برای استخراج معادلات حرکت سیستم‌های رباتیکی شبه مار استفاده نمودند [۶]. تانر و همکاران با استفاده از فرمولاسیون کین یک مدل کامل برای استخراج معادلات حرکت منیپولاتورهای سیار ارائه کردند [۷]. با این وجود، تقریباً تمام تحقیقات ذکر شده در بالا، تنها به مدل‌سازی ریاضی پایه سیار بدون اتصال هیچ بازوی مکانیکی بر روی آن و همچنین بدون کنترل ردیابی مسیر مجری نهایی محدود شده‌اند.

یک منیپولاتور سیار یک سیستم مکانیکی است که از یک بازوی رباتیکی سوار بر پایه چرخ‌دار تشکیل شده است. حرکت‌های هم‌زمان پایه موبایل به‌صورت سریع و چابک در کنار قابلیت دستکاری بازوی‌های مکانیکی، عملکرد این‌گونه از سیستم‌های رباتیکی را به‌طرز چشمگیری افزایش می‌دهد. بنابراین این دسته از ربات‌ها به‌طور گسترده در عملیات‌های کاربردی می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند [۸-۹]. تأثیرات کوپلینگ دینامیکی بین پایه سیار غیرهولونومیک و بازوی مکانیکی هولونومیک، پیچیدگی مدل‌سازی دینامیکی این‌گونه از سیستم‌های رباتیکی را به‌طرز چشمگیری افزایش می‌دهد. از طرفی اگر تعداد لینک‌های بیشتری در ساختار منیپولاتور سیار استفاده شود، استخراج دستی معادلات دینامیکی سیستم، بسیار سخت و زمان‌بر می‌شود. بنابراین، برای اجتناب از استخراج دستی معادلات حرکت، ناگزیر به استفاده از فرمولاسیون بازگشتی جهت به‌دست آوردن معادلات حاکم هستیم. با اینکه تعداد الگوریتم‌های بسیار زیادی برای استخراج معادلات حرکت ربات‌های شبه زنجیره‌ای وجود دارد [۱۰-۱۲]، تعداد کمی از آن‌ها را می‌توان برای استخراج معادلات حرکت منیپولاتورهای سیار به‌فرم نمادین استفاده نمود [۱۳-۱۴]. اخیراً کورایم و همکاران به‌منظور استفاده از مزایای فرمولاسیون گیبس-اپل در استخراج معادلات حرکت سیستم‌های رباتیکی که در آن قیود هولونومیک و غیرهولونومیک با یکدیگر کوپل شده‌اند، یک الگوریتم بر پایه ماتریس‌های دورانی 3×3 ارائه نمودند [۱۵-۲۶]. این الگوریتم پیشنهادی، معادلات حرکت یک زنجیره از لینک‌های صلب و یا انعطاف‌پذیر که کل این مجموعه بر روی یک پایه سیار سوار شده است، را به‌دست می‌آورد. در حقیقت ایده اصلی این دو کار تحقیقاتی، از الگوریتم بازگشتی که توسط ماتا و همکارانش توسعه داده شد، نشأت می‌گیرد [۲۷].

این کار تحقیقاتی به استخراج معادلات دینامیک معکوس و مستقیم یک زنجیره از لینک‌های صلب که دارای پایه ثابت می‌باشند، محدود شده است. با این وجود، تمام این کارها به مدل‌سازی دینامیکی محدود شده، و در هیچ یک از آن‌ها سیستم کنترلی برای تعقیب مسیر پایه سیار و مجری نهایی طراحی نشده است. منیپولاتورهای سیار معمولاً سیستم‌های زیر تحریری هستند که تحت اثر قیود غیرهولونومیک قرار دارند. فرض عدم حرکت جانبی برای پایه سیار، منجر به پیدایش قیود سینماتیکی می‌شود که غیرقابل انتگرال‌گیری بوده و تحت عنوان قیود غیرهولونومیک شناخته می‌شوند. مشخصه اصلی سیستم‌های زیر تحریر این است که تعداد ورودی‌های کنترلی در آن‌ها کمتر از تعداد متغیرهای حالتی است که بایستی کنترل شوند. علاوه بر این، بر اساس تئوری براکت [۲۸]، طراحی قوانین کنترلی پایدار کننده برای کنترل حرکت این سیستم‌های غیرهولونومیک یک کار چالش برانگیز است. زیرا هیچ فیدبک حالت پیوسته‌ای را نمی‌توان برای پایدارسازی چنین سیستم‌هایی اعمال نمود. همچنین کوپلینگ دینامیکی بین پایه سیار و

منیپولاتور، در کنار معادلات غیرخطی پیچیده و وجود عدم قطعیت‌ها، چالش‌های کنترلی جذابی را برای تعقیب مسیر منیپولاتورهای سیار به وجود آورده است [۲۹-۳۰]. روش‌های مختلفی برای حل این مسئله در متون علمی مطرح شده است [۳۱-۳۳]. در مرجع [۳۴] یک کنترلر تعویض‌کننده کوپلینگ تطبیقی دینامیکی برای تعقیب مسیر مطلوب منیپولاتور سیار، متشکل از مفصل‌های ترکیبی در حضور عدم قطعیت‌ها توسعه داده شده است. بوکاتایا و همکاران یک کنترل‌کننده تطبیقی غیرفعال برای کنترل کردن یک منیپولاتور سیار با در نظر گرفتن قیود غیرهولونومیک حاکم بر سیستم، در حضور اغتشاشات و عدم قطعیت‌ها ارائه نمودند [۳۵]. چن و همکاران یک کنترل‌کننده مد لغزشی تطبیقی را که بر اساس روش برگشت به عقب است، برای افزایش مقاومت کنترل‌کننده تعقیب مسیر طراحی نمودند [۳۶]. در یک کار تحقیقاتی دیگر، یک کنترل‌کننده تعقیب مسیر تطبیقی و مقاوم، برای مقابله با عدم قطعیت‌های ساختاری و اغتشاشات خارجی سیستم طراحی شد [۳۷]. شجاعی یک کنترل‌کننده PID مقاوم تطبیقی برای کنترل حرکت یک کلاس کلی از سیستمی متشکل از n لینک صلب که بر روی پایه‌ای سیار که به صورت الکتریکی رانده می‌شود، ارائه کرد [۳۸]. در روش مطرح شده خطاهای حالت پایدار با ترکیب عملیات انتگرال‌گیری در طراحی کنترل‌کننده و مشاهده‌کننده، کاهش می‌یابند. شافعی و میرزایی یک کنترل‌کننده چند متغیره برای تعقیب مسیر پایه چرخ‌دار غیرهولونومیک با استفاده از رویکرد کنترل پیش‌بین غیرخطی به صورت تحلیلی توسعه دادند [۳۹]. این روش در حال حاضر توسط این محققان در زمینه کنترل دینامیک خودرو در حال توسعه است [۴۰-۴۳]. مشخصه اصلی قانون‌های کنترلی غیرخطی به فرم بسته که با استفاده از روش کنترل پیش‌بین به دست می‌آیند، آن است که برای پیاده‌سازی این قانون‌ها، به بهینه‌سازی برخط نیازی نیست. با این وجود، نتیجه تمامی این کارها فقط به پایه سیار محدود شده است؛ و لذا به تأثیرات کوپلینگ دینامیکی که با نصب بازوهای مکانیکی بر روی پایه سیار به وجود می‌آیند، اشاره‌ای نشده است.

در این مقاله، روش کنترل پیش‌بین غیرخطی برای کنترل ردیابی مسیر حرکت یک بازوی مکانیکی سیار که از یک پایه سیار با چرخ‌های غیرهولونومیک و دو بازوی مکانیکی با لینک صلب که توسط مفاصل دورانی بهم متصل شده‌اند، ارائه می‌شود. پس از مدل‌سازی سینماتیکی و دینامیکی سیستم رباتیکی مذکور، یک کنترل‌کننده سینماتیکی به صورت تحلیلی با یک فرآیند بهینه‌سازی استخراج می‌شود و پایداری این سیستم حلقه بسته ثابت می‌شود. همچنین در ادامه کنترل‌کننده دینامیکی نیز با استفاده از روش مشابه به دست می‌آید. سپس عملکرد روش کنترلی پیشنهادی با وجود عدم قطعیت‌ها از طریق شبیه‌سازی کامپیوتری مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۲- توصیف سیستم و مدل‌سازی

۲-۱- مدل سینماتیکی

در این بخش، سینماتیک یک ربات دو لینکی صلب که سوار بر پایه‌ای سیار است به دست خواهد آمد شکل (۱). دستگاه مختصات هر لینک (x_i, y_i, z_i) بر اساس قوانینی که توسط دناویت و هارتنبرگ توسعه یافته‌اند، جهت‌دهی می‌شود. علاوه بر این، دستگاه مختصات پایه سیار است، که مبدأ آن نقطه P است. به گونه‌ای که محور x_0 در امتداد محور تقارن پایه سیار، محور y_0 در امتداد محور دوران چرخ‌ها (به سمت

چرخ سمت چپ) و محور Z_0 دستگاه مختصات متعامد را کامل می‌کند. از طرفی، دستگاه مختصات $X_G Y_G Z_G$ دستگاہ مختصات متصل به زمین است و می‌توان آن را به‌عنوان چارچوب مرجع اینرسی در نظر گرفت [۴۴-۴۵]. برای مدل‌سازی ریاضی این مینیپولاتور رباتیکی با پایه سیار این فرض‌ها در نظر گرفته می‌شوند: ۱- چرخش چرخ‌ها بر روی زمین بدون لغزش است (غلطشی خالص). ۲- پایه سیار محدود به حرکت در صفحه‌ی $X_G O_G Y_G$ است. ۳- سرعت نقطه P تنها در امتداد محور تقارن پایه است تا شرط عدم سر خوردن را تضمین کند. بر اساس فرض آخر، سرعت مطلق نقطه P در دستگاه مختصات $X_0 Y_0 Z_0$ می‌تواند به‌صورت زیر توصیف شود [۴۶].

$${}^0\vec{v}_P = v_P {}^0\vec{x}_0 \quad (1)$$

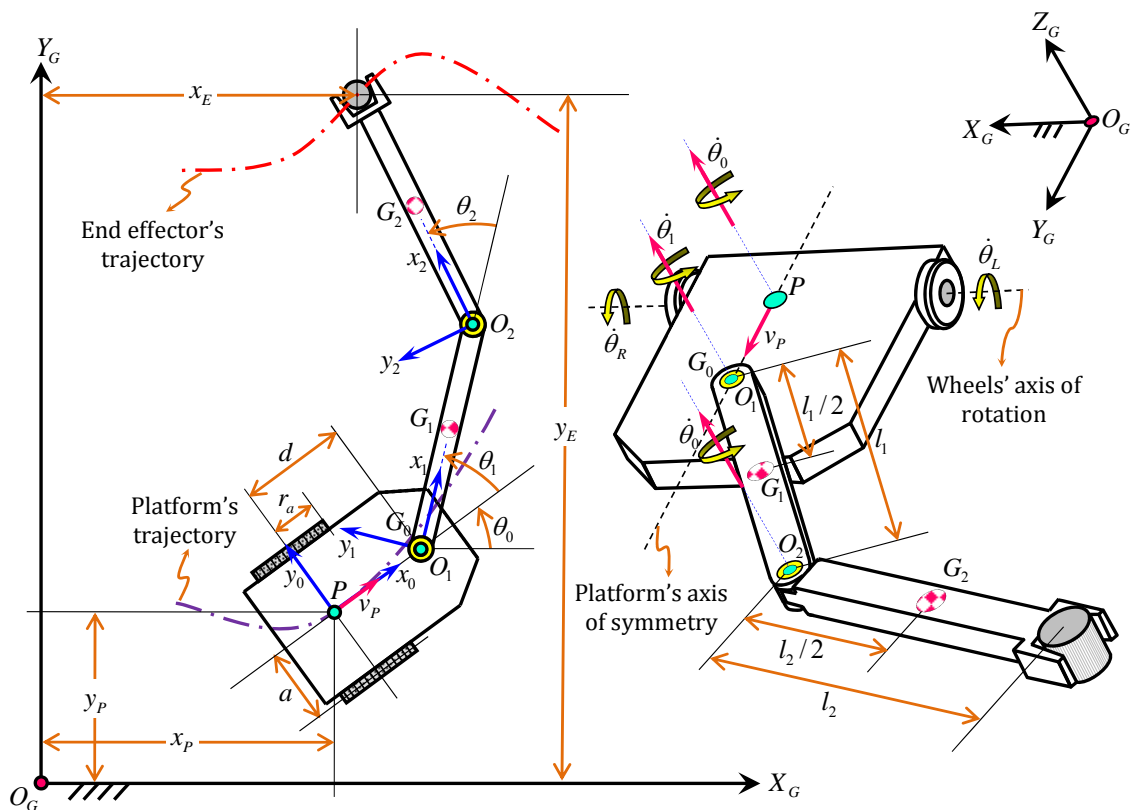
که ${}^0\vec{x}_0 = \{1 \ 0 \ 0\}^T$ و همچنین سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای پایه سیار و هر لینک مینیپولاتور که در چارچوب مرجع محلی خودشان تعریف می‌شوند، به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$${}^0\vec{\omega}_0 = \dot{\theta}_0 {}^0\vec{z}_0 \quad (2)$$

$${}^0\dot{\vec{\omega}}_0 = \ddot{\theta}_0 {}^0\vec{z}_0 \quad (3)$$

$${}^i\vec{\omega}_i = {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i {}^i\vec{z}_i \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

$${}^i\dot{\vec{\omega}}_i = {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1} + {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times \dot{\theta}_i {}^i\vec{z}_i + \ddot{\theta}_i {}^i\vec{z}_i \quad i = 1, 2 \quad (5)$$



شکل ۱- ربات بازودار سیار

که ${}^i Z_i = \{0 \ 0 \ 1\}^T$ است و ${}^i R_{i-1}$ ماتریس دورانی است که جهت‌گیری دستگاه مختصات مرجع محلی جسم $i-1$ ام را $(x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1})$ نسبت به دستگاه مختصات مرجع محلی جسم i ام نشان می‌دهد [۴۷]. از طرفی، به دلیل اینکه روش ارائه شده در این مقاله بر اساس فرمولاسیون گیبس-اپل است، شتاب مطلق نقطه P مورد نیاز بوده که از مشتق‌گیری معادله (۱) نسبت به زمان به دست می‌آید:

$${}^0 \dot{v}_P = \dot{v}_P {}^0 \vec{x}_0 + v_P \dot{\theta}_0 {}^0 \vec{y}_0 \quad (۶)$$

که در آن ${}^0 \vec{y}_0 = \{0 \ 1 \ 0\}^T$ است. حال با داشتن ${}^0 \dot{v}_P$ ، شتاب مطلق پایه و مرکز جرم چرخ‌ها (G_0) و همچنین شتاب مطلق مرکز جرم لینک‌ها (G_i) که در دستگاه مختصات محلی خودشان توصیف شده‌اند، به صورت زیر بیان می‌شوند.

$${}^0 \dot{v}_{G_0} = (v_P - d\dot{\theta}_0^2) {}^0 \vec{x}_0 + (v_P \dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0) {}^0 \vec{y}_0 \quad (۷)$$

$${}^i \dot{v}_{G_i} = {}^i \dot{v}_{O_i} + {}^i \vec{\omega}_i \times ({}^i \vec{\omega}_i \times {}^i \vec{r}_{G_i/O_i}) + {}^i \vec{\omega}_i \times {}^i \vec{r}_{G_i/O_i} \quad i = 1, 2 \quad (۸)$$

که در روابط بالا d فاصله بین نقطه P و G_0 است. همچنین ${}^i \vec{r}_{G_i/O_i} = \{l_i / 2 \ 0 \ 0\}^T$ بردار مکان مرکز جرم لینک i ام نسبت به مبدأ دستگاه مختصات $x_i y_i z_i$ است. در پایان ${}^i \dot{v}_{O_i}$ شتاب مطلق مبدأ دستگاه مختصات مرجع محلی لینک i ام (O_i) است. همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، چرخ‌های پایه سیار بدون لغزش بر روی زمین می‌غلطند (غلطش بدون لغزش). بنابراین سرعت مطلق مرکز چرخ‌های سمت راست و چپ در دستگاه مختصات مرجع محلی متصل به پایه سیار $(x_0 y_0 z_0)$ ، به صورت زیر ارائه می‌شوند.

$${}^0 \vec{v}_{L/R} = \dot{\theta}_{L/R} {}^0 \vec{y}_0 \times r_a {}^0 \vec{z}_0 = r_a \dot{\theta}_{L/R} {}^0 \vec{x}_0 \quad (۹)$$

که در آن \times اپراتور ضرب خارجی است. همچنین شعاع چرخ‌ها و θ_L و θ_R به ترتیب سرعت زاویه‌ای چرخ‌های سمت چپ و راست در امتداد محور دوران چرخ‌ها را نشان می‌دهند. سرعت مرکز چرخ‌های سمت چپ یا راست به صورت زیر نیز محاسبه می‌شود.

$${}^0 \vec{v}_{L/R} = {}^0 \vec{v}_P + \dot{\theta}_0 {}^0 \vec{z}_0 \times (\pm a {}^0 \vec{y}_0) = (v_P \mp a \dot{\theta}_0) {}^0 \vec{x}_0 \quad (۱۰)$$

که a فاصله بین نقطه P و مرکز چرخ‌ها است. با مساوی قرار دادن روابط (۹) و (۱۰)، معادله‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\dot{\theta}_{L/R} = \frac{1}{r_a} (v_P \mp a \dot{\theta}_0) \quad (۱۱)$$

همان‌طور که گفته شد، تأکید این مقاله استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل برای به دست آوردن معادلات حرکت این سیستم رباتیکی است. لذا شتاب زاویه‌ای چرخ‌های سمت چپ و راست با مشتق‌گیری از معادله (۱۱) نسبت به زمان به صورت رابطه (۱۲) به دست می‌آید.

$$\ddot{\theta}_{L/R} = \frac{1}{r_a} (\dot{v}_P \mp a \ddot{\theta}_0) \quad (۱۲)$$

در بخش بعدی، فرمولاسیون توسعه داده شده در بالا برای به دست آوردن تابع گیبس کل سیستم، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۲- مدل دینامیکی

فرمولاسیون گیبس-اپل از یک تابع اسکالر تحت عنوان تابع گیبس یا انرژی شتاب برای به‌دست آوردن معادلات حرکت حاکم بر یک سیستم مکانیکی استفاده می‌کند. برای نیل به این هدف، باید یک دسته شبه‌سرعت‌های مستقل انتخاب شوند. بعد از تشکیل تابع گیبس با استفاده از ترم‌های شتاب، از این تابع نسبت به شبه‌شتاب‌ها (مشتق شبه‌سرعت‌ها نسبت به زمان) مشتق‌گیری می‌شود. در نهایت، با مساوی قرار دادن نتایج به‌دست آمده در مرحله قبل با نیروهای تعمیم‌یافته بر حسب شبه‌سرعت‌ها، معادلات حاکم بر حرکت سیستم به‌دست می‌آیند. به‌راحتی می‌توان اثبات کرد که تابع گیبس برای یک جسم صلب به‌فرم زیر ارائه می‌گردد.

$$S = \frac{1}{2} m \vec{a}_G^T \cdot \vec{a}_G + \frac{1}{2} \dot{\vec{\omega}}^T \cdot I_G \dot{\vec{\omega}} + \dot{\vec{\omega}}^T \cdot \tilde{\omega} I_G \tilde{\omega} \quad (13)$$

در معادله بالا، m و I_G به‌ترتیب جرم و ممان اینرسی جرمی حول مرکز جرم هستند. همچنین \vec{a}_G شتاب مرکز جرم جسم صلب مورد مطالعه، و $\vec{\omega}$ و $\dot{\vec{\omega}}$ به‌ترتیب سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای جسم صلب، و $\tilde{\omega}$ ماتریس پاد متقارن مربوط به بردار $\vec{\omega}$ است. سیستم مذکور که در شکل (۱) نشان داده شده است، از پنج جسم صلب، شامل یک پایه، دو چرخ متحرک و دو لینک صلب تشکیل شده است. از طرفی چون جرم چرخ‌های سمت چپ و راست با جرم پایه جمع می‌شوند، G_0 نماینده مرکز جرم مجموعه چرخ‌ها و پایه است. بنابراین با استفاده از معادله (۱۳)، تابع گیبس منیپولاتور سیار به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$S = \sum_{i=0}^2 \left[\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{v}}_{G_i}^T \cdot \dot{\vec{v}}_{G_i} + \frac{1}{2} \dot{\vec{\omega}}_i^T \cdot I_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i + \dot{\vec{\omega}}_i^T \cdot \tilde{\omega}_i I_{G_i} \tilde{\omega}_i \right] + \frac{1}{2} I_w (\ddot{\theta}_R^2 + \ddot{\theta}_L^2) \quad (14)$$

که در آن m_0 و I_{G_0} به‌ترتیب جرم کلی پایه و چرخ‌ها، و ممان اینرسی جرمی این مجموعه را حول محور عمودی گذرنده از مرکز جرم G_0 نشان می‌دهند. همچنین m_i جرم لینک i ام و I_{G_i} ممان اینرسی جرمی لینک i ام حول محور عمودی گذرنده از مرکز جرم G_i را نشان می‌دهند. از طرفی I_w بیانگر ممان اینرسی جرمی چرخ‌های سمت چپ و راست حول محور دورانشان است. با جایگزین کردن معادلات (۷)، (۸) و همچنین (۱۲) در رابطه (۱۴) تابع گیبس کل سیستم بر حسب یک دسته از شبه‌شتاب‌های مستقل $\dot{v}_p, \dot{\theta}_i, (i = 0, \dots, 2)$ به‌دست می‌آید. جهت اجتناب از طولانی شدن مقاله، این تابع اسکالر در پیوست (معادله الف-۱) ارائه شده است. همچنین، در روش گیبس-اپل، معادلات حرکت با مشتق‌گیری از تابع گیبس نسبت به شبه‌شتاب‌های مستقل به‌دست می‌آیند.

بنابراین روابط $\partial S / \partial \dot{v}_p$ و $\partial S / \partial \dot{\theta}_i, (i = 0, \dots, 2)$ باید محاسبه شوند. این عبارات نیز در پیوست (معادلات الف-۲ تا الف-۵) آورده شده‌اند. معادلات حرکت حاکم بر سیستم رباتیکی مذکور با در نظر گرفتن نیروهای تعمیم‌یافته بر حسب شبه‌سرعت‌ها به‌دست می‌آیند. حال با فرض اینکه تنها گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم شامل τ_R و τ_L (که به‌ترتیب به چرخ‌های سمت چپ و راست اعمال می‌شوند) و $\tau_i (i = 1, 2)$ ها (گشتاور اعمالی به مفاصل بازوها) باشند، آنگاه کار تعمیم‌یافته وارد بر سیستم بر حسب این گشتاورهای خارجی به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$U = \dot{\theta}_R \tau_R + \dot{\theta}_L \tau_L + \dot{\theta}_1 \tau_1 + \dot{\theta}_2 \tau_2 \quad (15)$$

با جایگزین کردن معادله (۱۱) در معادله (۱۵)، عبارت زیر برای کار تعمیم‌یافته کل سیستم بر حسب شبه‌سرعت‌ها به دست می‌آید.

$$U = \frac{1}{r_a} (v_p + a\dot{\theta}_0)\tau_R + \frac{1}{r_a} (v_p - a\dot{\theta}_0)\tau_L + \dot{\theta}_1\tau_1 + \dot{\theta}_2\tau_2 \quad (۱۶)$$

برای به دست آوردن نیروهای تعمیم‌یافته که بر اثر اعمال گشتاورهای خارجی به وجود آمده‌اند، تنها کافی است از معادله (۱۶) نسبت به شبه‌سرعت‌ها مشتق‌گیری شود:

$$\frac{\partial U}{\partial v_p} = \frac{1}{r_a} (\tau_R + \tau_L) \quad (۱۷)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}_0} = \frac{a}{r_a} (\tau_R - \tau_L) \quad (۱۸)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}_1} = \tau_1 \quad (۱۹)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}_2} = \tau_2 \quad (۲۰)$$

حال، معادلات حرکت سیستم رباتیکی مذکور به فرم دینامیک معکوس به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{v}_p} = \frac{\partial U}{\partial v_p} \quad (۲۱)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}_0} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}_0} \quad (۲۲)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}_1} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}_1} \quad (۲۳)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}_2} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}_2} \quad (۲۴)$$

معادلات بالا به فرم دینامیک معکوس می‌باشند. در ادامه با نوشتن این معادلات به فرم دینامیک مستقیم زمینه برای شبیه‌سازی این دسته از معادلات آماده خواهد شد.

برای کنترل کردن این سیستم رباتیکی، مطلوب است که ضرایب شبه‌شتاب‌ها در سمت چپ علامت تساوی، و اثرات دینامیکی باقی‌مانده یعنی $\vec{Re}(\Theta, \dot{\Theta})$ که شامل نیروهای گرانشی، گریز از مرکز، کریولیس و نیروهای تعمیم‌یافته اعمالی بر سیستم ($\vec{\tau}$) هستند، در سمت راست علامت تساوی مرتب شوند. با ارائه این معادلات دیفرانسیلی به فرم ماتریسی، معادلات حرکت به صورت دینامیک مستقیم به شکل زیر به دست می‌آیند.

$$I(\vec{\Theta})\ddot{\vec{\Theta}} = \vec{Re}(\vec{\Theta}, \dot{\vec{\Theta}}) + \vec{\tau} \quad (۲۵)$$

که در آن $I(\vec{\Theta})$ ماتریس اینرسی کل سیستم (شامل پایه سیار و لینک‌ها) است. همچنین $\ddot{\vec{\Theta}}$ بردار مربوط به شبه‌شتاب‌ها را نشان می‌دهد. مؤلفه‌های معادله‌ی (۲۵) به صورت زیر ارائه می‌گردند.

$$I(\vec{\Theta}) = \begin{bmatrix} I_{1,1} & \cdots & I_{1,4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{symmetric} & \cdots & I_{4,4} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\vec{\ddot{\Theta}} = \{\ddot{v}_p \quad \ddot{\theta}_0 \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_2\}^T \quad (27)$$

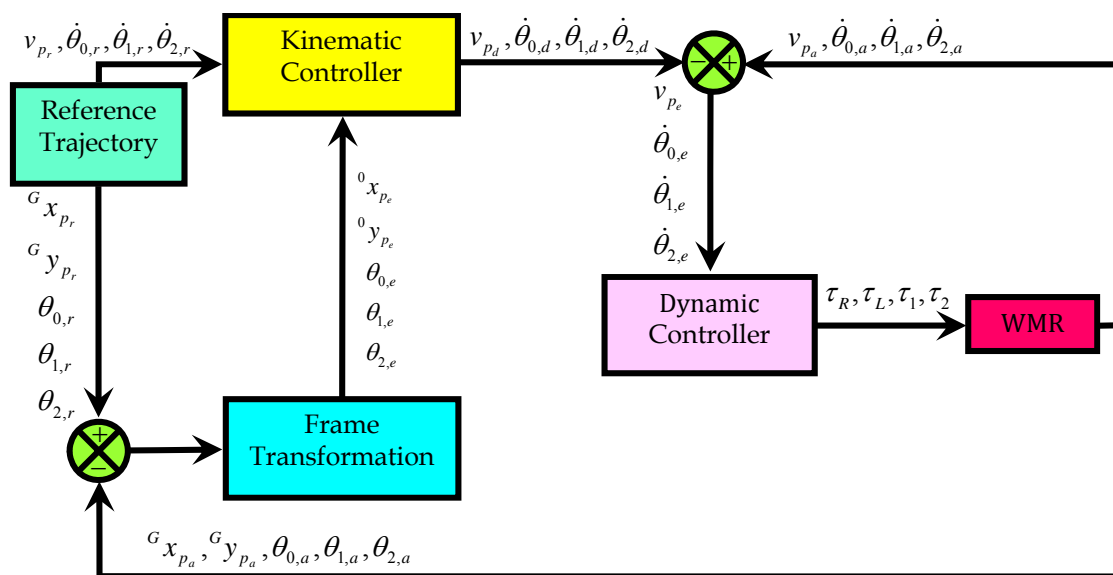
$$\vec{\tau} = \left\{ \frac{1}{r_a}(\tau_R + \tau_L) \quad \frac{a}{r_a}(\tau_R - \tau_L) \quad \tau_1 \quad \tau_2 \right\}^T \quad (28)$$

$$\vec{Re}(\vec{\Theta}, \vec{\dot{\Theta}}) = \{Re_{\dot{v}_p} \quad Re_{\ddot{\theta}_0} \quad Re_{\ddot{\theta}_1} \quad Re_{\ddot{\theta}_2}\}^T \quad (29)$$

که در آن $Re_{\ddot{\theta}_j}, j = 0, \dots, 2$ و $Re_{\dot{v}_p}$ به ترتیب از معادلات (۲۱) تا (۲۴) پس از کنار هم قرار دادن تمامی ترم‌هایی که شامل شبه شتاب‌ها نمی‌شوند، به دست خواهند آمد. عناصر ماتریس اینرسی و ترم‌های دینامیکی باقی‌مانده در پیوست (معادلات الف-۶ تا الف-۲۵) آورده شده‌اند.

۳- طراحی سیستم کنترلی

شکل (۲) نمودار بلوکی مربوط به کنترل‌کننده‌های سینماتیکی و دینامیکی را نشان می‌دهد، که برای کنترل مسئله تعقیب مسیر منیپولاتور سیار مذکور ارائه شده است. هدف اصلی این سیستم کنترلی، تعیین مقدار گشتاورهای ورودی است که بایستی به چرخ‌های سمت چپ و راست (τ_R, τ_L) و همچنین به مفاصل منیپولاتور (τ_1, τ_2) اعمال شوند. تحت این شرایط پایه سیار و مجری نهایی ربات واقعی می‌توانند مسیر مرجع پایه سیار و مجری نهایی را تعقیب کنند.



شکل ۲- دیاگرام بلوکی سیستم کنترلی

براساس شکل (۲) قانون کنترلی ارائه شده از دو مرحله تشکیل شده است. مرحله اول، یک کنترل کننده سینماتیکی برای پیدا کردن سرعت‌های ورودی مناسب به گونه‌ای طراحی شده است، که می‌تواند خطاهای مکان سیستم $({}^0x_{P,e}, {}^0y_{P,e}, \theta_{0,e}, \theta_{1,e}, \theta_{2,e})$ را به صفر برساند. مرحله دوم، یک کنترل کننده دینامیکی برای به دست آوردن گشتاورهای کنترلی اعمالی به چرخ‌ها و مفاصل منیپولاتور به گونه‌ای طراحی شده است که سرعت‌های خطی و زاویه‌ای ربات $(v_P, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ را به سرعت‌های ورودی خطی و زاویه‌ای مطلوب $(v_{P,d}, \dot{\theta}_{0,d}, \dot{\theta}_{1,d}, \dot{\theta}_{2,d})$ که از کنترل کننده سینماتیکی به دست آمده اند، همگرا کند.

۳-۱- فرمولاسیون خطای مسیر

به منظور طراحی کنترل کننده سینماتیکی برای سیستم رباتیکی مذکور، خطای ردیابی برای کل سیستم (پایه سیار و منیپولاتور) باید محاسبه شود. شکل (۳) مسیر واقعی و مسیر مرجع پایه سیار و مجری نهایی را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، اختلاف بین موقعیت مرجع و موقعیت واقعی پایه سیار (یعنی نقطه P) توسط بردار ${}^0\vec{r}_{P_e}$ مشخص می‌شود، که توصیف آن در دستگاه مختصات محلی متصل به پایه سیار $(x_0y_0z_0)$ به صورت زیر است.

$${}^0\vec{r}_{P_e} = {}^0R_G ({}^G\vec{r}_{P_r} - {}^G\vec{r}_{P_a}) = {}^0x_{P_e} {}^0\vec{x}_0 + {}^0y_{P_e} {}^0\vec{y}_0 \quad (30)$$

که در آن 0R_G ماتریس دورانی است که جهت‌گیری دستگاه مختصات $X_GY_GZ_G$ را نسبت به دستگاه مختصات $x_0y_0z_0$ نشان می‌دهد. از طرفی خطاهای جهت‌گیری بین موقعیت‌های زاویه‌ای مرجع و واقعی پایه سیار یعنی $\theta_{0,e}$ و لینک اول و دوم یعنی $\theta_{1,e}$ و $\theta_{2,e}$ به صورت زیر ارائه می‌شوند.

$$\theta_{0,e} = \theta_{0,r} - \theta_{0,a} \quad (31)$$

$$\theta_{1,e} = \theta_{0,e} + (\theta_{1,r} - \theta_{1,a}) \quad (32)$$

$$\theta_{2,e} = \theta_{1,e} + (\theta_{2,r} - \theta_{2,a}) \quad (33)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۳۰) نسبت به زمان، اختلاف بین سرعت مرجع نقطه P و سرعت واقعی این نقطه که در دستگاه مختصات $x_0y_0z_0$ توصیف شده است، به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$${}^0\dot{\vec{r}}_{P_e} = {}^0\dot{\vec{v}}_{P_e} = ({}^0\dot{x}_{P_e} - {}^0y_{P_e} \dot{\theta}_{0,a}) {}^0\vec{x}_0 + ({}^0\dot{y}_{P_e} + {}^0x_{P_e} \dot{\theta}_{0,a}) {}^0\vec{y}_0 \quad (34)$$

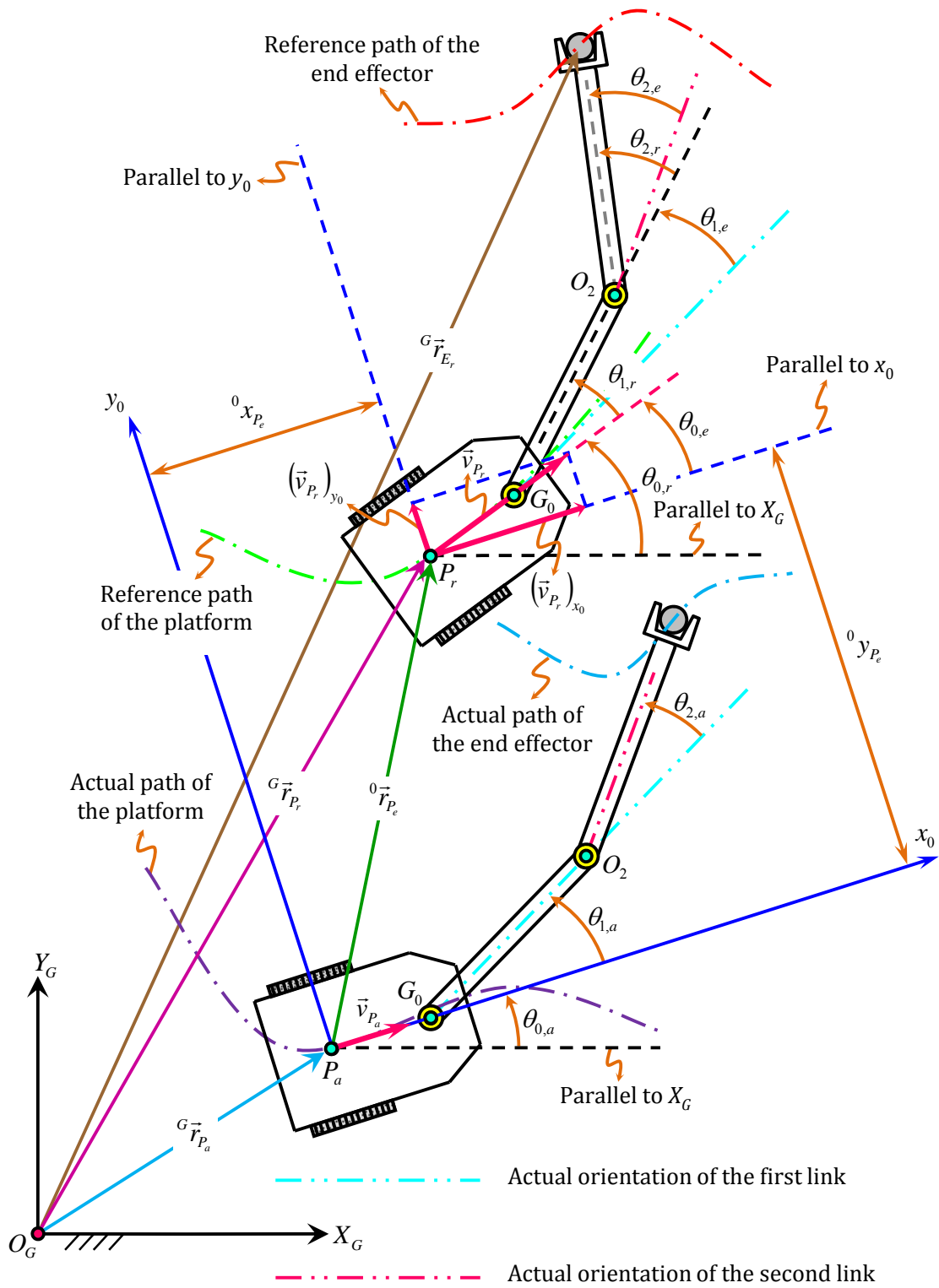
مطابق با شکل (۳)، اختلاف بین سرعت مرجع و سرعت واقعی نقطه P ، توصیف شده در دستگاه مختصات $x_0y_0z_0$ می‌تواند به صورت زیر نیز به دست آید.

$$\begin{aligned} {}^0\dot{\vec{v}}_{P_e} &= {}^0\dot{\vec{v}}_{P_r} - {}^0\dot{\vec{v}}_{P_a} \\ &= (v_{P_r} \cos \theta_{0,e} - v_{P_a}) {}^0\vec{x}_0 + (v_{P_r} \sin \theta_{0,e} - 0) {}^0\vec{y}_0 \end{aligned} \quad (35)$$

دینامیک خطای مربوط به مکان پایه سیار را می‌توان با مساوی قرار دادن معادله (۳۴) و معادله (۳۵) به صورت زیر به دست آورد.

$${}^0\dot{x}_{P_e} = v_{P_r} \cos \theta_{0,e} - v_{P_a} + {}^0y_{P_e} \dot{\theta}_{0,a} \quad (36)$$

$${}^0\dot{y}_{P_e} = v_{P_r} \sin \theta_{0,e} - {}^0x_{P_e} \dot{\theta}_{0,a} \quad (37)$$



شکل ۳- موقعیت‌های واقعی و مرجع ربات بازو دار سیار

در حالی که دینامیک خطای جهت‌گیری مربوط به پایه سیار و بازوها را می‌توان با مشتق‌گیری از روابط (۲۹) و (۳۰) نسبت به زمان به‌دست آورد.

$$\dot{\theta}_{0,e} = \dot{\theta}_{0,r} - \dot{\theta}_{0,a} \quad (38)$$

$$\dot{\theta}_{1,e} = \dot{\theta}_{0,e} + (\dot{\theta}_{1,r} - \dot{\theta}_{1,a}) \quad (39)$$

$$\dot{\theta}_{2,e} = \dot{\theta}_{1,e} + (\dot{\theta}_{2,r} - \dot{\theta}_{2,a}) \quad (40)$$

معادلات (۳۶) تا (۴۰)، که به عنوان معادلات دینامیک خطای مسیر شناخته می‌شوند، برای طراحی کنترل کننده سینماتیکی در بخش بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۳-۲- توسعه قوانین کنترلی سینماتیکی

در این بخش یک کنترل کننده سینماتیکی غیرخطی با استفاده از روش کنترل پیش‌بین طراحی خواهد شد. بدین منظور روابط (۳۶) تا (۴۰) به فرم فضای حالت به صورت زیر ارائه می‌شوند.

$$\dot{x}_1 = v_{P_r} \cos x_3 - u_1 + x_2 u_2 \quad (41)$$

$$\dot{x}_2 = v_{P_r} \sin x_3 - x_1 u_2 \quad (42)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta}_{0,r} - u_2 \quad (43)$$

$$\dot{x}_4 = \dot{x}_3 + (\dot{\theta}_{1,r} - u_3) \quad (44)$$

$$\dot{x}_5 = \dot{x}_4 + (\dot{\theta}_{2,r} - u_4) \quad (45)$$

که در آن‌ها $\vec{x} = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5\}^T = \{x_{P_e} \ y_{P_e} \ \theta_{0,e} \ \theta_{1,e} \ \theta_{2,e}\}^T$ بردار مربوط به متغیرهای حالت است. همچنین $\vec{u} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4\}^T = \{v_p \ \dot{\theta}_0 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2\}^T$ بردار مربوط به ورودی‌های کنترلی است. از آنجایی که تعداد ورودی‌های کنترلی از تعداد متغیرهای حالت که باید کنترل شوند، کمتر هستند، لذا سیستم رباتیکی مورد نظر، یک سیستم زیرتحرک محسوب می‌شود. هدف این بخش، پایدارسازی این سیستم رباتیکی زیرتحرک (که توسط روابط (۴۱) تا (۴۵) توصیف شده است) با به دست آوردن قوانین کنترلی مناسب به نحوی که $t \rightarrow \infty$ آنگاه $\vec{x} \rightarrow \vec{0}$ می‌باشد. در مسائل پایدارسازی، توابع خروجی را می‌توان به صورتی انتخاب نمود که کنترل کننده فیدبک طراحی شده، سیستم را پایدار سازد [۴۸]. از این روی، با توجه به مدل فضای حالت سیستم مورد مطالعه، توابع خروجی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$y_1 = x_1 - \beta x_2 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{0,r}) \quad (46)$$

$$y_2 = x_3 \quad (47)$$

$$y_3 = x_4 \quad (48)$$

$$y_4 = x_5 \quad (49)$$

که در آن $\operatorname{sgn}(\cdot)$ تابع علامت است و همچنین β یک ثابت مثبت است. حال با توسعه رویکرد کنترل کننده پیش‌بین غیرخطی، یک کنترل کننده چند متغیره غیرخطی به گونه‌ای طراحی خواهد شد، که باعث همگرا شدن خروجی‌های سیستم به سمت صفر شود. در این روش، خروجی‌های سیستم برای بازه زمانی بعدی با

استفاده از بسط سری تیلور پیش‌بینی می‌شوند. همچنین ورودی‌های کنونی کنترلی با کمینه کردن پیوسته خطاهای مسیر پیش‌بینی شده به‌دست می‌آیند. بدین منظور، برای مسئله پایداری مورد مطالعه، تابع هدف نقطه‌ای درجه دومی به‌صورت زیر تعریف می‌گردد [۴۹-۵۲].

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 w_i y_i^2(t+h) \quad (50)$$

که در آن، افق پیش‌بین h یک عدد مثبت حقیقی است و w_i ها نماینده ضرایب وزنی هستند. در اینجا بایستی به این نکته اشاره شود که تکنیک کنترل ارزان برای حل مسئله پیش‌رو در نظر گرفته شده است؛ زیرا برای ورودی‌های کنترلی در تابع هدف یعنی معادله (۵۰) هیچ وزنی در نظر گرفته نشده است. با اعمال این استراتژی، ردیابی کامل مسیر، بدون هیچ محدودیتی بر روی ورودی‌های کنترلی انجام می‌شود [۵۳]. بسط سری تیلور برای پیش‌بینی خروجی‌ها در زمان $t+h$ استفاده می‌شود. پاسخ پیش‌بینی شده برای خروجی‌ها در بازه زمانی بعدی با استفاده از q_i امین مرتبه سری تیلور در زمان t تخمین زده می‌شوند.

$$y_i(t+h) = y_i(t) + h\dot{y}_i(t) + \frac{h^2}{2!}\ddot{y}_i(t) + \frac{h^{q_i}}{q_i!}y_i^{(q_i)}(t) \quad (51)$$

در ادامه، مسئله اصلی انتخاب مرتبه بسط q برای خروجی‌های سیستم است به‌طوری که با اهداف طراحی کنترل‌کننده بر اساس پیش‌بینی متناسب باشد. معمولاً مرتبه بسط که مشخص‌کننده بالاترین مرتبه مشتق خروجی استفاده شده در پیش‌بینی است، به جمع درجه نسبی سیستم غیرخطی و مرتبه کنترلی انتخاب شده محدود می‌گردد [۵۴]. همچنین، درجه نسبی از معادلات دینامیکی سیستم غیرخطی قابل حصول بوده و برابر با پایین‌ترین مرتبه مشتق خروجی است که در آن ورودی کنترلی برای اولین بار به‌طور صریح در معادلات ظاهر می‌شود [۴۸]. با توجه به معادلات سیستم (۴۱) تا (۴۵)، خروجی‌های سیستم دارای درجه نسبی یک، $\rho = 1$ ، می‌باشند. از طرف دیگر برای رسیدن به یک انرژی کنترلی پایین و جلوگیری از پیچیدگی قانون کنترلی، مرتبه کنترلی در اینجا به حداقل ممکن یعنی صفر محدود می‌شود. این انتخاب، یعنی مرتبه کنترلی صفر، باعث می‌شود که انرژی کنترلی در یک بازه زمان پیش‌بینی ثابت مانده و مشتقات ورودی کنترلی در پیش‌بینی خروجی ظاهر نشود.

$$\frac{d}{d\tau} u(t+\tau) = 0 \quad \text{for } \tau \in [0, h] \quad (52)$$

انتخاب مرتبه کنترلی صفر برای سیستم‌های غیرخطی با درجات نسبی پایین مناسب می‌باشد [۵۴]. به‌طور معمول، مرتبه کنترل به‌عنوان یک پارامتر آزاد بوده و متناسب با مشخصات سیستم کنترلی و محدودیت‌های انرژی کنترلی توسط طراح تعیین می‌گردد. بدین ترتیب با توجه به دلایل فوق، سری مرتبه اول متناسب با درجه نسبی سیستم برای بسط خروجی‌های سیستم کافی می‌باشد.

$$y_i(t+h) = y_i(t) + h\dot{y}_i(t) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (53)$$

با جایگذاری معادلات خروجی و مشتقات آن‌ها در معادله (۵۳) و سپس با جایگزینی نتیجه حاصله در معادله (۵۰)، تابع هدف توسعه یافته‌ای که تابعی از ورودی‌های کنترلی سیستم است، به‌دست خواهد آمد.

در ادامه قوانین کنترلی بهینه برای $u_i(t)$ ($i = 1, \dots, 4$) ها، با مینیمم کردن تابع هدف (معادله (۵۰)) به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1, \dots, 4 \quad (54)$$

بعد از اعمال عملیات جبری، معادلات زیر برای ورودی‌های کنترلی به دست می‌آیند.

$$u_1 = \frac{1}{h} \left(x_1 - \beta x_2 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{0,r}) + (x_2 + \beta x_1 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{0,r})) (x_3 + h\dot{\theta}_{0,r}) + hv_{Pr} (\cos x_3 - \beta \sin x_3 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{0,r})) \right) \quad (55)$$

$$u_2 = \frac{1}{h} (x_3 + h\dot{\theta}_{0,r}) \quad (56)$$

$$u_3 = \dot{\theta}_{1,r} + \frac{1}{h} (x_4 - x_3) \quad (57)$$

$$u_4 = \dot{\theta}_{2,r} + \frac{1}{h} (x_5 - x_4) \quad (58)$$

در اینجا بایستی به این نکته اشاره شود که برای به دست آوردن ورودی‌های کنترلی، ضرایب وزنی برای تمامی متغیرهای حالت برابر یک در نظر گرفته شد تا بر اهمیت یکسان برای تمامی خطاهای ردیابی تأکید شود؛ یعنی $w_i = 1, (i = 1, \dots, 4)$. در ادامه، ثابت می‌شود که سیستم حلقه بسته‌ای که توسط معادلات حالت (۴۱) تا (۴۵) و قوانین کنترلی (۵۵) تا (۵۸) تعریف شده است، برای هر $h > 0$ خطی و به صورت نمایی پایدار است؛ به شرط آنکه سرعت زاویه‌ای مرجع پایه سیار یعنی $\dot{\theta}_{0,r} \neq 0$ باشد. بدین منظور با جایگزین کردن روابط (۴۱) و (۴۲) در فرم مشتق خروجی اول (یعنی معادله (۴۶)) رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 - \beta \dot{x}_2 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{0,r}) \\ &= -u_1 + u_2 (x_2 + \beta x_1 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{0,r})) + v_{Pr} (\cos x_3 - \beta \sin x_3 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{0,r})) \end{aligned} \quad (59)$$

با جایگزین کردن قوانین کنترلی (۵۵) و (۵۶) در معادله (۵۹) رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\dot{y}_1 + \frac{1}{h} y_1 = 0 \quad (60)$$

با ادامه همین فرآیند برای دیگر خروجی‌ها، یعنی $y_i, (i = 2, \dots, 4)$ معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$\dot{y}_i + \frac{1}{h} y_i = 0 \quad i = 2, \dots, 4 \quad (61)$$

معادلات (۶۰) و (۶۱) خطی و نامتغیر نسبت به زمان هستند. لذا سیستم حلقه بسته برای هر $h > 0$ به صورت نمایی پایدار است. همچنین نتیجه‌گیری زیر را نیز می‌توان به دست آورد.

$$\text{if } t \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} y_1 \rightarrow 0 & \Rightarrow x_1 \rightarrow \beta x_2 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{0,r}) \\ y_i \rightarrow 0 & \Rightarrow x_{i+1} \rightarrow 0 \quad i = 2, \dots, 4 \end{cases} \quad (62)$$

حال با جایگزین کردن قوانین کنترلی (۵۵) تا (۵۸) در روابط (۴۱) تا (۴۵) و با اعمال نتیجه‌گیری به‌دست آمده در معادله (۶۲)، معادلات زیر به‌دست می‌آیند.

$$\dot{x}_i + \beta \dot{\theta}_{0,r} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{0,r}) x_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (63)$$

$$\dot{x}_i + \frac{1}{h} x_i = 0 \quad i = 3, \dots, 5 \quad (64)$$

معادلات (۶۳) و (۶۴) برای هر $h > 0$ و $\dot{\theta}_{0,r} \neq 0$ به‌صورت نمایی پایدار هستند. علاوه بر این تمام متغیرها به صفر همگرا شده و هدف پایدارسازی محقق می‌گردد. ورودی‌های کنترلی به‌دست آمده در این بخش به‌عنوان مقادیر مطلوب در کنترل‌کننده دینامیکی جهت ردیابی مورد استفاده قرار می‌گیرند. جزئیات این فرآیند در بخش بعدی به تفصیل توضیح داده خواهد شد.

۳-۳- توسعه قوانین کنترلی دینامیکی

در این بخش کنترل‌کننده غیرخطی براساس روش پیش‌بین با استفاده از مدل دینامیکی ربات بازودار سیار مورد مطالعه، توسعه می‌یابد. مدل دینامیکی این سیستم که با معادله (۲۵) ارائه گردید، در فرم فضای حالت به‌صورت زیر است.

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}) + U_i \quad i = 1, \dots, 4 \quad (65)$$

که در آن $\vec{x} = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\}^T = \{v_p \ \theta_0 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2\}^T$ است. همچنین بردارهای $\vec{f}(\vec{x})$ و \vec{U} به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{\theta}} &= I^{-1}(\vec{\theta}) \overline{R} \vec{e}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) + I^{-1}(\vec{\theta}) \vec{t} \\ &= \vec{f}(\vec{x}) + \vec{U} \end{aligned} \quad (66)$$

طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین برای مدل دینامیکی شبیه به طراحی کنترل‌کننده برای قسمت سینماتیکی است. هدف این بخش ردیابی خروجی‌های سیستم $(\vec{y} = \{y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4\}^T = \{v_p \ \theta_0 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2\}^T)$ به سمت پاسخ‌های مطلوب به‌دست‌آمده یعنی $(\vec{y}_d = \{y_{1,d} \ y_{2,d} \ y_{3,d} \ y_{4,d}\}^T = \{v_{p,d} \ \theta_{0,d} \ \dot{\theta}_{1,d} \ \dot{\theta}_{2,d}\}^T)$ در فصل قبل است. طبق معادلات فضای حالت سیستم، این توابع خروجی می‌توانند به‌صورت زیر نوشته شوند.

$$y_{i \text{ or } i,d} = x_{i \text{ or } i,d} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (67)$$

توجه داشته باشید، از آنجایی که پایه سیار دارای قیود غیرهولونومیک است، انتگرال v_p به‌عنوان یک شبه‌مختصات هیچ معنای فیزیکی خاصی ندارد. بنابراین متغیر $x_1 = v_p$ (not $x_1 = \int v_p dt$) برای توصیف حرکت پایه سیار انتخاب شده است. همانطور که پیش‌تر گفته شد، مقادیر مطلوب به‌دست آمده از کنترل‌کننده سینماتیکی به‌فرم قوانین کنترلی (معادلات (۵۵) تا (۵۸)) باید با یافتن قوانین کنترلی دینامیکی مناسب (یعنی \vec{U}) ردیابی شوند. در اینجا نیز تابع هدف درجه دوم دیگری که خطای ردیابی را برای بازه زمانی بعدی مینیمم می‌کند، به‌صورت معادله زیر تعریف می‌گردد.

$$J_1(\vec{U}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 w'_i e_i^2(t + h_1) \quad (68)$$

که در آن w'_i ها ضرایب وزنی مثبت هستند. همچنین h_1 افق پیش‌بین است. از طرفی خطاهای تعقیب مسیر پیش‌بینی شده به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$e_i(t + h_1) = y_i(t + h_1) - y_{i,d}(t + h_1) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (69)$$

بر اساس مدل سیستم، خروجی‌ها یعنی $y_i = x_i, (i = 1, \dots, 4)$ دارای درجه نسبی $\rho = 1$ هستند. بنابراین بسط مرتبه اول سری تیلور برای $y_i (i = 1, \dots, 4)$ و مقادیر مطلوب‌شان $(y_{i,d}, (i = 1, \dots, 4))$ کفایت می‌کند.

$$y_{i \text{ or } i,d}(t + h_1) = y_{i \text{ or } i,d}(t) + h_1 \dot{y}_{i \text{ or } i,d}(t) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (70)$$

با جایگزین کردن معادله (۶۲) در معادله (۶۱) و متعاقباً در شاخص عملکردی که توسط رابطه (۶۰) تعریف شده است؛ و همچنین استفاده از فرم فضای حالت معادلات حرکت دینامیکی (معادله (۶۵)) رابطه زیر به دست می‌آید.

$$J_1(\vec{U}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 w'_i [(x_i - x_{i,d}) + h_1 (f_i + U_i - \dot{x}_{i,d})] \quad (71)$$

حال با اعمال شرط بهینگی $(\partial J_1 / \partial U_i = 0, (i = 1, \dots, 4))$ قوانین کنترلی بهینه به صورت زیر استخراج می‌شوند.

$$U_i = -\frac{1}{h_1} [e_i + h_1 (f_i - \dot{x}_{i,d})] \quad (72)$$

که در آن $e_i, (i = 1, \dots, 4)$ با استفاده از معادله (۶۹) به عنوان خطای مسیر در لحظه حال، تعریف می‌شود. مانند بخش قبل، در به دست آوردن ورودی‌های کنترلی بهینه، ضرایب وزنی جریمه $(w'_i, (i = 1, \dots, 4))$ یک در نظر گرفته شده‌اند تا بر اهمیت یکسان برای تمامی خطاهای ردیابی تأکید شود. حال با پیدا کردن کنترل‌کننده دینامیکی مناسب $(U_i, (i = 1, \dots, 4))$ و با استفاده از روابط (۲۸) و (۶۶) می‌توان گشتاورهای اعمالی به چرخ‌های پایه سیار و مفاصل منیپولاتور را محاسبه نمود.

$$\tau_R = \frac{r_a}{2a} (a\tau_{1,1} - \tau_{2,1}) \quad (73)$$

$$\tau_L = \frac{r_a}{2a} (a\tau_{1,1} - \tau_{2,1}) \quad (74)$$

$$\tau_1 = \tau_{3,1} \quad (75)$$

$$\tau_2 = \tau_{4,1} \quad (76)$$

در ادامه دینامیک سیستم حلقه بسته استخراج شده، و رفتار سیستم کنترل شده مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با اعمال قوانین کنترلی (که در معادله (۷۲) و برای مدل نامی به دست آمده است) در مدل واقعی (معادله (۶۶))، رابطه زیر به دست خواهد آمد.

$$x_i = f_i - \frac{1}{h_1} [e_i + h_1(\hat{f}_i - \dot{x}_{i,d})] \quad i = 1, \dots, 4 \quad (77)$$

که در آن مقادیر نامی با علامت « $\hat{\quad}$ » مشخص شده‌اند. اکنون با مرتب کردن رابطه (۷۷)، معادله زیر به دست می‌آید.

$$\dot{x}_i - \dot{x}_{i,d} + \frac{1}{h_1} e_i = f_i - \hat{f}_i \quad i = 1, \dots, 4 \quad (78)$$

با در نظر گرفتن خروجی‌های سیستم به نحوی که در ابتدای این بخش معرفی گردید، رابطه (۷۸) را می‌توان بر حسب ترم‌های دینامیکی خطای ردیابی به صورت رابطه زیر به دست آورد.

$$\dot{e}_i + \frac{1}{h_1} e_i = f_i - \hat{f}_i \quad i = 1, \dots, 4 \quad (79)$$

باید توجه داشت که حضور عدم قطعیت‌ها باعث انحراف f_i از مقادیر نامی‌اش (یعنی \hat{f}_i) می‌شود. برای مقادیر مشخصی از عدم قطعیت‌ها، اختلاف بین f_i و \hat{f}_i توسط یک مقدار ثابت یعنی $M_i > 0$ به صورت زیر محدود می‌شود.

$$|f_i - \hat{f}_i| < M_i \quad i = 1, \dots, 4 \quad (80)$$

با اعمال محدوده به دست آمده از معادله (۸۰) در سمت راست دینامیک خطای ردیابی معادله (۷۹)، رابطه زیر حاصل می‌گردد.

$$\dot{e}_i + \frac{1}{h_1} e_i \leq M_i \quad i = 1, \dots, 4 \quad (81)$$

بدیهی است معادلات دیفرانسیلی خطای ارائه شده توسط رابطه (۸۱) نیز دارای پاسخ‌هایی کراندار هستند. این حقیقت از ویژگی سیستم‌های خطی پایدار ناشی می‌شود که تحت عنوان پایداری ورودی-کراندار، خروجی-کراندار شناخته می‌شوند. معادلات خطای حالت یکنواخت سیستم، با مساوی صفر قرار دادن ترم‌هایی از معادله (۸۱) که در آن‌ها عملگر مشتق ظاهر شده است، به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$e_i \leq h_1 M_i \quad i = 1, \dots, 4 \quad (82)$$

تحلیل حالت یکنواخت نشان می‌دهد که عدم قطعیت‌ها باعث ایجاد خطای ماندگار در پاسخ سیستم می‌شوند. اگرچه افق پیش‌بین h_1 را می‌توان به گونه‌ای تنظیم نمود که خطاهای ماندگار به وجود آمده از عدم قطعیت‌ها کاهش یابند، اما نایبستی به صورت خودسرانه این کاهش صورت پذیرد. در واقع طبق معادله (۷۲)، کاهش بیش از حد این پارامتر آزاد باعث به وجود آمدن ورودی‌های کنترلی بزرگ با رفتار نوسانی می‌شود. لذا ضروری است تا با تنظیم مناسب پارامتر h_1 ، یک مصالحه بین کاهش خطای ماندگار و مقدار ورودی‌های کنترلی به وجود آورد.

۴- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، یک شبیه‌سازی بر اساس روش پیشنهاد شده به منظور ارزیابی عملکرد کنترل‌کننده‌های سینماتیکی و دینامیکی طراحی شده جهت تعقیب مسیر ربات سیار دو لینکی (تشکیل شده از لینک‌های صلب) با فرض وجود عدم قطعیت‌ها، انجام می‌شود. بدین منظور یک عدم قطعیت به میزان ۳۰٪ در خواص جرمی سیستم شامل I_{G_0} ، I_{G_1} ، I_{G_2} ، m_0 ، m_1 ، m_2 و I_w لحاظ می‌شود. مسیرهای مرجع به ترتیب برای پایه

سیار و مجری نهایی به صورت زیر انتخاب شده‌اند.

$$\begin{aligned} x_{P_r} &= \sin(0.6t) \\ y_{P_r} &= \sin(1.2t) \end{aligned} \quad (۸۳)$$

$$\begin{aligned} x_{E_r} &= 2.16 \sin^3(t) \\ y_{E_r} &= 1.54 \cos(t) - 0.55 \cos(2t) - 0.33 \cos(3t) - 0.11 \cos(4t) \end{aligned} \quad (۸۴)$$

با استفاده از معادله (۸۳) سرعت‌های مرجع خطی و زاویه‌ای پایه سیار به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$v_{P_r} = \sqrt{\dot{x}_{P_r}^2(t) + \dot{y}_{P_r}^2(t)} \quad (۸۵)$$

$$\theta_{0,r}(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}_{P_r}(t)}{\dot{x}_{P_r}(t)} \right) \quad (۸۶)$$

$$\xrightarrow{\text{diff}} \dot{\theta}_{0,r}(t) = \frac{\dot{y}_{P_r}(t)\dot{x}_{P_r}(t) - \ddot{x}_{P_r}(t)\dot{y}_{P_r}(t)}{\dot{x}_{P_r}^2(t) + \dot{y}_{P_r}^2(t)}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که موقعیت زاویه‌ای مرجع مفاصل اول و دوم به صورت روابط زیر هستند.

$$\theta_{1,r}(t) = \tan^{-1} \left(\frac{Y_r(t)}{X_r(t)} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{K_2(t)}{K_1(t)} \right) - \theta_{0,r}(t) \quad (۸۷)$$

$$\theta_{2,r}(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\sin(\theta_{2,r})}{\cos(\theta_{2,r})} \right) \quad (۸۸)$$

که در آن

$$X_r(t) = x_{E_r}(t) - x_{P_r}(t) - d \cos(\theta_{0,r})$$

$$Y_r(t) = y_{E_r}(t) - y_{P_r}(t) - d \sin(\theta_{0,r})$$

$$\cos(\theta_{2,r}) = \frac{X_r^2(t) + Y_r^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \quad (۸۹)$$

$$\sin(\theta_{2,r}) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta_{2,r})}$$

$$K_1(t) = l_1 + l_2 \cos(\theta_{2,r})$$

$$K_2(t) = l_2 \sin(\theta_{2,r})$$

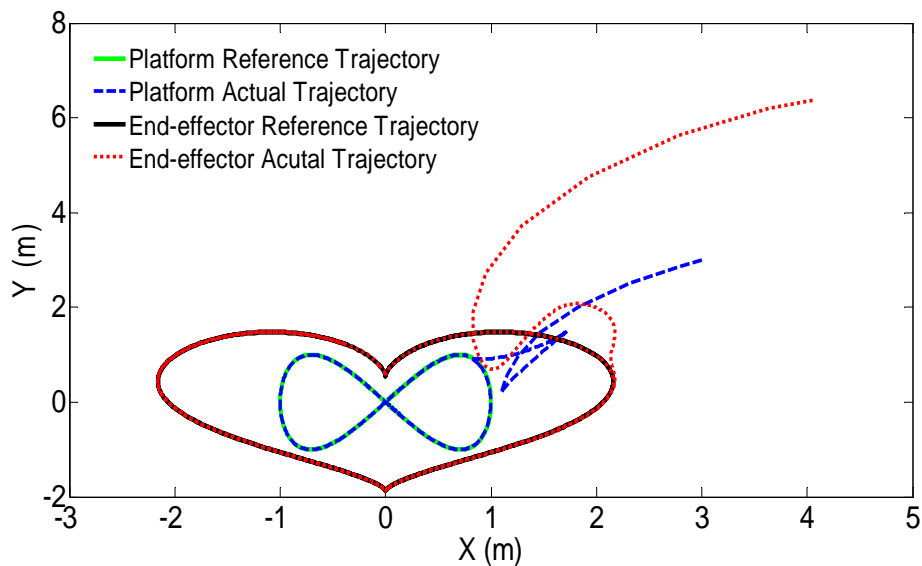
اکنون با داشتن $\theta_{1,r}(t)$ و $\theta_{2,r}(t)$ سرعت‌های زاویه‌ای مرجع مفاصل اول و دوم به ترتیب با مشتق‌گیری از معادلات (۸۷) و (۸۸) به دست می‌آیند. در اینجا بایستی به این نکته اشاره شود که مسئله سینماتیک معکوس سیستم رباتیکی مذکور به صورت تحلیلی حل شده است. اگرچه، برای سود بردن از فواید روش پیشنهادی برای منیپولاتور سیاری که از چندین لینک صلب تشکیل شده است، می‌توان مسئله سینماتیک معکوس را به صورت عددی نیز حل کرد. در جدول (۱) موقعیت‌ها و سرعت‌های اولیه ربات مرجع و ربات واقعی ارائه شده‌اند.

جدول ۱- موقعیت‌ها و سرعت‌های اولیه ربات مرجع و ربات واقعی

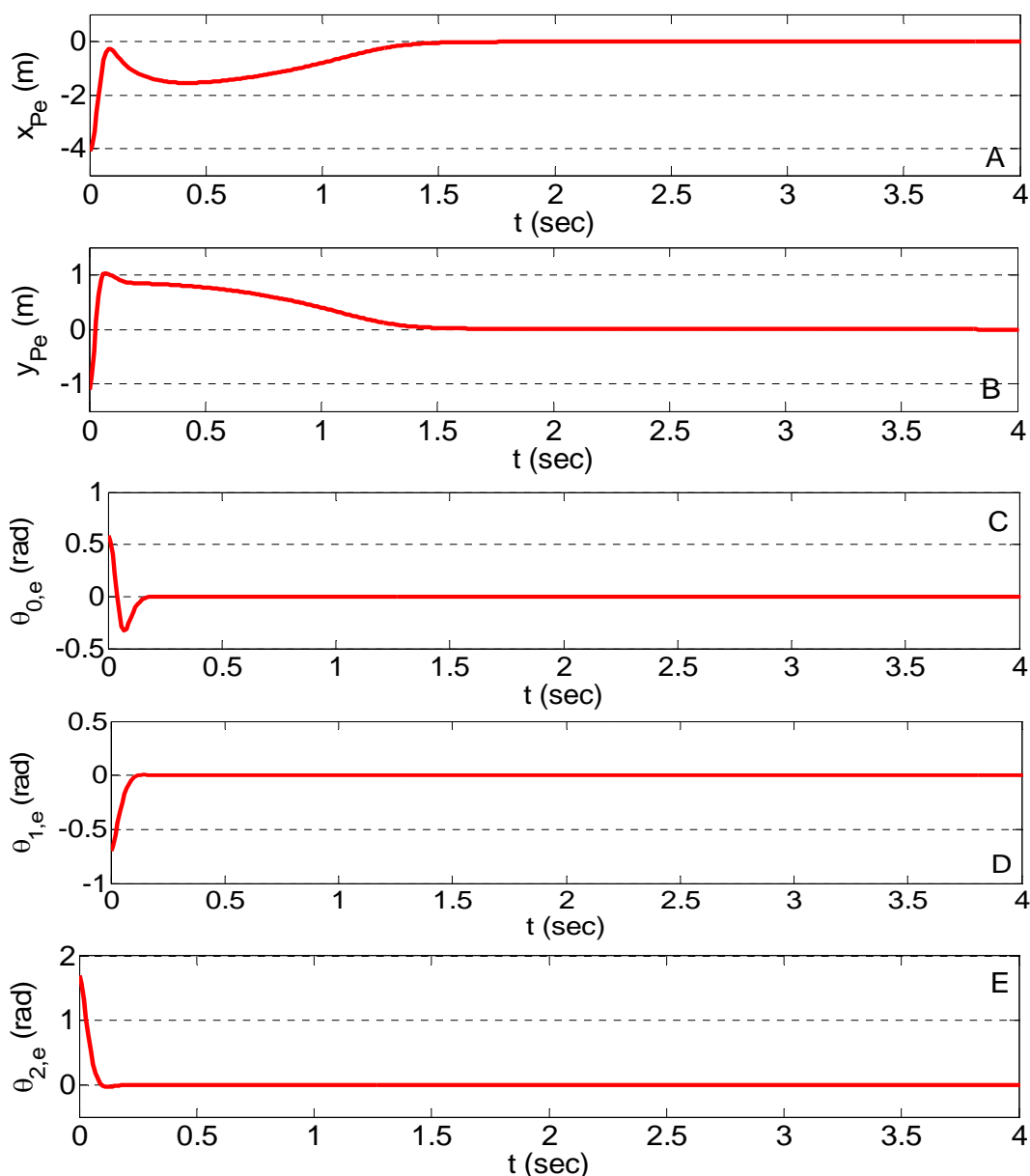
ربات واقعی	ربات مرجع
$(x_P, y_P) _{t=0} = (3,3) m$	$(x_{P_r}, y_{P_r}) _{t=0} = (0,0) m$
$(\theta_0, \theta_1, \theta_2) _{t=0} = (\pi/6, \pi/6, \pi/6) rad$	$(\theta_{0,r}, \theta_{1,r}, \theta_{2,r}) _{t=0} = (1.1071, -0.7614, 2.9230) rad$
$v_P _{t=0} = 1 m/s$	$v_{P_r} _{t=0} = 1.341 m/s$
$(\dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) _{t=0} = (1,1,1) rad/s$	$(\dot{\theta}_{0,r}, \dot{\theta}_{1,r}, \dot{\theta}_{2,r}) _{t=0} = (-0.0022, 2.0261, 0.5688) rad/s$

همچنین پارامترهای آزاد قوانین کنترلی به صورت $h = h_1 = 0.01 s$ و $\beta = 2$ انتخاب می‌شوند. شکل (۴) مسیر واقعی و مسیر مرجع پایه سیار و مجری نهایی را نشان می‌دهد. از طرفی خطاهای ردیابی برای موقعیت و جهت‌گیری پایه سیار و لینک‌های ربات $({}^0x_{P_e}, {}^0y_{P_e}, \theta_{0,e}, \theta_{1,e}, \theta_{2,e})$ در شکل (۵) نشان داده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، علیرغم وجود عدم قطعیت‌های پارامتری ردیابی مسیر هدف را با دقت قابل قبولی انجام می‌دهند.

همانگونه که قبلاً اشاره شد، سرعت‌های خطی و سرعت‌های زاویه‌ای مطلوب پایه سیار و همچنین موقعیت‌های زاویه‌ای مطلوب لینک‌های ربات با اعمال قوانین کنترلی سینماتیکی محاسبه می‌شوند. شکل (۶) توانایی کنترل‌کننده دینامیکی را در ردیابی مؤثر پاسخ‌های مطلوب $(v_{P_d}, \dot{\theta}_{0,d}, \dot{\theta}_{1,d}, \dot{\theta}_{2,d})$ نشان می‌دهد.

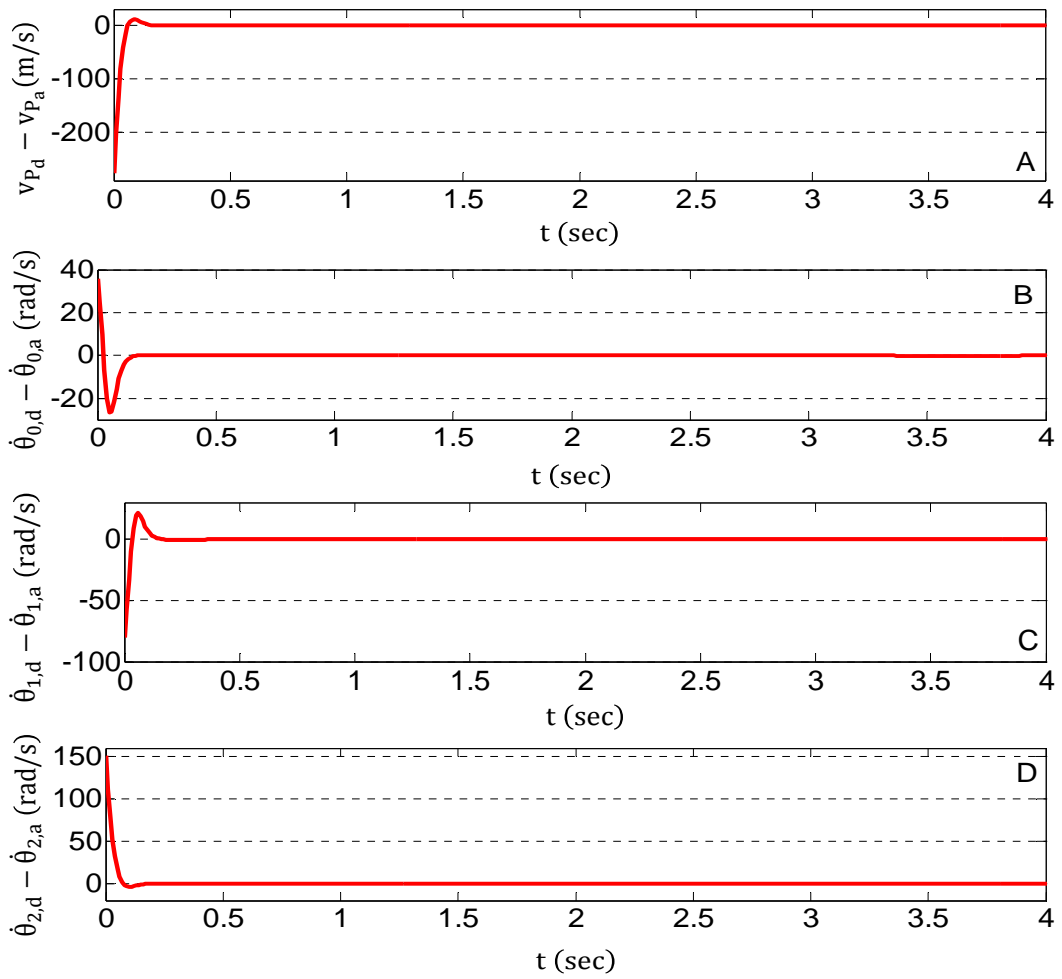


شکل ۴- مسیر مرجع و واقعی مربوط به پایه سیار و مجری نهایی

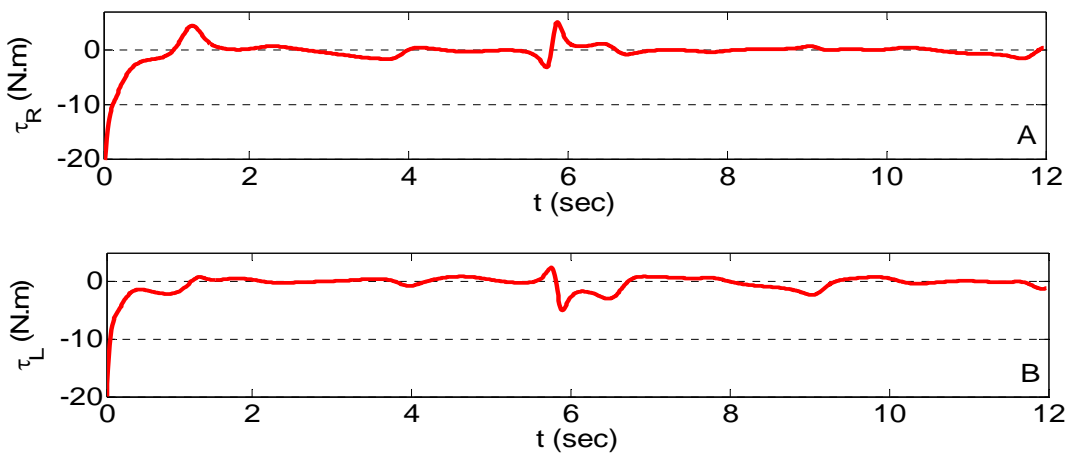


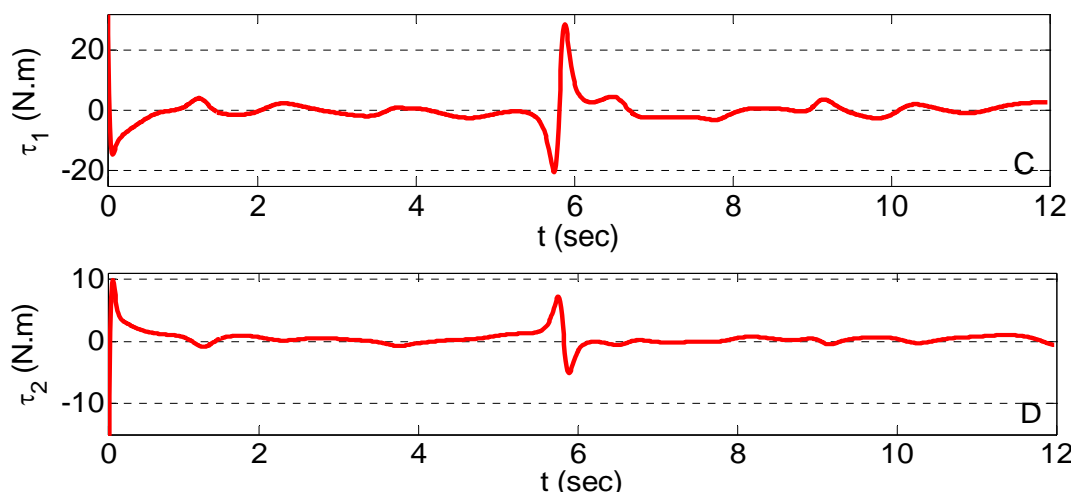
شکل ۵- خطای ردیابی موقعیت و جهت گیری مربوط به پایه سیار و لینک منیپولاتور

شکل (۷)، گشتاورهای اعمالی به چرخهای سمت راست و چپ و همچنین گشتاور اعمالی به مفاصل اول و دوم را نشان می‌دهد. به منظور شبیه‌سازی منیپولاتور سیار واقعی، سیگنال‌های کنترلی به τ_R, τ_L, τ_1 محدود شده‌اند. همانطور که از شکل (۷) نتیجه‌گیری می‌شود، ورودی‌های کنترلی به دست آمده توابعی هموار هستند و لذا برای اهداف کاربردی مناسب به نظر می‌رسند.



شکل ۶- (A و B) خطای ردیابی مربوط به سرعت‌های خطی و زاویه‌ای پایه سیار و (C و D) خطای ردیابی مربوط به سرعت‌های خطی و زاویه‌ای لینک منیپولاتور





شکل ۷- (A و B) گشتاور ورودی به چرخ‌های چپ و راست و لینک دورانی منیپولاتور و (C و D) گشتاور اعمالی به مفاصل دورانی منیپولاتور

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله در مرحله اول، مدل‌سازی دینامیکی ربات بازودار سیار (تشکیل شده از لینک‌های صلب) به فرم بسته با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل ارائه گردید. در مرحله بعد، با اعمال روش کنترل غیرخطی پیش‌بین، یک کنترل‌کننده سینماتیکی برای تعقیب مسیر مرجع پایه سیار و مجری نهایی طراحی شد. در ادامه یک کنترل‌کننده دینامیکی برای تعقیب مسیر مطلوب به دست آمده از کنترل‌کننده سینماتیکی به فرم گشتاورهای ورودی کنترلی، به صورت تحلیلی توسعه داده شد. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که ردیابی مسیر مطلوب پایه سیار و مجری نهایی در حضور عدم قطعیت‌ها با موفقیت محقق می‌شود.

در پایان، نوآوری‌های این تحقیق به صورت خلاصه یادآوری می‌شود:

✓ یکی از نوآوری‌های این مقاله، نصب یک بازوی مکانیکی با مفاصل دورانی بر روی یک پایه سیار است. همان‌گونه که می‌دانیم استفاده از این بازوی مکانیکی باعث افزایش فضای کاری ربات می‌شود. در واقع قابلیت دستکاری بازوی مکانیکی ماهر به همراه چابکی پایه سیار از ویژگی‌های منحصر به فرد سیستم رباتیکی مورد مطالعه می‌باشد. حال آنکه در کار انجام شده در مرجع [۳۹] تنها ردیابی پایه سیار مد نظر بوده است.

✓ از دیگر مزایای روش بکار رفته در این مقاله، استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل در استخراج معادلات حرکت سیستم رباتیکی مورد مطالعه است. به دلیل وجود دو قید غیرهولونومیک در پایه سیار، استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ منجر به ظهور ضرایب لاگرانژ می‌شود که حذف این ضرایب به عملیات ریاضی پیچیده‌ای نیاز دارد. حال آنکه با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل، بدون مواجهه با این ضرایب و به صورت کاملاً سراسر و مستقیم معادلات حرکت استخراج می‌گردند. از طرف دیگر، روش گیبس-اپل نسبت به فرمولاسیون لاگرانژ به مشتقات جزئی کمتری برای استخراج معادلات حرکت احتیاج دارد.

- ✓ در این مقاله تمامی محاسبات با استفاده از ماتریس‌های دوران 3×3 و بردارهای 3×1 انجام شده است. استفاده از ماتریس‌های دوران 3×3 به جای ماتریس‌های انتقال 4×4 موجب کاهش بیش از پیش پیچیدگی محاسبات می‌شود.
- ✓ مهمترین نوع‌آوری این مقاله فرمولاسیون بازگشتی آن است که برای استخراج معادلات حرکت و طراحی سیستم کنترل مورد استفاده قرار می‌گیرد. همانگونه که پیشتر نیز اشاره گردید، به دلیل ماهیت بسیار پیچیده این‌گونه از سیستم‌های رباتیکی، استخراج غیربازگشتی و غیرسیستماتیک این‌گونه از معادلات علاوه بر اینکه وقت بسیار زیادی را از تحلیل‌کننده صرف می‌کند، امکان بروز خطای انسانی در آن را نیز به شدت افزایش می‌دهد. لذا ارائه یک الگوریتم سمبولیک که به تولید خودکار و سیستماتیک این‌گونه از معادلات بپردازد و نقش محاسبات دستی را بی‌اثر کند، امری لازم و ضروری است که در این مقاله به آن اشاره شده است.
- ✓ روش کنترل پیش‌بین غیرخطی به شکل حلقه بسته برای ردیابی همزمان مسیر بازوهای مکانیکی و پایه سیار مطرح گردید. حال آنکه در مرجع [۳۹] کنترل‌کننده دینامیکی طراحی شده بدون در نظر گرفتن اثرات کوپلینگ دینامیکی پایه سیار و بازوهای مکانیکی انجام شده است.

مراجع

- [1] Whitman, A., Clayton, G., and Ashrafioun, H., "Prediction of Wheel Slipping Limits for Mobile Robots", *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 141, No. 4, pp. 1-9, (2018).
- [2] Whitman, A., Clayton, G., Poultney, A., and Ashrafioun, H., "Asymptotic Solution and Trajectory Planning for Open-loop Control of Mobile Robots", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 139, No. 5, pp. 1-9, (2017).
- [3] Larimi, S. R., Zarafshan P., and Moosavian, S. A. A., "A New Stabilization Algorithm for a Two-wheeled Mobile Robot Aided by Reaction Wheel", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 37, No. 1, pp. 1-8, (2014).
- [4] Juarez, A. L., Romero, J. C., and Ramirez, H. S., "Trajectory Tracking Control of a Mobile Robot through a Flatness-based Exact Feedforward Linearization Scheme", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 137, No. 5, pp. 1-8, (2015).
- [5] Saha, S. K., and Angeles, J., "Dynamics of Non-holonomic Mechanical Systems using a Natural Orthogonal Complement", *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, No. 1, pp. 238-243, (1991).
- [6] Vossoughi, G., Pendar, H., Heidari, Z., and Mohammadi, S., "Assisted Passive Snake-like Robots: Conception and Dynamic Modeling using Gibbs-Appell Method", *Robotica*, Vol. 26, No. 3, pp. 267-276, (2008).

- [7] Tanner, H. G., Kyriakopoulos, K. J., and Krikelis, N. I., "Advanced Agricultural Robots: Kinematics and Dynamics of Multiple Mobile Manipulators Handling Non-rigid Material", *Computer and Electronics in Agriculture*, Vol. 31, No. 1, pp. 91-105, (2001).
- [8] Moosavian, S. A. A., Rastegari, R., and Papadopoulos, E., "Multiple Impedance Control for Space Free-flying Robots", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 5, pp. 939-947, (2005).
- [9] Mann, M. P., Zion, B., Rubinstein, D., Linker, R., and Shmulevich I., "Minimum Time Kinematic Motions of a Cartesian Mobile Manipulator for a Fruit Harvesting Robot", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 136, No. 5, pp. 1-9, (2014).
- [10] Shafei, A. M., and Shafei, H. R., "Dynamic Modeling of Tree-type Robotic Systems by Combining 3×3 Rotation Matrices and 4×4 Transformation Ones", *Multibody System Dynamics*, Vol. 44, No. 4, pp. 367-395, (2018).
- [11] Shafei, A. M., and Shafei, H. R., "Dynamic Modeling of Planar Closed-chain Robotic Manipulators in Flight and Impact Phases", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 126, pp. 141-154, (2018).
- [12] Shafei, A. M., and Shafei, H. R., "Dynamic Behavior of Flexible Multiple Links Captured Inside a Closed Space", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Transactions of the ASME*, Vol. 11, No. 5, pp. 1-13, (2016).
- [13] Yu, Q., and Chen, I. M., "A General Approach to Dynamics of Nonholonomic Mobile Manipulator Systems", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 124, No. 4, pp. 512-521, (2002).
- [14] Boyer, F., and Ali, S., "Recursive Inverse Dynamics of Multibody Systems with Joints and Wheels", *IEEE Transaction on Robotics*, Vol. 27, No. 2, pp. 215-228, (2011).
- [15] Korayem, M. H., Shafei, A. M., and Shafei, H. R., "Dynamic Modeling of Nonholonomic Wheeled Mobile Manipulators with Elastic Joints using Recursive Gibbs-Appell Formulation", *Scientia Iranica Transaction b-Mechanical Engineering*, Vol. 19, No. 4, pp. 1092-1104, (2012).
- [16] Korayem, M. H., and Shafei, A. M., "A New Approach for Dynamic Modeling of n-Viscoelastic-link Robotic Manipulators Mounted on a Mobile Base", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 79, No. 4, pp. 2767-2786, (2015).
- [17] Shafei, A. M., and Shafei, H. R., "Considering Link Flexibility in the Dynamic Synthesis of Closed-loop Mechanisms: A General Approach", *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, Vol. 142, No. 2, pp. 1-12, (2020).
- [18] Ahmadizadeh, M., Shafei, A. M., and Fooladi, M., "A Recursive Algorithm for Dynamics of Multiple Frictionless Impact-contacts in Open-loop Robotic Mechanisms", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 146, pp. 1-20, (2020).
- [19] Rezaei, V., and Shafei, A. M., "Dynamic Analysis of Flexible Robotic Manipulators Constructed of Functionally Graded Materials", *Iranian Journal of Science and*

- Technology, Transactions of Mechanical Engineering, Vol. 43, No. 1, pp. 327-342, (2019).
- [20] Shafei, A. M., and Shafei, H. R., "Oblique Impact of Multi-flexible-link Systems", Journal of Vibration and Control, Vol. 24, No. 5, pp. 904-923, (2018).
- [21] Shafei, A. M., and Shafei, H. R., "Planar Multibranch Open-loop Robotic Manipulators Subjected to Ground Collision", Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Transactions of the ASME, Vol. 12, No. 6, pp. 1-14, (2017).
- [22] Shafei, A. M., "Automatic Formulation of Falling Multiple Flexible-link Robotic Manipulators using 3×3 Rotational Matrices", Journal of Theoretical and Applied Vibration and Acoustics, Vol. 3, No. 1, pp. 15-41, (2017).
- [23] Shafei, A. M., Korayem, M. H., "Theoretical and Experimental Study of DLCC for Flexible Robotic Arms in Point-to-point Motion", Optimal Control Applications and Methods, Vol. 38, No. 6, pp. 963-972, (2017).
- [24] Shafei, A. M., and Shafei, H. R., "A Systematic Method for the Hybrid Dynamic Modeling of Open Kinematic Chains Confined in a Closed Environment", Multibody System Dynamics, Vol. 38, No. 1, pp. 21-42, (2016).
- [25] Korayem, M. H., Shafei, A. M., Doosthoseini, M., Absalan, F., and Kadkhodaei, B., "Theoretical and Experimental Investigation of Viscoelastic Serial Robotic Manipulators with Motors at the Joints using Timoshenko Beam Theory and Gibbs-Appell Formulation", Proc IMechE Part K: J Multi-body Dynamics, Vol. 230, Vol. 1, pp. 37-51, (2016).
- [26] Korayem, M. H., Shafei, A. M., Absalan, F., Kadkhodaei, B., and Azimi, A., "Kinematic and Dynamic Modeling of Viscoelastic Robotic Manipulators using Timoshenko Beam Theory: Theory and Experiment", International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. 71, No. 5, pp. 1005-1018, (2014).
- [27] Mata, V., Provenzano, S., Cuadrado, J. I., and Valero, F., "Serial-robot Dynamics Algorithms for Moderately Large Number of Joints", Mechanism and Machine Theory, Vol. 37, pp. 739-755, (2002).
- [28] Brockett, R. W., "Asymptotic Stability and Feedback Stabilization", Differential Geometric Control Theory, Vol. 27, No. 1, pp. 181-191, (1983).
- [29] Lin, S., and Goldenberg, A., "Robust Damping Control of Mobile Manipulators", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), Vol. 32, No. 1, pp. 126-132, (2002).
- [30] White, G. D., Bhatt, R. M., Tang, C. P., and Krovi, V. N., "Experimental Evaluation of Dynamic Redundancy Resolution in a Nonholonomic Wheeled Mobile Manipulator", IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Vol. 14, No. 3, pp. 349-357, (2009).
- [31] Ge, W., and Ye, D., "Sliding Mode Variable Structure Control of Mobile Manipulators", International Journal of Modelling, Identification and Control, Vol. 12, No. 1, pp. 166-172, (2011).

- [32] Zhou, Q., Li, H., Wu, C., Wang, L., and Ahn, C. K., "Adaptive Fuzzy Control of Nonlinear Systems with Unmodeled Dynamics and Input Saturation using Small-gain Approach", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, Vol. 47, No. 8, pp. 1979-1989, (2017).
- [33] Yi, G., Mao, J., Wang, Y., Guo, S., and Miao, Z., "Adaptive Tracking Control of Nonholonomic Mobile Manipulators using Recurrent Neural Networks", *International Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 16, No. 3, pp. 1390-1403, (2018).
- [34] Li, Z., and Kang, Y., "Dynamic Coupling Switching Control Incorporating Support Vector Machines for Wheeled Mobile Manipulators with Hybrid Joints", *Automatica*, Vol. 46, No. 5, pp. 832-842, (2010).
- [35] Boukattaya, M., Jallouli, M., and Damak, T., "On Trajectory Tracking Control for Nonholonomic Mobile Manipulators with Dynamic Uncertainties and External Torque Disturbances", *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 60, No. 12, pp. 1640-1647, (2012).
- [36] Chen, N., Song, F., Li, G., Sun, X., and Ai, C., "An Adaptive Sliding Mode Backstepping Control for the Mobile Manipulator with Nonholonomic Constraints", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 18, No. 10, pp. 2885-2899, (2013).
- [37] Peng, J., Yu, J., and Wang, J., "Robust Adaptive Tracking Control for Nonholonomic Mobile Manipulator with Uncertainties", *ISA Transactions*, Vol. 53, No. 4, pp. 1035-1043, (2014).
- [38] Shojaei, Kh., "An Adaptive Output Feedback PID Controller for n-Link Type (m,s) Electrically Driven Mobile Manipulators", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 141, pp. 1-10, (2019).
- [39] Mirzaeinejad, H., and Shafei, A. M., "Modeling and Trajectory Tracking Control of a Two-wheeled Mobile Robot: Gibbs-Appell and Prediction-based Approaches", *Robotica*, Vol. 36, No. 10, pp. 1551-1570, (2018).
- [40] Mirzaeinejad, H., Mirzaei, M., and Kazemi, R., "Enhancement of Vehicle Braking Performance on Split- μ Roads using Optimal Integrated Control of Steering and Braking Systems", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, Vol. 230, pp. 401-415, (2015).
- [41] Mirzaeinejad, H., Mirzaei, M., and Rafatnia, S., "A Novel Technique for Optimal Integration of Active Steering and Differential Braking with Estimation to Improve Vehicle Directional Stability", *ISA Transactions*, Vol. 80, pp. 513-527, (2018).
- [42] Mirzaeinejad, H., "Robust Predictive Control of Wheel Slip in Antilock Braking Systems Based on Radial Basis Function Neural Network", *Applied Soft Computing*, Vol. 70, pp. 318-329, (2018).
- [43] Jafari, M., Mirzaei, M., and Mirzaeinejad, H., "Optimal Nonlinear Control of Vehicle Braking Torques to Generate Practical Stabilizing Yaw Moments", *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*, Vol. 11, pp. 2639, (2015).

- [44] Korayem, M. H., and Shafei, A. M., "Motion Equation of Nonholonomic Wheeled Mobile Robotic Manipulator with Revolute-prismatic Joints using Recursive Gibbs-Appell Formulation", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 39, No. 5-6, pp. 1701-1716, (2015).
- [45] Korayem, M. H., Shafei, A. M., and Dehkordi, S. F., "Systematic Modeling of a Chain of N-flexible Link Manipulators Connected by Revolute-prismatic Joints using Recursive Gibbs-Appell Formulation", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 84, No. 2, pp. 187-206, (2014).
- [46] Korayem, M. H., Shafei, A. M., and Shafei, H. R., "Dynamic Modeling of Nonholonomic Wheeled Mobile Manipulators with Elastic Joints using Recursive Gibbs-Appell Formulation", *Scientia Iranica Transaction b-Mechanical Engineering*, Vol. 19, No. 4, pp. 1092-1104, (2012).
- [47] Korayem, M. H., and Shafei, A. M., "Application of Recursive Gibbs-Appell Formulation in Deriving the Equations of Motion of N-viscoelastic Robotic Manipulators in 3D Space using Timoshenko Beam Theory", *Acta Astronautica*, Vol. 83, pp. 273-294, (2013).
- [48] Slotine, J. J. E., and Li, W., "*Applied Nonlinear Control*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1991).
- [49] Mirzaeinejad, H., "Optimization-based Nonlinear Control Laws with Increased Robustness for Trajectory Tracking of Non-holonomic Wheeled Mobile Robots", *Journal of Transportation Research Part C*, Vol. 101, pp. 1-17, (2019).
- [50] Mirzaei, M., and Mirzaeinejad, H., "Fuzzy Scheduled Optimal Control of Integrated Vehicle Braking and Steering Systems", *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 22, pp. 2369-2379, (2017).
- [51] Mirzaeinejad, H., and Shafei, A. M., "A Nonlinear Optimal Multivariable Controller Design for Trajectory Tracking of Non-holonomic Mobile Robots", *Journal of Control*, Vol. 11, No. 1, pp. 11-18, (2017).
- [52] Mirzaei, M., Mirzaeinejad, H., Vahidi, S., Heidarian, D., and Khosrowjerdi, M. J., "Nonlinear Control and Estimation of Tire Longitudinal Slip for using in Anti-lock Braking System", *Journal of Control*, Vol. 5, No. 4, pp. 32-41, (2012).
- [53] Mirzaeinejad, H., and Mirzaeim, M., "A Novel Method for Non-linear Control of Wheel Slip in Anti-lock Braking Systems", *Control Engineering Practice*, Vol. 18, No. 8, pp. 918-926, (2010).
- [54] Chen, W. H., Balance, D. J., and Gawthrop, P. J., "Optimal Control of Nonlinear Systems: A Predictive Control Approach", *Automatica*, Vol. 39, No. 4, pp. 633-641, (2003).

پیوست الف

تابع گیبس کل سیستم شامل پایه سیار، چرخ‌های راست و چپ و دو لینک منیپولاتور به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{1}{2}m_0 \left((\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2)^2 + (v_P\dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0)^2 \right) \\
 & + \frac{1}{2}m_1 \left((\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2)^2 + (v_P\dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0)^2 + \frac{l_1^2}{4}(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^4 + \frac{l_1^2}{4}(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1)^2 \right. \\
 & \quad + l_1C_1 \left((v_P\dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0)(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1) - (\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2)(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2 \right) \\
 & \quad \left. - l_1S_1 \left((v_P\dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0)(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2 + (\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2)(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1) \right) \right) \\
 & + \frac{1}{2}m_2 \left((\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2)^2 + (v_P\dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0)^2 + l_1^2(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^4 + l_1^2(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1)^2 \right. \\
 & \quad + l_2^2/4(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^4 + l_2^2/4(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)^2 \\
 & \quad + 2l_1C_1 \left((v_P\dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0)(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1) - (\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2)(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2 \right) \\
 & \quad - 2l_1S_1 \left((\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2)(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1) + (v_P\dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0)(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2 \right) \\
 & \quad + l_2C_{12} \left((v_P\dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0)(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - (\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2)(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \right) \\
 & \quad - l_2S_{12} \left((\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2)(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (v_P\dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0)(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \right) \\
 & \quad + l_1l_2C_2 \left((\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + (\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1)(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \right) \\
 & \quad \left. - l_1l_2S_1 \left((\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1)(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \right) \right) \\
 & + \frac{1}{2}I_{G_0}\ddot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}I_{G_1}(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}I_{G_2}(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)^2 + \frac{I_w}{r_a^2}(\dot{v}_P^2 + a^2\dot{\theta}_0^2)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

مشتق تابع گیبس نسبت به شتاب‌های تعمیم‌یافته عبارت است از:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial \dot{v}_P} = & \frac{2I_w}{r_a^2}\dot{v}_P + (m_0 + m_1 + m_2)(\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2) - l_1C_1 \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 \right) (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2 \\
 & - l_1S_1 \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 \right) (\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1) - \frac{1}{2}m_2l_2 \left(C_{12}(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + S_{12}(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \right)
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}_0} = & \left(m_0d + m_1d + m_2d + \frac{1}{2}m_1l_1C_1 + m_2l_1C_1 + \frac{1}{2}m_2l_2C_{12} \right) (v_P\dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0) \\
 & + \left(\frac{1}{4}m_1l_1^2 + \frac{1}{2}m_1l_1dC_1 + m_2l_1^2 + m_2l_1dC_1 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2C_2 + I_{G_1} \right) (\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1) \\
 & - \left(\frac{1}{2}m_1l_1S_1 + m_2l_1S_1 + \frac{1}{2}m_2l_2S_{12} \right) (\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2) + \left(I_{G_0} + \frac{2a^2I_w}{r_a^2} \right) \ddot{\theta}_0 \\
 & - \left(\frac{1}{2}m_1l_1dS_1 + m_2l_1dS_1 - \frac{1}{2}m_2l_1l_2S_1 \right) (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2 \\
 & + \left(\frac{1}{4}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_2dC_{12} + \frac{1}{2}m_2l_1l_2C_2 + I_{G_2} \right) (\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\
 & - \left(\frac{1}{2}m_2l_2dS_{12} + \frac{1}{2}m_2l_1l_2S_1 \right) (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}_1} &= \left(\frac{1}{4} m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 C_2 + I_{G_1} \right) (\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} m_1 l_1 S_1 + m_2 l_1 S_1 + \frac{1}{2} m_2 l_2 S_{12} \right) (\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2) \\
&\quad + \left(\frac{1}{4} m_2 l_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 C_2 + I_{G_2} \right) (\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\
&\quad - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 S_1 \ddot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_0 + 2\dot{\theta}_1) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} m_1 l_1 C_1 + m_2 l_1 C_1 + \frac{1}{2} m_2 l_2 C_{12} \right) (v_P \dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}_2} &= \frac{1}{2} m_2 l_2 C_{12} (v_P \dot{\theta}_0 + d\ddot{\theta}_0) - \frac{1}{2} m_2 l_2 S_{12} (\dot{v}_P - d\dot{\theta}_0^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 C_2 (\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1) + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 S_1 (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{4} m_2 l_2^2 + I_{G_2} \right) (\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

ضرائب ماتریس اینرسی سیستم و سمت راست معادلات دینامیک مستقیم تحت عنوان ترم‌های دینامیکی باقی‌مانده عبارت است از:

$$I_{11} = \frac{2I_w}{r_a^2} + m_0 + m_1 + m_2 \tag{A.6}$$

$$I_{12} = I_{21} = -\frac{1}{2} m_1 l_1 S_1 - m_2 l_1 S_1 - \frac{1}{2} m_2 l_2 S_{12} \tag{A.7}$$

$$I_{13} = I_{31} = -\frac{1}{2} m_1 l_1 S_1 - m_2 l_1 S_1 - \frac{1}{2} m_2 l_2 S_{12} \tag{A.8}$$

$$I_{14} = I_{41} = -\frac{1}{2} m_2 l_2 S_{12} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
I_{22} &= (d^2(m_0 + m_1 + m_2) + l_1 d C_1 (2m_2 + m_1) + m_2 l_2 (d C_{12} + l_1 C_2)) \\
&\quad + \left(I_{G_0} + I_{G_1} + I_{G_2} + \frac{2a^2 I_w}{r_a^2} \right) + \left(\frac{1}{4} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) + m_2 l_1^2 \right)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
I_{23} = I_{32} &= \frac{1}{2} (m_2 l_2 (d C_{12} + 2l_1 C_2) + l_1 d C_1 (m_1 + 2m_2)) \\
&\quad + \frac{1}{4} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 4m_2 l_1^2) + I_{G_1} + I_{G_2}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$I_{24} = I_{42} = \frac{1}{2} m_2 l_2 \left(d C_{12} + l_1 C_2 + \frac{1}{2} l_2 \right) + I_{G_2} \tag{A.12}$$

$$I_{33} = \frac{1}{4} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) + m_2 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 C_2 + I_{G_1} + I_{G_2} \tag{A.13}$$

$$I_{34} = I_{43} = \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 C_2 + I_{G_2} \tag{A.14}$$

$$I_{44} = \frac{1}{4}m_2l_2^2 + I_{G_2} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} Re_{v_P} = (m_0 + m_1 + m_2)d\dot{\theta}_0^2 + l_1C_1\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2 \\ + \frac{1}{2}m_2l_2C_{12}(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} Re_{\ddot{\theta}_0} = l_1\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)(dS_1(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1) - C_1v_P\dot{\theta}_0) - d(m_0 + m_1 + m_2)v_P\dot{\theta}_0 \\ + \frac{1}{2}m_2l_2(dS_{12}((\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2 + 2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2) - C_{12}v_P\dot{\theta}_0 \\ + l_1S_1(\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_0))) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} Re_{\ddot{\theta}_1} = -l_1\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)(dS_1\dot{\theta}_0^2 - C_1v_P\dot{\theta}_0) \\ - \frac{1}{2}m_2l_2(dS_{12}\dot{\theta}_0^2 + C_{12}v_P\dot{\theta}_0 - l_1S_1(\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_0))) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$Re_{\ddot{\theta}_2} = -\frac{1}{2}m_2l_2(dS_{12}\dot{\theta}_0^2 + C_{12}v_P\dot{\theta}_0 + l_1S_1(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)^2) \quad (\text{A.19})$$

Abstract

This manuscript discusses the mathematical modeling of a serial manipulator connected by rotary joints and fixed on a non-holonomic wheeled moving base. The equations of motion of the system are obtained in a closed form using the Gibbs-Appell formulation. Then, new kinematics and dynamics based multivariable controllers are presented by using the predictive control approach. The control laws are derived by minimizing a quadratic cost function for the predicted tracking errors of the mentioned system. Finally, the performance of the suggested controller is presented by simulating a mobile manipulator in simultaneous trajectory tracking of the mobile base and end-effector.