نشریه مهندسی مکانیک ایران، دوره 27، شماره 4، شماره پیاپی 81، زمستان 1404،
انجمن مهندسان مکانیک ایران
مقاله علمی پژوهشی

DOI: 10.30506/ijmep.2025.2059585.2014

بررسی اثر حفره و ترک بر پاسخ دینامیکی نیم لایه ارتوتروپیک غیر همگن تقویت شده با مواد پیزوالکتریک

امین رفیعی[1]

رسول باقری[2]

ولی انجیل الی[3]

در این مقاله، تحلیل تنش الاستودینامیکی در یک لایه ارتوتروپیک غیرهمگن که با لایه‌ای از جنس پیزوالکتریک تقویت و به واسطه یک حفره و چندین ترک تضعیف شده، بررسی شده است. بارگذاری به‌صورت دینامیکی و خارج از صفحه بوده و محیط به‌صورت الاستیک خطی مدل‌سازی شده است. برای تحلیل اثر ناپیوستگی‌ها از روش نابجائی ولترا استفاده شده که روشی مؤثر در بررسی محیط‌های دارای ترک و حفره به‌شمار می‌رود. ابتدا، پاسخ نابجائی با حل معادله حاکم، اعمال شرایط مرزی و پیوستگی و استفاده از تبدیل فوریه در محیط غیرهمگن به‌دست آمده است. این بخش به‌دلیل حضور ناهمگنی و مرزهای بین‌لایه‌ای از پیچیده‌ترین مراحل تحلیل است. سپس میدان تنش ناشی از نابجائی استخراج و با بهره‌گیری از اصل باکنر، دستگاه معادلات انتگرالی ترک‌ها و حفره فرموله شده است. این معادلات تکین از نوع کوشی هستند و به‌صورت عددی حل می‌شوند. پس از به‌دست آوردن توزیع نابجائی، ضرایب شدت تنش در نوک ترک‌ها و توزیع تنش در اطراف حفره محاسبه شده است. این نتایج نقش مهمی در پیش‌بینی رفتار مکانیکی و طراحی مهندسی سازه‌های چندلایه ایفا می‌کنند.

واژه های راهنما: تحلیل الاستودینامیکی، چندین ترک و حفره، نیم لایه ارتوتروپیک غیر همگن، مواد پیزوالکتریک، روش نابجائی ولترا

[1] دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران
[2] دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران (نویسنده مسئول rasul.bagheri@iau.ac.ir)
[3] استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران

1- مقدمه

تحلیل تنش در محیط‌های دارای ناپیوستگی نظیر ترک و حفره، همواره از مسائل بنیادین در حوزه مکانیک شکست و طراحی سازه‌های مکانیکی و چند ماده‌ای بوده است. در میان روش‌های موجود، تکنیک توزیع نابجائی یکی از ابزارهای مؤثر برای مدل‌سازی رفتار مکانیکی این ناپیوستگی‌ها محسوب می‌شود. ترک را می‌توان از دیدگاه ریاضی به‌صورت مجموعه‌ای از نابجائی‌ها در نظر گرفت و با بهره‌گیری از اصل جمع آثار، امکان پیش‌بینی حرکت نسبی لبه‌های آن و محاسبه ضرایب شدت تنش فراهم می‌شود. در این چارچوب، توزیع نابجائی نقشی معادل با تابع گرین در حل معادلات دیفرانسیل جزئی ایفا می‌کند و امکان تحلیل میدان تنش در محیط را با دقت بالا فراهم می‌سازد. همچنین وجود حفره‌ها، علاوه بر تأثیر بر توزیع تنش کلی، باعث تمرکز موضعی تنش در لبه‌های آن‌ها می‌شود که به‌شدت بر احتمال شروع ترک یا گسترش آن مؤثر است. محاسبه دقیق تنش‌های محیطی در اطراف حفره، در کنار ضرایب شدت تنش در نوک ترک‌ها، نقش تعیین‌کننده‌ای در پیش‌بینی نقطه واماندگی و تخمین طول عمر مؤثر قطعه دارد. مفهوم نابجائی، نخستین‌بار در مطالعات ساختاری مواد توسط دانشمندان علم مواد شناسایی شد و بعدها به‌طور دقیق‌تری در چارچوب تئوری الاستیسیته کلاسیک و توسط ولترا (V.Volterra [1]) به‌صورت ریاضی تعریف گردید. به همین دلیل، تحلیل هم‌زمان ترک‌ها و حفره با استفاده از ابزارهایی نظیر حل نابجائی، امروزه به‌عنوان رویکردی قدرتمند در شبیه‌سازی رفتار پیچیده مواد تحت بارهای دینامیکی و مکانیکی شناخته می‌شود. طراحی بر اساس مکانیک شکست نیازمند معیاری دقیق نظیر ضریب شدت تنش است که تابعی از هندسه ترک، ابعاد قطعه، نوع بارگذاری و نیز اثرات متقابل تنش‌های موضعی اطراف حفره می‌باشد.

تحلیل دینامیکی ترک‌ها یکی از مباحث اساسی در مکانیک شکست است که در طول سال‌ها توسط محققان مختلف مورد توجه قرار گرفته است. A.W. Maue [2] برای نخستین بار تحلیل دینامیکی یک ترک نیمه بی‌نهایت در محیط نامحدود را انجام داد. وی اثر امواج تنش هارمونیک را بر روی ترک مورد بررسی قرار داد و برای حل این مسأله پیچیده از روش وینر-هاف بهره جست. این روش در تحلیل‌های دینامیکی ترک‌ها به‌ویژه در شرایطی که بارگذاری‌ها به صورت امواج هارمونیک اعمال می‌شوند، ابزار بسیار مؤثری به شمار می‌رود. در ادامه، N. Ashbaugh [3] به بررسی مسأله پیچیده‌تری پرداخت و تحلیل دینامیکی یک ترک با جهت دلخواه در مجاورت فصل مشترک دو ورق نیمه بی‌نهایت با خواص مواد متفاوت را انجام داد. این تحقیق به‌ویژه در تحلیل رفتار ترک‌ها در محیط‌های چندماده‌ای حائز اهمیت است. در این مطالعه، مسأله تحت بارگذاری فشار یکنواخت و تنش برشی غیر یکنواخت بر سطح ترک حل شد و ضرایب شدت تنش در نوک ترک برای شرایط مختلف بارگذاری به‌دست آمد. این تحلیل‌ها نه تنها در زمینه مکانیک شکست بلکه در طراحی سازه‌ها و ارزیابی رفتار آنها تحت بارگذاری‌های مختلف بسیار کاربردی هستند. در تحقیقات بعدی، X.S. Zhang [4] به تحلیل ضریب شدت تنش دینامیکی در یک صفحه مستطیلی محدود حاوی یک جفت ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مکانیکی خارج صفحه‌ای پرداخت. این نوع تحلیل‌ها در شرایط واقعی و پیچیده‌تری که قطعات تحت بارهای دینامیکی و خارج صفحه‌ای قرار دارند، اهمیت زیادی دارند. Zhang توانست ضرایب شدت تنش دینامیکی را در این شرایط خاص محاسبه کرده و نتایج حاصل از آن به‌ویژه در طراحی سازه‌های تحت بارگذاری‌های پیچیده کاربردی باشد. C. Zhang [5] نیز در تحقیق خود به تحلیل ضریب شدت تنش

دینامیکی برای یک ترک واقع در یک صفحه ناهمسانگرد تحت بارگذاری ضربه‌ای پاد صفحه‌ای پرداخت. این تحقیق توجه ویژه‌ای به اثرات ناهمسانگردی در مواد و تغییرات زمانی در ضریب شدت تنش داشت. تحلیل اثرات ناهمسانگردی و تغییرات زمانی به‌ویژه در مواد غیر همسانگرد و در شرایط بارگذاری ضربه‌ای اهمیت دارد، چرا که این عوامل می‌توانند تأثیرات قابل توجهی بر رفتار مکانیکی ترک‌ها و تنش‌ها در این مواد داشته باشند. L. Ma و همکارانش [6] به تحلیل مسأله ترک گریفیث در یک باریکه پیزوالکتریک ساخته‌شده از ماده تابعی پرداختند. در این مطالعه، ثابت‌های الاستیک، پیزوالکتریک و ضریب گذردهی دی‌الکتریک به‌صورت تغییرات نمایی در جهت ضخامت باریکه فرض گردید. باریکه تحت بارگذاری پاد صفحه‌ای مکانیکی و درون صفحه‌ای الکتریکی قرار گرفت. این تحلیل به‌ویژه بر اثر هندسه ترک، موقعیت آن، ضخامت باریکه و خواص ماده بر روی ضریب شدت تنش و جابجایی الکتریکی در نوک ترک‌ها تمرکز داشته است. نتایج این تحقیق اهمیت ترکیب ویژگی‌های پیزوالکتریک با ویژگی‌های مکانیکی و الکتریکی ماده تابعی را در تحلیل ترک‌ها و رفتار دینامیکی آن‌ها نشان می‌دهد. در ادامه، Y.D. Li وK.Y Lee، [7] مسأله مشابهی را برای باریکه الاستیک با پوششی از مواد پیزوالکتریک با خواص ماده تابعی ارائه دادند. در این مطالعه، پوشش پیزوالکتریک با خاصیت تابعی تحت تأثیر یک ترک نشت‌پذیر در راستای ضخامت پوشش تضعیف شد و اندرکنش بین ترک و سطح مشترک پوشش و باریکه مورد بررسی قرار گرفت. این تحقیق به تحلیل دقیق‌تر اثرات ترک‌های نشت‌پذیر و تعامل آن‌ها با ساختارهای پیچیده‌ای همچون پوشش‌های پیزوالکتریک می‌پردازد و می‌تواند راهگشای طراحی‌های بهینه در سیستم‌های چندلایه‌ای باشد که در آن‌ها مواد تابعی و پیزوالکتریک به‌کار گرفته می‌شوند.

M. M. Monfared و همکارانش [8] تحلیل تنش الاستودینامیک را در یک نوار ارتوتروپیک بررسی کرده‌اند. در این تحقیق، از روش حل ولترا و معادلات کوشی برای تحلیل رفتار ترک‌ها استفاده شده است. اثرات پارامترهای هندسی، موقعیت و جهت ترک‌ها بر ضرایب شدت تنش در نوک ترک‌ها به‌طور دقیق مورد بررسی قرار گرفت. این تحلیل به‌ویژه در مواد ارتوتروپیک اهمیت دارد، زیرا خواص این مواد در جهت‌های مختلف متفاوت است و این ویژگی‌ها تأثیر زیادی بر توزیع تنش‌ها در نواحی ترک‌خورده می‌گذارند. همچنین، این تحقیق بر تعامل بین ترک‌ها و ویژگی‌های الاستودینامیکی نوار تأکید دارد که می‌تواند در طراحی و تحلیل سازه‌های مکانیکی با لایه‌های ارتوتروپیک کاربردی باشد. Bayat و همکارانش [9] باریکه ارتوتروپیک تضعیف‌شده توسط تعدادی ترک و حفره با پوشش پیزوالکتریک را تحت بارگذاری استاتیکی مکانیکی خارج صفحه‌ای و الکتریکی درون صفحه‌ای تحلیل کردند. آن‌ها از روش توزیع نابجائی و معادلات انتگرالی تکین از نوع کوشی استفاده کرده و ضریب شدت تنش در نوک ترک‌ها و تنش‌های محیطی در حفره‌ها را بر حسب چگالی نابجایی محاسبه کردند. سپس اثر خواص ماده ارتوتروپیک، ضریب چسبندگی پوشش به باریکه و هندسه عیوب بر ضرایب شدت تنش مطالعه شد.

تحلیل تنش در صفحه مستطیلی با رفتار تابعی که حاوی چندین ترک مستقیم و منحنی شکل است، تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای، توسط R.T. Faal و A.A. Dehghan [10] ارائه شد. آن‌ها تأثیر طول ترک‌ها و اندرکنش بین آن‌ها را بر روی ضریب شدت تنش در نوک ترک‌ها مورد بررسی قرار دادند. R. Bagheri و همکارانش ([11]-[12])، باریکه‌ای ساخته شده از ماده پیزوالکتریک و الکترومگنتوالاستیک با خواص تابعی

را بررسی کردند. در این تحقیق، تغییرات مدول برشی ماده تابعی به‌صورت یک تابع نمایی در راستای عرض باریکه مدل‌سازی شد. سپس با استفاده از روش توزیع نابجائی، مسأله باریکه حاوی چندین ترک متحرک حل گردید. اثرات طول ترک، سرعت حرکت ترک و پارامترهای ماده بر روی ضرایب شدت تنش و میدان تنش در نواحی ترک‌ها تحلیل شد. H. Afshar و R. Bagheri [13]، تحلیل ترک‌های چندگانه در یک لایه پیزوالکتریک تحت بارگذاری مکانیکی و الکتریکی درون صفحه‌ای با زمان هارمونیک را در چارچوب الکتروالاستیسیته خطی مورد بررسی قرار دادند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که تنش و ضرایب شدت جابجایی الکتریکی در نوک ترک‌ها وابسته به موقعیت و هندسه ترک‌ها هستند. K. Kafaei و R. Bagheri [14]، تحلیل تنش چندین ترک در یک صفحه مستطیلی پیزوالکتریک غیرهمگن تحت بارگذاری الکترومکانیکی را بررسی کردند. این مطالعه تأثیرات ناشی از پارامترهای هندسی و خواص غیرهمگن ماده بر رفتار ترک‌ها و ضرایب شدت تنش در این نوع محیط‌ها را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. S.M. Hosseini و همکارانش [15]، مسأله مکانیک شکست را در یک نیم‌لایه غیرهمگن تقویت‌شده توسط یک نیم‌لایه از جنس ماده مگنتوالکتروالاستیک تحت بارگذاری خارج صفحه‌ای بررسی کردند. در این تحقیق، آن‌ها تأثیر فاصله بین ترک‌ها، طول و موقعیت ترک‌ها و همچنین اثر خواص ماده تابعی بر روی ضرایب شدت تنش در نواحی ترک‌ها را مطالعه کردند. R. Bagheri و V. Enjilela [16]، ضرایب شدت تنش در نوک‌های چندین ترک واقع در فصل مشترک دو نیم‌صفحه ساخته‌شده از ماده تابعی تحت بارگذاری الاستودینامیکی درون صفحه‌ای را با استفاده از روش توزیع نابجائی به‌دست آوردند. در این تحقیق، آن‌ها از تبدیلات انتگرالی برای حل مسأله استفاده کرده و تأثیر نسبت پواسون، ثابت ماده تابعی، طول ترک، فرکانس بارگذاری و اندرکنش بین ترک‌ها را بر روی ضرایب شدت تنش بررسی کردند.

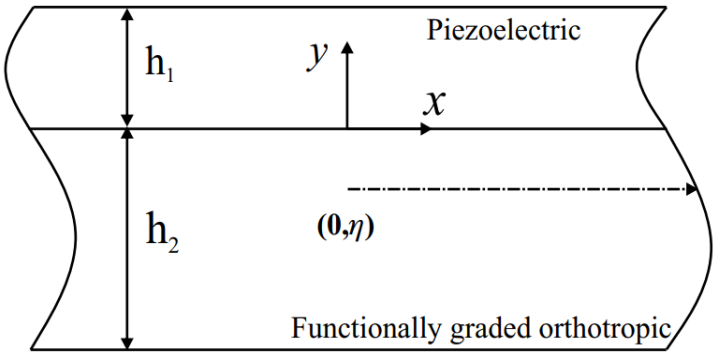
در این مقاله، حل تحلیلی مسأله نیم‌لایه ساخته‌شده از مواد ارتوتروپیک با خاصیت تابعی تقویت‌شده توسط یک نیم‌لایه از جنس ماده پیزوالکتریک، حاوی چندین ترک و حفره در بستر غیرهمگن تحت بارگذاری الاستودینامیکی خارج صفحه‌ای، از طریق روش توزیع نابجائی انجام شده است. برای به‌دست‌آوردن معادلات انتگرالی توزیع نابجائی در اطراف ترک‌ها و حفره، از این حل تحلیلی استفاده شده است. این معادلات انتگرالی دارای تکینگی از نوع کوشی هستند و از حل آن‌ها، توزیع نابجائی در نواحی ترک‌ها و حفره و در نتیجه ضرایب شدت تنش ترک‌ها و تنش‌های محیطی در حفره به‌دست آمده است. یکی از مزایای این روش نسبت به دیگر روش‌ها این است که در بسیاری از مطالعات پیشین، محققین تنها قادر به حل مسأله با تعداد محدودی ترک بوده‌اند، در حالی‌که در روش پیشنهادی، تعداد ترک‌ها تأثیری در فرآیند حل ندارد و امکان تحلیل مسأله با تعداد زیادی ترک و حفره به‌طور همزمان فراهم می‌شود.

2- تحلیل نابجائی در نیم لایه ارتوتروپیک ناهمگن تقویت شده با ماده پیزوالکتریک

محیط مورد مطالعه متشکل از یک لایه ارتوتروپیک ناهمگن با ضخامت h_2 است که به‌وسیله لایه‌ای از جنس ماده پیزوالکتریک با ضخامت h_1 تقویت شده است. این محیط تحت اثر بارگذاری دینامیکی خارج از صفحه قرار دارد. بر اساس نظریه نابجائی ولترا، به دلیل ماهیت چندمقداری تابع جابجایی در امتداد خط نابجائی، ناپیوستگی در مؤلفه‌های تغییر مکان در محل نابجائی به وجود می‌آید. مطابق شکل (1)، نابجائی در مختصات

$(0,\eta)$ قرار داشته و امتداد خط نابجائی موازی با محور x در نظر گرفته شده است. با توجه به نوع بارگذاری، مؤلفه‌های تغییر مکان در راستای محورهای x,y یعنی u,v، صفر در نظر گرفته می‌شوند و تنها مؤلفه عمود بر صفحه، W، دارای مقدار غیرصفر است. همچنین، میدان الکتریکی درون‌صفحه‌ای با مؤلفه‌های E_x و E_y به ترتیب در راستاهای y,x تعریف می‌شود. در ادامه، روابط حاکم بر این میدان‌ها ارائه می‌گردند.

$$u=0,\ v=0, w=w(x,y,t)$$
$$E_x=E_x(x,y,t), E_y=E_y(x,y,t), E_z=0 \quad (1)$$



شکل 1- نمایش نابجائی در لایه ارتوتروپیک غیرهمگن تقویت شده توسط یک لایه پیزوالکتریک

روابط میان میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی که با نماد φ نشان داده می‌شود، به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2)$$

مؤلفه های تنش و جابجایی الکتریکی در لایه پیزوالکتریک و همچنین مؤلفه های تنش در لایه ارتوتروپیک با خاصیت تابعی،از طریق روابط زیر قابل بیان هستند:

$$\begin{bmatrix} \tau_{zx} & \tau_{zy} \\ D_x & D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{440} & e_{150} \\ e_{150} & -d_{110} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad 0 < y < h_1 \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_x(y) \frac{\partial W}{\partial x} \\ \mu_y(y) \frac{\partial W}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad -h_2 < y < 0 \quad (4)$$

ثابت‌های الاستیسته، پیزوالکتریک و دی الکتریک به ترتیب برابر با c_{440}، e_{150} و d_{110} می‌باشند. در اینجا فرض شده است که ثابت‌های الاستیک برای باریکه ارتوتروپیک با ویژگی تابعی، به‌طور نمایی در راستای ضخامت باریکه تغییر می‌کنند. در نتیجه روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\mu_x(y) &= \mu_{x0}e^{2\lambda y}\\ \mu_y(y) &= \mu_{y0}e^{2\lambda y}\end{aligned} \tag{5}$$

که λ ثابت ماده تابعی بوده و μ_{x0},μ_{y0} ثابت‌های الاستیسته در راستاهای x,y در فصل مشترک دو لایه می‌باشند. در صورت عدم وجود نیروهای جسمی، معادلات حرکت به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}=\rho_0\dfrac{\partial^2W(x,y,t)}{\partial t^2}\\ \dfrac{\partial D_x}{\partial x}+\dfrac{\partial D_y}{\partial y}=0\end{cases}\qquad 0<y<h_1 \tag{6}$$

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}=\rho(y)\frac{\partial^2W(x,y,t)}{\partial t^2}\qquad -h_2<y<0 \tag{7}$$

که $\rho(y)$ چگالی سیستم است. با جایگذاری معادلات تنش (3) و (4) در معادلات (6) و (7) روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases}c_{440}\nabla^2W+e_{150}\nabla^2\varphi=\rho_0\dfrac{\partial^2W}{\partial t^2}\\ e_{150}\nabla^2W-d_{110}\nabla^2\varphi=0\end{cases}\qquad 0<y<h_1 \tag{8}$$

$$g^2\frac{\partial^2W(x,y,t)}{\partial x^2}+2\lambda\frac{\partial W(x,y,t)}{\partial y}+\frac{\partial^2W(x,y,t)}{\partial y^2}=S_{T_1}^2\frac{\partial^2W(x,y,t)}{\partial t^2}\qquad -h_2<y<0 \tag{9}$$

در رابطه بالا ∇^2 اپراتور لاپلاس در صفحه است و $g^2=\mu_{x0}/\mu_{y0}, S_{T_1}^2=\rho_0/\mu_{y0}$ می‌باشند. جهت تفکیک معادلات (8) تابع بلوشتین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(x,y,t)=\varphi-\alpha W(x,y,t) \tag{10}$$

در رابطه بالا $\alpha=e_{150}/d_{110}$ می‌باشد. با استفاده از تابع بلوشتین تعریف شده در رابطه (10) و جایگذاری آن در روابط (8)، معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \nabla^2 W(x,y,t) = S_{T_2}^2 \dfrac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \psi = 0 \end{cases} \qquad 0 < y < h_1 \quad (11)$$

در رابطه (11)، $S_{T_2}^2 = \rho_0 / \widetilde{c}_{440}$ و ثابت الکتروالاستیک به صورت $\widetilde{c}_{440} = (c_{440} + e_{150}^2 / d_{110})$ تعریف می‌شود. مؤلفه‌های تنش و جابجایی الکتریکی بیان شده در رابطه(3) بر حسب تابع ψ در ناحیه $0 < y < h_1$ به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} \tau_{zx} & \tau_{zy} \\ D_x & D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{c}_{440} & e_{150} \\ 0 & -d_{110} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial x} & \dfrac{\partial W}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad 0 < y < h_1 \quad (12)$$

فرض بر این است که تغییر مکان بصورت هارمونیک با فرکانس معین ω انجام می‌شود. در نتیجه، اثرات شرایط اولیه حذف شده و تغییر مکان به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$W(x,y,t) = w(x,y) e^{i\omega t} \qquad (13)$$

با جایگذاری رابطه (13) در روابط (9) و (11) نتیجه به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \nabla^2 w(x,y) = -S_{T_2}^2 \omega^2 w(x,y) \\ \nabla^2 \psi(x,y) = 0 \end{cases} \qquad 0 < y < h_1 \quad (14)$$

$$g^2 \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = -S_{T_1}^2 \omega^2 w(x,y) \qquad -h_2 < y < 0 \quad (15)$$

روابط (14) و (15) دستگاه معادلات با مشتقات جزئی را بیان می‌کنند. حل تحلیلی این دستگاه معادلات نیازمند بررسی شرایط مرزی مسأله است. طبق شکل (1)، نابجائی در موقعیت $(0,\eta)$ قرار دارد. نابجائی در الاستیسیته به‌طور معمول با ایجاد شکافی در محیط الاستیک و حرکت لبه‌های شکاف نسبت به یکدیگر و سپس حذف شکاف تعریف می‌شود. در پی این فرایند، تغییر مکان در جسم به‌صورت چند مقداری در می‌آید و میدان تنش در ماده ایجاد می‌شود. در صورتی‌که تغییر مکان وجوه شکاف در جهت عمود بر لبه شکاف به اندازه b_z باشد نابجائی به‌عنوان نابجائی خارج‌صفحه‌ای شناخته می‌شود، که b_z مولفه بردار برگرز[1] نامیده می‌شود. مولفه تغییر مکان، طبق تئوری ولترا، در محل نابجائی به دلیل ماهیت چند مقداری تغییر مکان در امتداد خط نابجائی، ناپیوستگی دارد. بنابراین، می‌توان رابطه زیر را در نظر گرفت:

$$w(x,\eta^+) - w(x,\eta^-) = b_z H(x) \qquad (16)$$

[1] Burgers vector

که $H(x)$ تابع پله‌ای واحد است. همچنین مولفه‌های تنش در امتداد خط نابجائی دارای پیوستگی هستند. این شرط به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tau_{zy}(x,\eta^{+}) = \tau_{zy}(x,\eta^{-}) \tag{17}$$

در این‌صورت، شرایط مرزی و حدی باریکه ارتوتروپیک تابعی با پوششی از جنس مواد پیزوالکتریک عبارتند از:

$$\begin{aligned}
&\tau_{zy}(x,h_1) = 0\\
&\tau_{zy}(x,-h_2) = 0\\
&D_y(x,h_1) = 0\\
&D_y(x,0^{+}) = 0\\
&\tau_{zy}(x,0^{+}) = \tau_{zy}(x,0^{-}) = k[w(x,0^{+}) - w(x,0^{-})]\\
&\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=\pm\infty} = 0,\ \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=\pm\infty} = 0\\
&\lim_{|x|\to\infty} w = 0,\ \lim_{|x|\to\infty} \varphi = 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

که در آن k ضریب چسبندگی بین باریکه و پوشش می‌باشد. برای حل مسأله از تبدیل فوریه نمایی استفاده شده است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\zeta x}\, dx \tag{19}$$

$i = \sqrt{-1}$ پارامتر موهومی است. معکوس تبدیل فوریه عبارت است از:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) e^{-i\zeta x}\, d\zeta \tag{20}$$

حال با اعمال تبدیل فوریه(19) به روابط (14) و (15)، نتایج زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 w^{*}(\zeta,y)}{dy^2} - r_2^2 w^{*}(\zeta,y) = 0\\ \dfrac{d^2 \psi^{*}(\zeta,y)}{dy^2} - \zeta^2 \psi^{*}(\zeta,y) = 0 \end{cases} \qquad 0 < y < h_1 \tag{21}$$

$$\frac{d^2 w^{*}(\zeta,y)}{dy^2} + 2\lambda \frac{dw^{*}(\zeta,y)}{dy} - r_1^2\, w^{*}(\zeta,y) = 0 \qquad -h_2 < y < 0 \tag{22}$$

که در روابط (21) و (22)، $r_1^2 = (g^2\zeta^2 - S_{T_1}^2\omega^2)$ و $r_2^2 = (\zeta^2 - S_{T_2}^2\omega^2)$ می‌باشند. روابط (21) و (22) دستگاه معادلات کامل با ضریب ثابت است که به سادگی قابل حل می‌باشند. بنابراین $w^{*}(\zeta,y)$ و $\psi^{*}(\zeta,y)$ برای هر بخش در فضای فوریه بصورت زیر حاصل خواهند شد:

$$\begin{cases} w_1^{*}(\zeta, y) = A_1 e^{(\beta-\lambda)y} + A_2 e^{-(\beta+\lambda)y} & \eta < y < 0 \\ w_2^{*}(\zeta, y) = A_3 e^{(\beta-\lambda)y} + A_4 e^{-(\beta+\lambda)y} & -h_2 < y < \eta \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} w_3^{*}(\zeta, y) = A_5 \sinh(r_2 y) + A_6 \cosh(r_2 y) \\ \psi_3^{*}(\zeta, y) = A_7 \sinh(\zeta y) + A_8 \cosh(\zeta y) \end{cases} \quad 0 < y < h_1 \quad (24)$$

که ضرایب $A_i, i = \{1,2,3,...,8\}$ توابعی از ثابت تبدیل فوریه می باشند که با استفاده از شرایط مرزی بدست می‌آیند و $\beta = \sqrt{\lambda^2 + r_1^2}$ می‌باشد. با توجه به بررسی عیوب موجود در باریکه‌ای از جنس مواد تابعی ارتوتروپیک و با در نظر گرفتن شرط پیوستگی تنش در دو سوی خط نابجائی، تنها محاسبه میدان تنش در لایه پایین صفحه الاستیک در یکی از نواحی کافی خواهد بود. بر این اساس، با بهره‌گیری از روبط (4) و (23)، میدان تنش به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tau_{zy} = \frac{-\mu_{y0} e^{2\lambda y} b_z}{\pi} \times \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda(\eta-y)} Q_1 \sinh(\beta(y+h_2)) r_1^2}{\zeta\beta\{\sinh(\beta h_2) k r_1^2 \coth(h_1 r_2)\mu_{y0} + c_{440} r_2 [\sinh(\beta h_2)(k\lambda + r_1^2 \mu_{y0}) + \cosh(\beta h_2) k\beta]\}} \sin(\zeta x) d\zeta \quad -h_2 < y < \eta \quad (25)$$

$$\tau_{zx} = \frac{-\mu_{x0} e^{2\lambda y} b_z}{\pi} \times \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda(\eta-y)} Q_1 [\beta \cosh(\beta(y+h_2)) + \lambda \sinh(\beta(y+h_2))]}{\beta\{\sinh(\beta h_2) k r_1^2 \coth(h_1 r_2)\mu_{y0} + c_{440} r_2 [\sinh(\beta h_2)(k\lambda + r_1^2 \mu_{y0}) + \cosh(\beta h_2) k\beta]\}} \cos(\zeta x) d\zeta \quad -h_2 < y < \eta$$

در رابطه بالا Q_1, بصورت زیر تعریف می‌گردند:

$$Q_1 = k r_1^2 \coth(h_1 r_2) \sinh(\beta\eta)\mu_{y0} - \tilde{c}_{440} r_2 [k\beta \cosh(\beta\eta) + \sinh(\beta\eta)(k\lambda - r_1^2 \mu_{y0})] \quad (26)$$

از آنجا که انتگرال رابطه‌ی (25) تابعی پیوسته از متغیر ζ است و همچنین تابع درون انتگرال‌گیر در $\zeta = 0$ محدود باقی می‌ماند، انتظار می‌رود که نقاط تکینگی در ناحیه‌ای که $\zeta \to +\infty$، ظاهر شود. رفتار مجانبی مولفه‌های تنش در نزدیکی رأس نابجائی، یعنی در نقطه‌ی $x \to 0$ و $y \to \eta$ ، از نوع تکینگی کوشی بوده و به صورت کلی $\frac{1}{r}$ بیان می‌شود. این بدان معناست که مقدار تنش در محل نابجائی به بی‌نهایت میل می‌کند، که یکی از ویژگی‌های شناخته شده نابجائی است. برای یک نیم لایه $x > 0$ که شامل یک نابجائی خارج از صفحه در موقعیت (s,η) است، مؤلفه های تنش به دست آمده از رابطه‌ی (25) باید شرط مرزی زیر را ارضا نماید:

$$\tau_{zx}(0, y) = 0 \quad (27)$$

در راستای تعیین میدان تنش، مؤلفه‌های تنش در نیم لایه‌ای از جنس ماده ارتوتروپیک تابعی، که توسط نیم لایه‌ای پیزوالکتریک تقویت شده است، در ناحیه $x < 0$ و در حالتی‌که نابجائی با بردار برگرز $-b_z$ در موقعیت

$(-s,\eta)$ قرار دارد، با استفاده از روش تصویرسازی و برمبنای اصل برهم نهی اثرات، به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\tau_{zy} = -\frac{\mu_y(y) b_z e^{\lambda(\eta-y)}}{\pi}\left[\int_0^{\infty}\left(\frac{M_1}{M_2}+\frac{g}{2}e^{g\zeta(y-\eta)}\right)\sin(\zeta(x-s))d\zeta - \frac{g}{2}\frac{(x-s)}{(x-s)^2+g^2(y-\eta)^2}\right]$$
$$+\frac{\mu_y(y) b_z e^{\lambda(\eta-y)}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{M_1}{M_2}\sin(\zeta(x+s))d\zeta \qquad -h_2 < y < \eta \qquad (28)$$

$$\tau_{zx} = -\frac{\mu_x(y) b_z e^{\lambda(\eta-y)}}{\pi}\left[\int_0^{\infty}\left(\frac{M_3}{M_2}+\frac{1}{2}e^{g\zeta(y-\eta)}\right)\cos(\zeta(x-s))d\zeta + \frac{g}{2}\frac{(y-\eta)}{(x-s)^2+g^2(y-\eta)^2}\right]$$
$$+\frac{\mu_x(y) b_z e^{\lambda(\eta-y)}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{M_3}{M_2}\cos(\zeta(x+s))d\zeta \qquad -h_2 < y < \eta$$

در رابطه بالا $M_i, i \in \{1,2,3\}$ بصورت زیر تعریف می‌گردند:

$$M_1 = Q_1 \sinh(\beta(y+h_2))r_1^2$$

$$M_2 = \zeta\beta\{\sinh(\beta h_2)kr_1^2\coth(h_1 r_2)\mu_{y0} + c_{440}r_2[\sinh(\beta h_2)(k\lambda + r_1^2\mu_{y0}) + \cosh(\beta h_2)k\beta]\} \qquad (29)$$

$$M_3 = \zeta Q_1[\beta\cosh(\beta(y+h_2)) + \lambda\sinh(\beta(y+h_2))]$$

3- معادلات انتگرالی در محیط‌های حاوی ترک

حل نابجائی بدست آمده در فصل قبل را می‌توان برای تحلیل نیم لایه ارتوتروپیک ساخته شده از مواد تابعی با پوششی از مواد پیزوالکتریک که حاوی چندین ترک است، به‌کار برد. فرض کنید در نیم‌لایه ارتوتروپیک ساخته شده از مواد تابعی، N ترک وجود دارد. معادلات پارامتری ترک‌ها به‌صورت زیر ارائه می‌شوند:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q) \\ y_i &= y_i(q) \end{aligned} \qquad i = 1,2,\ldots,N \qquad -1 \le q \le 1 \qquad (30)$$

سیستم مختصات عمود بر هم t و n به گونه‌ای انتخاب شده است که محور t مماس بر سطح ترک باشد و مبداء مختصات روی سطح ترک حرکت کند. بردار تنش خارج‌صفحه‌ای در سطح ترک i -ام، بر اساس مولفه‌های تنش در مختصات کارتزینی، به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\sigma_{nz}(x_i, y_i) = \sigma_{zy}\cos\phi_i - \sigma_{zx}\sin\phi \qquad i \in \{1,2,\ldots,N\}_i \qquad (31)$$

در رابطه فوق، $\phi_i = \tan^{-1}(y_i'(q)/x_i'(q))$ زاویه بین محورهای x و t می‌باشد. با قراردادن توزیع نابجائی با چگالی نامشخص $B_{zj}dl$ روی ترک j ام به مختصات $(x_j(p), y_j(p))$ روی المان بی‌نهایت کوچک $l_j dt$، میدان تنش ایجاد شده روی سطح ترک i ام بدست می‌آید. در صورتی‌که N ترک وجود داشته باشد، با استفاده از اصل جمع آثار، میدان تنش به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{nz}(x_i(q), y_i(q)) = \sum_{j=1}^{N}\int_{-1}^{1}[k_{ij}^{11}(q,p)B_{zj}(p)]l_j\,dp \qquad (32)$$

مطابق با اصل باکنر [17]، مولفه تنش ناشی از بارگذاری خارجی در محل ترک‌ها در محیط بدون ترک پس از تغییر علامت در رابطه (32) قرار گرفته و دانسیته نابجائی $B_{zj}(p)$ باید محاسبه گردد. در این رابطه، هسته معادله انتگرالی در رابطه (32) یعنی $K_{ij}(q,p)$ برابر با ضرایب b_z در رابطه (31) است که با استفاده از روش نابجائی محاسبه شده است.

پس از محاسبه چگالی نابجائی در ترک‌های موجود در نیم لایه‌ی ارتوتروپیک ساخته شده از مواد تابعی، لازم است روابطی ارائه شود که به‌کمک آن‌ها بتوان ضرایب شدت تنش در نوک ترک‌ها را بر حسب چگالی نابجائی محاسبه کرد. با استفاده از تعریف تابع چگالی نابجائی، بازشدگی دهانه ترک برای ترک j ام از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$w_j^+(q)-w_j^-(q)=\int_{-1}^{q}\sqrt{[x_j'(p)]^2+[y_j'(p)]^2}\,B_{zj}(p)dp=\int_{-1}^{q}I_j B_{zj}(p)dp \qquad j=1,2,...,N \qquad (33)$$

در این رابطه، -1 حد پایین که نمایان‌گر ابتدای ترک با طول بی بعد شده واحد است و N تعداد ترک‌ها را نشان می‌دهد. $w_j^+(q)$ و $w_j^-(q)$ ،به ترتیب تغییر مکان لبه بالایی و پایینی ترک در نقطه‌ای واقع بر سطح ترک را بیان می‌کند. برای ترک‌های واقع در نیم لایه‌ی ارتوتروپیک ساخته شده از مواد تابعی، جابجایی در خارج از لبه‌های ترک تک مقداری است. از این‌رو، برای چگالی نابجائی باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$I_j\int_{-1}^{1}B_{zj}(p)dp=0 \qquad j=1,2,...,N \qquad (34)$$

چگالی نابجائی از حل همزمان معادلات انتگرالی (32) و (34) بدست می‌آید. به‌دلیل وجود تکینگی تنش در نوک ترک‌ها، تابع چگالی نابجائی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود، به گونه‌ای که $g_{zj}(p)$ تابع محدود و پیوسته است.

$$B_{zj}(p)=\frac{g_{zj}(p)}{\sqrt{1-p^2}} \qquad -1\le p\le 1 \qquad j=1,2,...,N \qquad (35)$$

حل عددی معادلات انتگرالی با تکینگی کوشی برای نخستین بار توسط F. Erdogan و همکارانش [18] معرفی شد. در این روش، معادلات انتگرالی در نقاط خاصی که توسط ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشهف[1] و نظائر آن تعیین می‌شوند، گسسته می‌گردند و به یک سیستم معادلات جبری خطی تبدیل می‌شوند. با حل این سیستم معادلات جبری، چگالی نابجائی در نقاطی که معادلات گسسته شده‌اند، محاسبه می‌شود. پس از قراردادن رابطه (35) در روابط (32) و(33)، سیستم معادلات جبری خطی زیر به‌دست می‌آید [19]:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_{z1}(p_n) \\ g_{z2}(p_n) \\ \vdots \\ g_{zN}(p_n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_1(q_r) \\ T_2(q_r) \\ \vdots \\ T_N(q_r) \end{bmatrix} \qquad (36)$$

که در آن نقاطی که در آن معادلات انتگرالی گسسته شده‌اندعبارتنداز:

$$q_r=\cos(\frac{\pi r}{m})\ ,\mathrm{r}=1,2,...,\mathrm{m}-1\ ,\ \ p_t=\cos(\frac{\pi(2t-1)}{2m}),\mathrm{t}=1,2,...,\mathrm{m} \qquad (37)$$

[1]Chebyshev polynomials

و درآیه‌های ماتریس و بردارها در رابطه (22) عبارتند از

$$A_{ij}=\begin{bmatrix} B_{ij} & 0 \\ 0 & B_{ij} \end{bmatrix}$$

که در رابطه بالا B_{ij} بصورت زیر است.

$$B_{ij}=\frac{\pi}{m}\begin{bmatrix} K_{ij}(q_1,p_1)\Delta_i(p_1) & K_{ij}(q_1,p_2)\Delta_i(p_2) & \cdots & K_{ij}(q_1,p_m)\Delta_i(p_m) \\ K_{ij}(q_2,p_1)\Delta_i(p_1) & K_{ij}(q_2,p_2)\Delta_i(p_2) & \cdots & K_{ij}(q_2,p_m)\Delta_i(p_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{ij}(q_{m-1},p_1)\Delta_i(p_1) & K_{ij}(q_{m-1},p_2)\Delta_i(p_2) & \cdots & K_{ij}(q_{m-1},p_m)\Delta_i(p_m) \\ \delta_{ij}\Delta_i(p_1) & \delta_{ij}\Delta_i(p_2) & \cdots & \delta_{ij}\Delta_i(p_m) \end{bmatrix}$$

(38)

که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر می باشد. ضریب شدت تنش برای ترک iام بر حسب بازشدگی دهانه ترک بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$K_{Li}=\frac{\sqrt{2}}{4}g\mu_y(y)\lim_{r_{Li}\to 0}\frac{w_i^-(q)-w_i^+(q)}{\sqrt{r_{Li}}}$$
$$K_{Ri}=\frac{\sqrt{2}}{4}g\mu_y(y)\lim_{r_{Ri}\to 0}\frac{w_i^-(q)-w_i^+(q)}{\sqrt{r_{Ri}}} \quad (39)$$

با جایگذاری روابط (33) و (35) در رابطه (39) و استفاده از بسط تیلور و عملیات جبری، ضرایب شدت تنش برای ترک iام بصورت زیر بدست می‌آیند.

$$K_{Li}=\frac{g\mu_y(y)}{2}\left[[\alpha_i'(-1)]^2+[\beta_i'(-1)]^2\right]^{\frac{1}{4}}g_{zi}(-1)$$
$$K_{Ri}=-\frac{g\mu_y(y)}{2}\left[[\alpha_i'(1)]^2+[\beta_i'(1)]^2\right]^{\frac{1}{4}}g_{zi}(1) \quad (40)$$

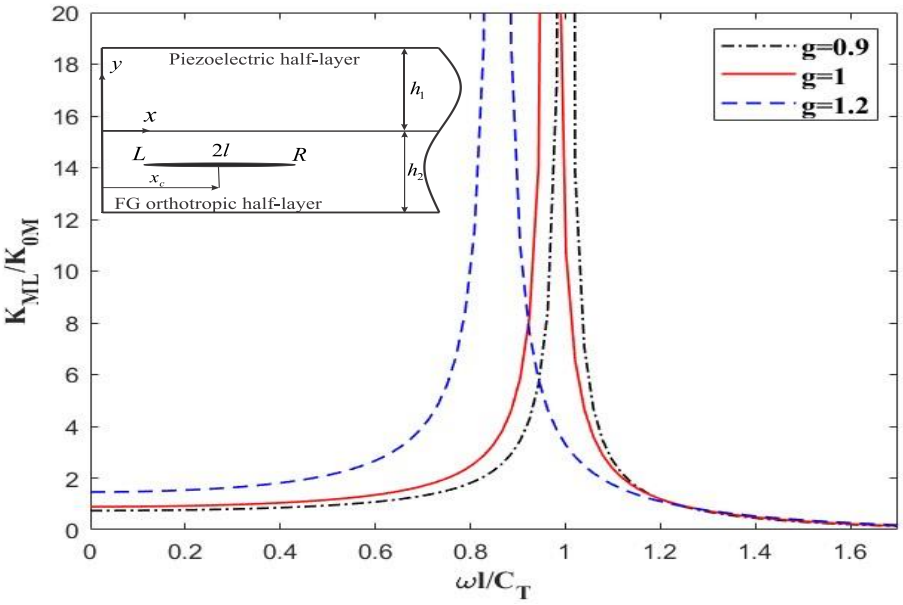
4- نتایج و مثال‌های عددی

با بهره‌گیری از حل نابجائی به‌دست‌آمده، نمونه‌هایی از نیم‌لایه‌های ارتوتروپیک ساخته‌شده از مواد تابعی ارائه شده است که توسط یک نیم‌لایه پیزوالکتریک تقویت گردیده‌اند. این ساختارها شامل چندین ترک و حفره می‌باشند که تأثیر قابل‌توجهی بر توزیع میدان‌های تنش دارند. به‌منظور بررسی دقیق تأثیر خواص ماده بر ضرایب شدت تنش در اطراف این عیوب، از ماده سرامیکی پیزوالکتریک PZT-4 به‌عنوان لایه تقویتی استفاده شده است. خواص فیزیکی و مکانیکی این ماده در ادامه ارائه شده و مبنای تحلیل‌های عددی قرار گرفته‌اند.[12]:

جدول 1 خواص ماده پیزوالکتریک مورد استفاده در مثال ها

$c_{440}(N/m^2)$	$e_{150}(C/m^2)$	$d_{110}(C/Vm)$	$\rho_0(kg/m^3)$
$2/56\times10^{10}$	$12/7$	$64/6\times10^{-10}$	7500

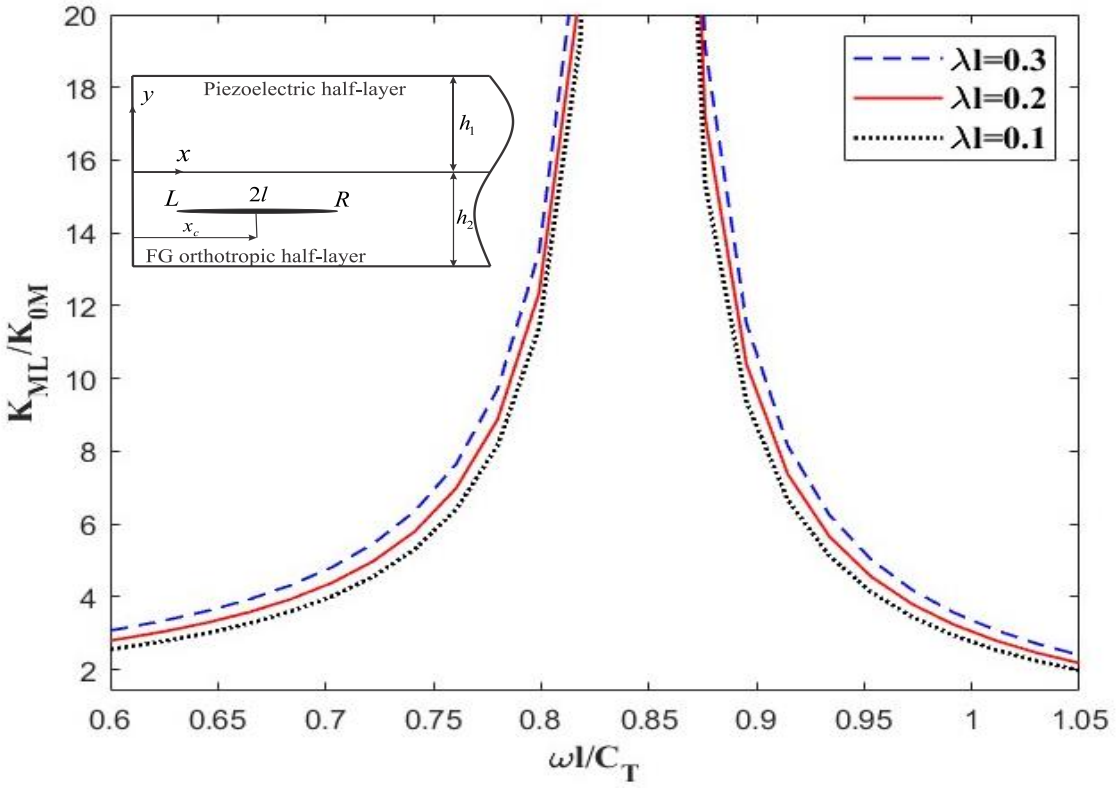
در این تحلیل، N نیرو بر حسب نیوتن، C بار الکتریکی برحسب کلون و V پتانسیل الکتریکی بر حسب ولت می‌باشند. ضرایب شدت تنش بوسیله $K_{0M}=\tau_0\sqrt{l}$ بی‌بعد می‌شوند که در آن l بیانگر نصف طول ترک است. در مثال‌های ارائه شده در این فصل، (x_c,y_c) مکان مرکز ترک را مشخص می‌کند. نمودار شکل (1) تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد شده یعنی نسبت K_{ML}/K_{0M} را در برابر فرکانس بی بعد شده $\omega l/C_T$ برای مقادیر مختلف پارامتر $g=0.9,1.0,1.2$ نشان می‌دهد. در این نمودار، مقدار نصف طول ترک مستقیم برابر با $l=0.05(m)$، ضخامت هر یک از لایه‌ها $h_1=h_2=0.1(m)$ و موقعیت مرکز ترک به صورت $x_c=2l$ و $y_c=0.5h_2$ در نظر گرفته شده‌اند. همچنین $C_T=1/\sqrt{\rho_0/\widetilde{c}_{440}}$ تعریف شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، پدیده رزونانس در بازه‌ی $0.8<\omega l/C_T<1.1$ رخ می‌دهد. تحلیل نتایج نشان می‌دهد که در $\omega l/C_T<0.8$، با افزایش مقدار g ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد. در مقابل، در فرکانس‌های $\omega l/C_T>1.1$، روند عکس مشاهده می‌شود؛ به‌طوری‌که با افزایش g، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد. این رفتار بیانگر وابستگی پیچیده‌ی پاسخ تنشی ماده به خواص مکانیکی لایه‌ها و فرکانس تحریک دینامیکی است.



شکل 1- تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد برحسب فرکانس بی بعد برای مقادیر مختلف g

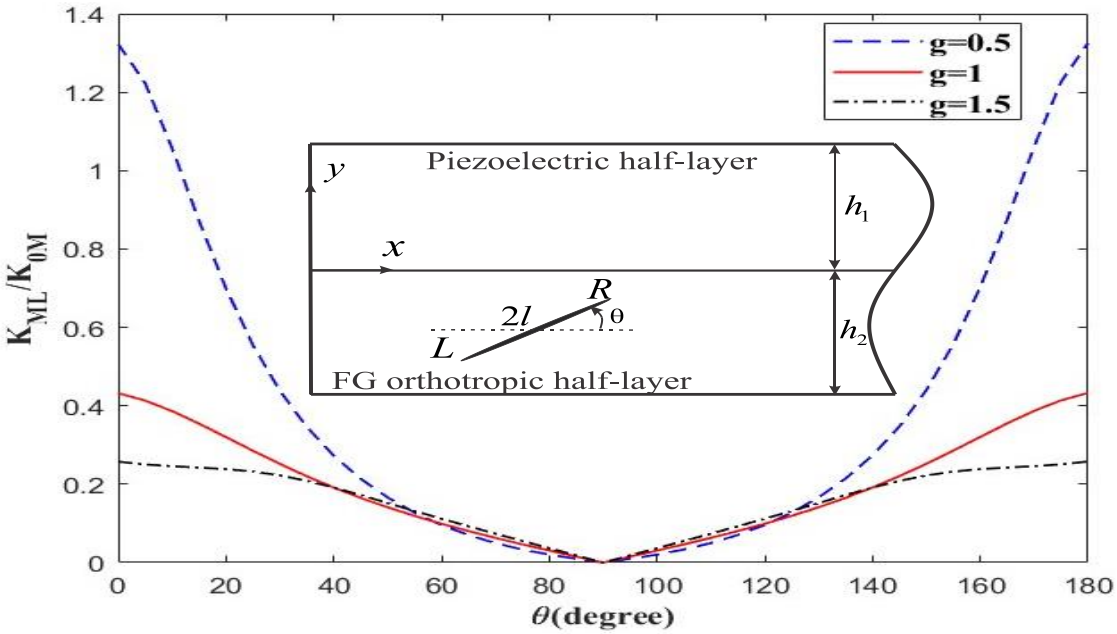
در شکل (2)، تغییرات ضرایب شدت تنش بی‌بعدشده نسبت به فرکانس بی‌بعد $\omega l/C_T$ برای مقادیر مختلف ثابت تابعی λl مورد بررسی قرار گرفته است. در این مثال، پارامترهای هندسی شامل ضخامت هر دو لایه به‌صورت $h_1=h_2=0.1(m)$ طول نیم‌ترک برابر $l=0.05(m)$ نسبت مدول‌های برشی $g=1.0$، و مختصات مرکز ترک به‌صورت $x_c=2l$ و $y_c=0.5h_2$ فرض شده‌اند. نتایج حاصل از نمودار نشان می‌دهد که با افزایش مقدار ثابت تابعی λl، که نشان‌دهنده نرخ تغییر خواص ماده در راستای ضخامت است، مقدار ضریب شدت تنش نیز افزایش می‌یابد. این افزایش بیانگر آن است که هرچه گرادیان خواص ماده در راستای ضخامت بیشتر

باشد، تمرکز تنش در ناحیه اطراف ترک افزایش می‌یابد. این پدیده می‌تواند ناشی از تغییر در سختی موضعی ماده و توزیع غیر یکنواخت تنش در مواد تابعی باشد که نقش مهمی در طراحی سازه‌های حساس به ترک در شرایط دینامیکی ایفا می‌کند.



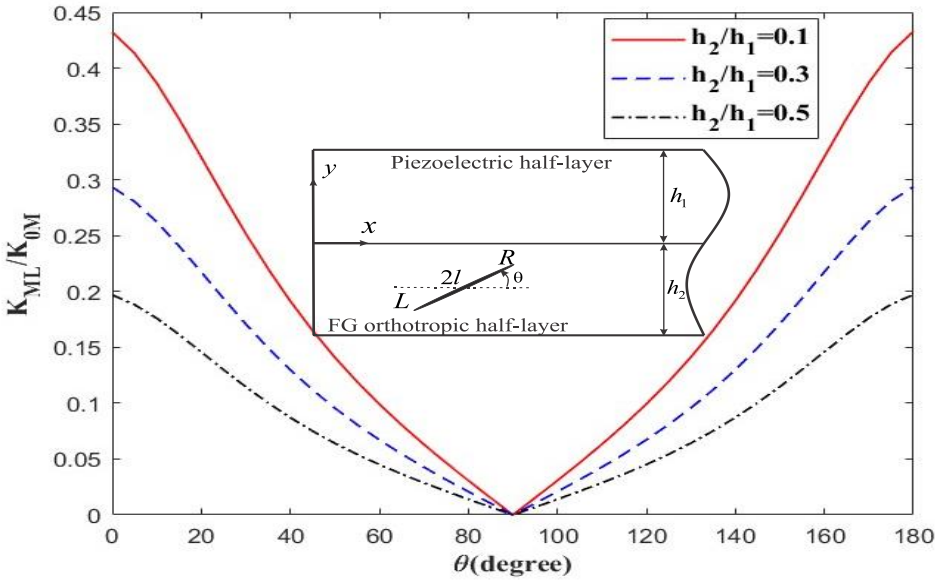
شکل2 تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد شده برحسب فرکانس بی بعد برای مقادیر مختلف λl

در مثال (3) نیم لایه ارتوتروپیک با رفتار تابعی توسط یک ترک به طول بی بعد شده $l/h_2 = 0.5$ واقع در خط مرکزی نیم لایه تضعیف شده است. در حالی‌که راستای آن با مرز نیم لایه زاویه θ را می‌سازد. مرکز ترک در خط مرکزی نیم لایه ارتوتروپیک با رفتار تابعی ثابت شده است. در شکل (3)، تغییرات ضریب شدت تنش بی‌بعد شده نسبت به زاویه θ برای مقادیر مختلف نسبت مدول برشی $g = 0.5,1.0,1.5$ بررسی شده است. بارگذاری در این مثال به‌صورت $\tau_0 \cos\theta$ در نظر گرفته شده است. انتظار می‌رود در زاویه $\theta = \pi/2$ بدلیل اینکه بردار تنش روی سطح ترک برابر صفر است، ضریب شدت تنش صفر باشد. نتایج نشان می‌دهند که در بازه‌های زاویه‌ای $0^\circ < \theta < 50^\circ$ و $130^\circ < \theta < 180^\circ$، با افزایش نسبت مدول برشی g، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد. این کاهش در اثر تأثیرات سختی بیشتر نیم‌لایه ناشی از افزایش مدول برشی است که باعث توزیع یکنواخت‌تر و بهینه‌تر تنش‌ها در اطراف ترک می‌شود، بنابراین تمرکز تنش در این نواحی کاهش می‌یابد. اما در بازه زاویه‌ای $50^\circ < \theta < 130^\circ$، تغییرات ضریب شدت تنش، با افزایش مدول برشی به‌صورت خیلی ناچیز به‌صورت افزایشی مشاهده می‌شود. این افزایش به‌دلیل تعامل پیچیده‌تر بارگذاری با ویژگی‌های ماده در این نواحی است. در این نواحی، تغییرات سختی در اثر افزایش g باعث تمرکز بیشتر تنش‌ها می‌شود که در نهایت موجب افزایش جزئی ضریب شدت تنش در این ناحیه می‌گردد.



شکل 3- تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد یک ترک زاویه دار برای مقادیر مختلف g

در مثال (4)، تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب ضخامت لایه‌ها $h_2/h_1 = 0.1,0.3,0.5$ بررسی شده است. در این مثال، نصف طول ترک $l = 0.01(m)$ و مدول برشی $g = 1$ در نظر گرفته شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش ضخامت لایه بستر، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد. این کاهش به‌دلیل تغییرات هندسی در بستر است. هنگامی که ضخامت بستر افزایش می‌یابد، ظرفیت ماده برای توزیع بار و تنش در ناحیه ترک بیشتر می‌شود. در نتیجه، توانایی جذب و پراکندگی انرژی در اطراف ترک افزایش یافته و تمرکز تنش کاهش می‌یابد. این اثر ناشی از این است که بستر ضخیم‌تر به‌عنوان یک ساختار انعطاف‌پذیرتر عمل کرده و تنش‌های اعمال‌شده به ترک را بیشتر پراکنده می‌کند. این ویژگی باعث می‌شود که در نهایت ضریب شدت تنش در بسترهای ضخیم‌تر کاهش یابد. این رفتار به‌طور طبیعی در مواد و ساختارهای ارتوتروپیک قابل پیش‌بینی است.

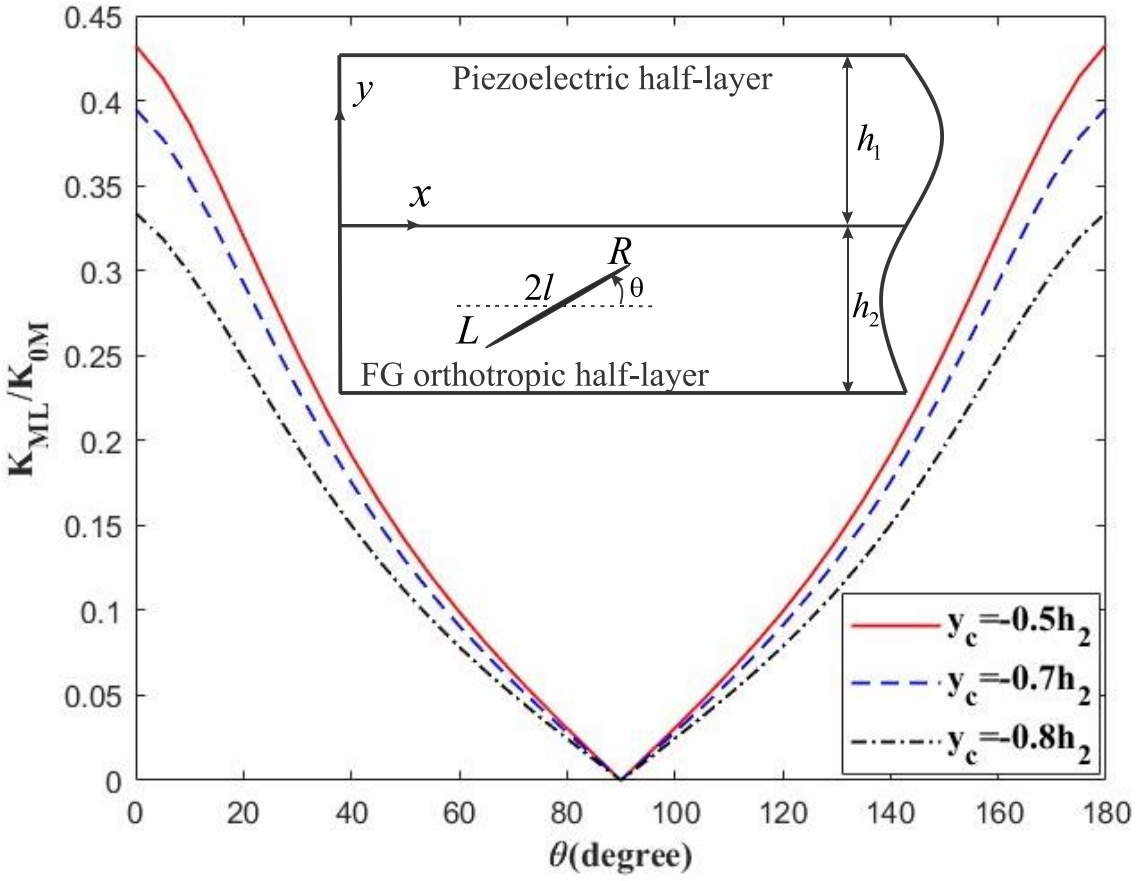


شکل 4- تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد یک ترک زاویه دار برای مقادیر مختلف h_2/h_1

در شکل (5)، تغییرات ضریب شدت تنش بی‌بعد شده برای یک ترک زاویه‌دار بر حسب موقعیت ترک بررسی شده است. در این مثال، نسبت $y_c/h_2 = 0.5,0.7,0.8$ در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهند که با کاهش فاصله ترک از لبه پائینی، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد. این کاهش می‌تواند ناشی از دو عامل مختلف باشد:

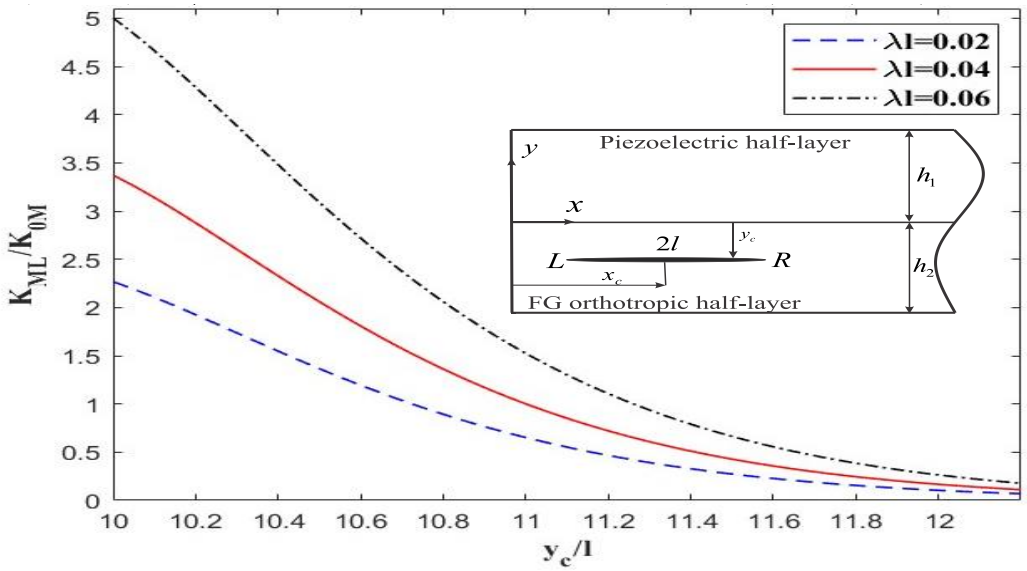
الف) نزدیک شدن ترک به لبه پائینی: با نزدیک شدن ترک به لبه پائینی، تغییرات هندسی در ناحیه اطراف ترک می‌تواند منجر به توزیع بهینه‌تر تنش‌ها شود که در نتیجه تمرکز تنش کاهش می‌یابد.

ب) افزایش فاصله ترک از فصل مشترک بستر و پوشش: وقتی که ترک از فصل مشترک بستر و پوشش فاصله بیشتری می‌گیرد، تغییرات هندسی و اثرات مرزی در اطراف ترک تغییر می‌کند. این تغییرات باعث می‌شود که توانایی لایه‌ها در انتقال و توزیع بار بیشتر شده و به کاهش تمرکز تنش در ناحیه ترک منجر شود. در مجموع، این دو عامل باعث کاهش ضریب شدت تنش در موقعیت‌های مختلف ترک می‌شوند.



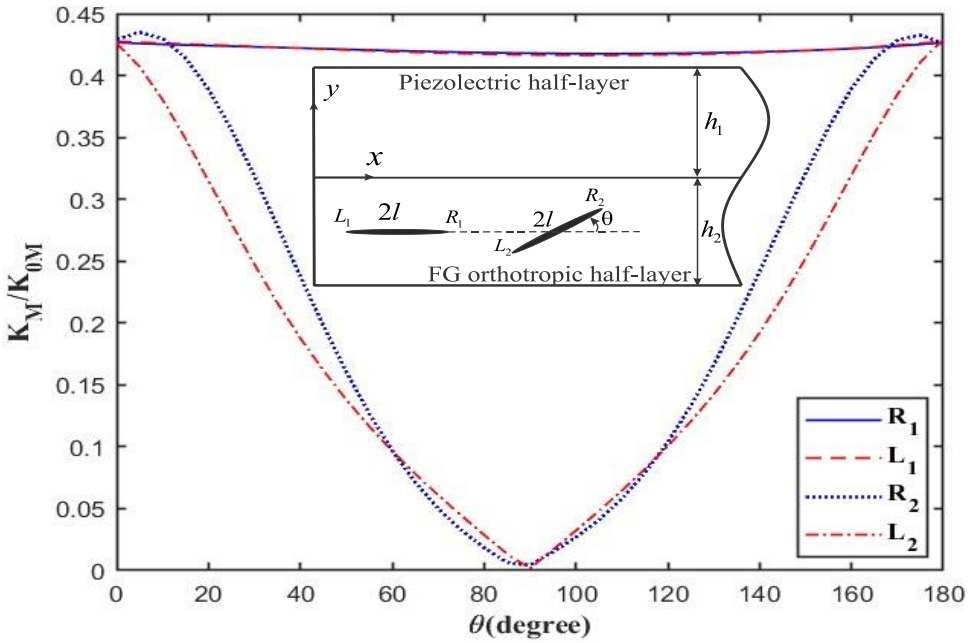
شکل 5- تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد یک ترک زاویه دار برای مقادیر مختلف y_c/h_2

در شکل (6) ضرایب شدت تنش بی بعد شده برای یک ترک افقی برحسب y_c/l به ازای مقادیر مختلف $\lambda l = 0.02,0.04,0.06$ بررسی شده است. که در آن $h_2/h_1 = 0.3$، $l = .01(m)$ و $x_c = 2l$ در نظر گرفته شده است. با توجه به این مثال مشاهده می‌شود که با افزایش λl ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد. همچنین مشهود است که با افزایش فاصله ترک از فصل مشترک بستر و پوشش، به دلیل کاهش اندرکنش بین نوک ترک و محل اتصال دو ماده، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد.



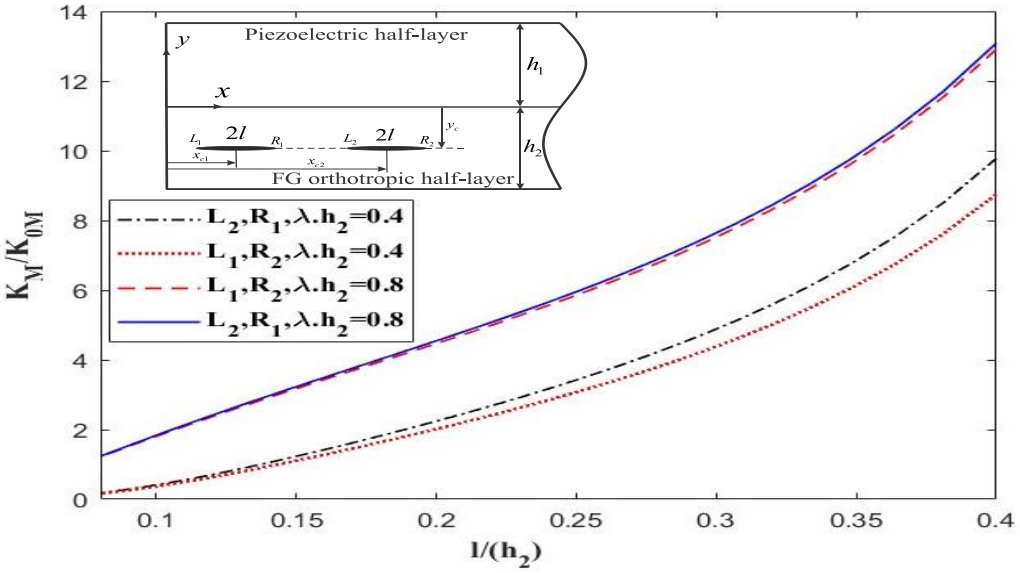
شکل 6- ضریب شدت تنش برای یک ترک افقی برحسب y_c/l برای مقادیر مختلف λl

در شکل (7)، نیم لایه ارتوتروپیک با خاصیت تابعی توسط دو ترک مستقیم تضعیف شده است. تغییرات ضریب شدت تنش بی‌بعد شده بر حسب تغییرات زاویه چرخش ترک رسم شده است. به‌طوری‌که ملاحظه می‌شود ترک L_1R_1 ثابت بوده در حالیکه ترک L_2R_2 حول مرکزش می‌چرخد. تغییرات ضریب شدت تنش برای ترک ساکن کم می‌باشد و این تغییرات به علت اندر کنش بین دو ترک می باشند. در $\theta = 0$ به علت تقارن، ضریب شدت تنش L_2 با R_1 و L_1 با R_2 یکسان است و همچنین نوک‌های R_1 و L_2 به هم نزدیک بوده و در نتیجه اندرکنش زیادی دارند که منجر به ضریب شدت تنش بالاتری نسبت به نوک‌های L_1 و R_2 می‌گردد. با دوران ترک، نوک L_2 از R_1 دور می‌شود و مقدار اندرکنش دو نوک به تدریج کاهش می‌یابد. در $\theta = 90^\circ$ با توجه به اینکه بردار تنش روی L_2R_2 برابر صفر می‌شود و اندرکنش بین ترک L_2R_2 با ترک L_1R_1 بسیار ضعیف است مقدار ضریب شدت تنش دو نوک L_2R_2 نزدیک به صفر است در حالی‌که برای L_1R_1 مقدار قابل توجهی است.



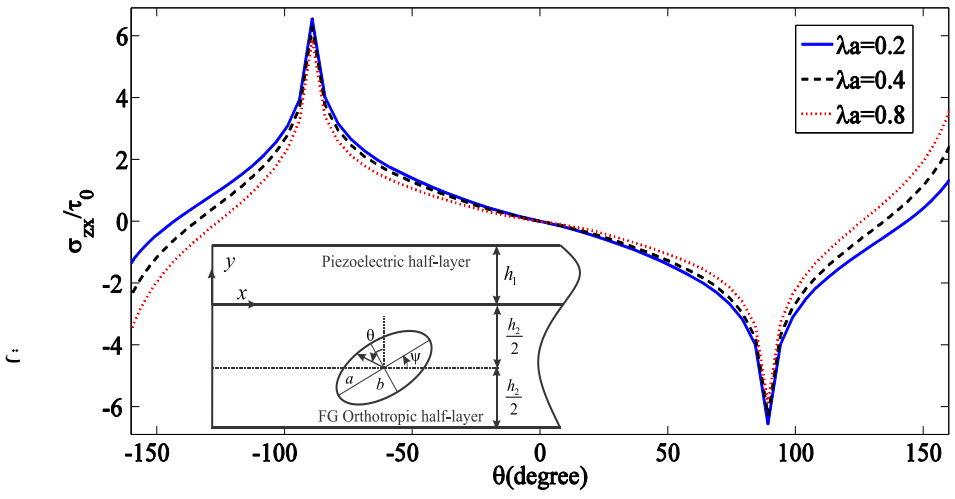
شکل 7- تغییرات ضرایب شدت تنش بر حسب زاویه بین یک ترک مستقیم و یک ترک چرخان

در مثال(8) دو ترک با طول‌های مساوی واقع در مرکز نیم لایه ارتوتروپیک با رفتار تابعی در نظر گرفته می‌شود. در این مثال تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد شده K_M/K_{0M}، بر حسب l/h_2 برای مقادیر مختلف λ رسم شده است. در این مثال برای $g=1.0$ و مقادیر مختلف $\lambda h_2=0.4,0.8$ نشان داده می‌شود که ضرایب شدت تنش با افزایش خاصیت تابعی و همچنین طول ترک، افزایش می‌یابد.



شکل 8- تغییرات ضرایب شدت تنش بر حسب طول ترک برحسب طول ترک برای دو ترک همراستا

محاسبه تنش محیطی در هر نقطه از سطح حفره را می‌توان با استفاده از تعریف چگالی نابجائی انجام داد[9]. در شکل (9)، نیم لایه ارتوتروپیک ساخته شده از مواد تابعی با پوششی از جنس ماده پیزوالکتریک توسط یک حفره بیضوی با ابعاد $a=2b$ تضعیف شده است. شکل (9) مقادیر تنش محیطی بی بعد شده σ_{zx}/τ_0 را برای $\omega=1000(rad/s)$ و به ازای مقادیر مختلف ثابت ماده تابعی $\lambda a=0.2,0.4,0.8$ که در آن $h_1=0.01(m),h_2=0.1(m)$ ، $a=0.2h_2$ و $x_c=2a,y_c/h_2=0.5$ و $\psi=90^\circ$برحسب زاویه θ نشان می‌دهد در حالی‌که زاویه θ از محور y اندازه گیری می‌شود. همانطوریکه از نمودار مشهود است بیشترین مقدار σ_{zx}/τ_0 نقطه $\theta=\pi/2$ اتفاق می‌افتد. در حالی‌که برای $\theta=0$ کمترین مقدار برای تنش محیطی بی‌بعد شده مشاهده می‌گردد. در این مورد، تنش محیطی بی بعد شده نسبت به خط مرکزی باریکه متقارن می‌باشد.



5- نتیجه گیری

روش‌های تحلیلی گوناگونی برای محاسبه ضرایب شدت تنش در محیط‌های دارای ترک به‌کار گرفته می‌شوند. از جمله این روش‌ها می‌توان به استفاده از توابع تنش مختلط، تبدیلات انتگرالی و توابع گرین اشاره کرد. یکی از مزایای روش حل مبتنی بر توزیع نابجائی این است که وابستگی آن به تعداد ترک‌ها وجود ندارد. همچنین، در حالی‌که حل مسائل ترک با استفاده از توابع تنش مختلط یا تبدیلات انتگرالی در زمره مسائل با شرط مرزی ترکیبی قرار می‌گیرند، در روش توزیع نابجائی، شرایط مرزی تنها از نوع جابجایی بوده و مسئله به یک محیط همبند با شرایط مرزی ساده تقلیل می‌یابد که حل آن به مراتب آسان‌تر از مسائل با شرایط مرزی ترکیبی است. افزون‌بر ترک‌ها، تحلیل تنش‌های محیطی پیرامون حفره‌ها نیز اهمیت زیادی در مهندسی شکست دارد. حضور حفره‌ها موجب تمرکز تنش در اطراف آن‌ها می‌شود و رفتار مکانیکی ماده را به‌ویژه تحت بارگذاری دینامیکی یا پیچیده، تحت تأثیر قرار می‌دهد. شکل، اندازه و موقعیت حفره نسبت به ترک‌ها یا مرزهای هندسی ماده، نقش تعیین‌کننده‌ای در نحوه توزیع تنش دارند.

با توجه به مثال‌های حل‌شده، نتایج زیر حاصل می‌گردد:

1. در ترک تحت بارگذاری الاستودینامیکی، ضریب شدت تنش با افزایش فرکانس بار افزایش یافته و به مقدار حداکثر می‌رسد، سپس با نرخی سریع‌تر کاهش می‌یابد.
2. طول ترک، نسبت مدول برشی و فاصله ترک تا مرز لایه در تغییرات ضریب شدت تنش مؤثر هستند. به‌طور خاص، با افزایش نسبت مدول برشی، فاصله ترک از مرز لایه و ضخامت نیم‌لایه‌ها، مقدار ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد.
3. با افزایش طول ترک در یک ماده تابعی با خواص ثابت، ضریب شدت تنش افزایش پیدا می‌کند.
4. تغییر جهت‌گیری ترک نسبت به مرز لایه موجب تغییر بردار تنش در سطح ترک شده و تأثیر چشمگیری بر تغییرات ضریب شدت تنش دارد.
5. در محیط‌های دارای دو ترک، رفتار مشابهی مشاهده می‌شود. به‌ویژه، در حالتی‌که نوک‌های ترک به یکدیگر نزدیک باشند، به دلیل اندرکنش شدیدتر، ضرایب شدت تنش بالاتری نسبت به نوک‌های دور از هم مشاهده می‌گردد.
6. وجود حفره در نزدیکی مرزهای ماده باعث تشدید تمرکز تنش و افزایش ضریب شدت تنش در نواحی مجاور می‌شود. تغییر ابعاد یا موقعیت نسبی حفره، می‌تواند به‌طور معناداری بر توزیع تنش محیطی اثر بگذارد.

فهرست نمادهای انگلیسی

$A_i(s),\ i=1,2,..,8$	ضرایب ظاهر شده در تبدیل فوریه $w(x,y),\psi(x,y)$
$B_{zj}(p)$	تابع دانسیته نابجایی بر حسب متغیر بی بعد
b_z	بردار برگرز
c_{440}	ضریب الاستیک ماده در میدان الکتریکی ثابت
D_x	مولفه جابجایی الکتریکی در جهت x
D_y	مولفه جابجایی الکتریکی در جهت y
d_{110}	ثابت دی‌الکتریک در کرنش ثابت
e_{150}	ثابت پیزوالکتریک در کرنش ثابت
E_x	مولفه میدان الکتریکی درون صفحه‌ای در جهت محور x
E_y	مولفه میدان الکتریکی درون صفحه‌ای در جهت محور y
E_z	مولفه میدان الکتریکی عمود بر صفحه
$g_{zj}(p)$	تابع محدود و پیوسته
$H(x)$	تابع پله‌ای
h_1,h_2	ضخامت باریکه ارتوتروپیک ساخته شده از ماده تابعی و پیزوالکتریک
K_R,K_L	ضرایب شدت تنش نوک‌های سمت راست و چپ ترک
$K_{ij}(q,p)$	کرنل معادله انتگرالی
l_i	نصف طول ترک iام
m	تعداد نقاط روی ترک
N	تعداد ترک
p	محل اعمال نابجایی
q	محل بررسی تنش
ζ	متغییر تبدیل فوریه
u,v	مولفه‌های جابجایی درون صفحه‌ای در جهت x,y
$w(x,y)$	مولفه جابجایی خارج صفحه‌ای
$w^*(\zeta,y)$	تبدیل فوریه نامحدود تغییر مکان $w(x,y)$
$w^+{}_i(q),w^-{}_i(q)$	تغییر مکان لبه بالایی و پایینی ترک
$\sigma_{nz}(x,y)$	مولفه تنش خارج صفحه‌ای
λ	ثابت ماده تابعی
δ_{ij}	تابع دلتای دیراک
$\mu_y(y),\mu_x(y)$	ثابت الاستیسیته نیم لایه پایینی در جهت y و x

Abstract

In this article, elastodynamic stress analysis is investigated in a non-homogeneous orthotropic layer that is reinforced by a piezoelectric layer and weakened by a cavity and several cracks. The loading is dynamic and out-of-plane, and the medium is modeled as linearly elastic. To analyze the effect of discontinuities, the Volterra dislocation method is used, which is considered an effective method for studying media containing cracks and cavities. First, the dislocation response is obtained by solving the governing equation, applying boundary and continuity conditions, and using the Fourier transform in the non-homogeneous medium. This part is one of the most complex stages of the analysis due to the presence of inhomogeneity and interlayer boundaries. Then, the stress field caused by the dislocation is extracted and using Buckner's principle, the system of integral equations for the cracks and cavity is formulated. These equations are Cauchy-type singular and are solved numerically. After obtaining the dislocation distribution, the stress intensity factors at the crack tips and the stress distribution around the cavity are calculated. These results play an important role in predicting the mechanical behavior and engineering design of multilayered structures.

Keywords:
Volterra Dislocation Method; Elastodynamic Analysis; Multiple Cracks and Cavity; Non-Homogeneous Orthotropic Half-Layer; Piezoelectric Materials

6- مراجع

[1] V. Volterra, "Sur Léquilibre Des Corps Elastiques Multiplement Connexes," In *Annales Scientifiques de L'École Normale Supérieure*, 1907, pp. 401-517. DOI: 10.24033/asens.583

[2] A. W. Maue, "Die Beugung Elastischer Wellen an Der Halbebene," *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik,* Vol. 33, pp. 1-10, 1953. https://doi.org/10.1002/zamm.19530330102

[3] N. Ashbaugh, "Stress Solution for a Crack at an Arbitrary Angle to an Interface," *International Journal of Fracture,* Vol. 11, pp. 205-219, 1975. https://doi.org/10.1007/BF00038889

[4] X. Zhang" , A Finite Rectangular Sheet with a Pair of Edge Cracks Excited by a Normal Anti-Plane Shear Wave," *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 35, pp. 1037-1042, 1990. https://doi.org/10.1016/0013-7944(90)90131-Y

[5] C. Zhang, "Transient Elastodynamic Anti-Plane Crack Analysis of Anisotropic Solids," *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 37, pp. 6107-6130, 2000. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00260-7

[6] L. Ma, L.-Z. Wu, Z.-G. Zhou, and L.-C. Guo, "Fracture Analysis of a Functionally Graded Piezoelectric Strip," *Composite Structures,* Vol. 69, pp. 294-300, 2005. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.07.007

[7] Y.-D. Li and K .Y. Lee, "Interaction Between an Electrically Permeable Crack and the Imperfect Interface in a Functionally Graded Piezoelectric Sensor," *International Journal of Engineering Science,* Vol. 47, pp. 363-371, 2009. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2008.11.003

[8] M. Monfared, M. Ayatollahi, and R. Bagheri, "Anti-plane Elastodynamic Analysis of a Cracked Orthotropic Strip," *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 53, pp. 1008-1014, 2011. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.08.008

[9] J. Bayat, M. Ayatollahi, and R. Bagheri, "Fracture Analysis of an Orthotropic Strip with Imperfect Piezoelectric Coating Containing Multiple Defects,"*Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* Vol. 77, pp. 41-49, 2015. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2015.01.009

[10] R. Faal and A. Dehghan, "Mode III Stress Intensity Factors for Cracked FGM Rectangular Plane," *Engineering Fracture Mechanics,* Vol .140 ,pp. 17-30, 2015. https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.03.046

[11] R. Bagheri, M. Ayatollahi, and S. Mousavi, "Stress Analysis of a Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic Strip with Multiple Moving Cracks," *Mathematics and Mechanics of Solids,* Vol. 22, pp. 304-323, 2017. https://doi.org/10.1177/1081286515591

[12] R. Bagheri ,M. Ayatollahi, and S. M. Mousavi, "Analytical solution of multiple moving cracks in functionally graded piezoelectric strip," *Applied Mathematics and Mechanics,* Vol. 36, pp. 777-792, 2015. https://doi.org/10.1007/s10483-015-1942-6

[13] H. Afshar and R. Bagheri, "Several Embedded Cracks in a Functionally Graded Piezoelectric Strip under Dynamic Loading," *Computers & Mathematics with Applications,* Vol. 76, pp. 534-550, 2018. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.04.035

[14] K. Kafaei and R. Bagheri, "Interaction of Multiple Cracks in a Nonhomogeneous Piezoelectric Rectangular Plane under an Electromechanical Loading," *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures,* Vol. 16, pp. 21-36, 2020. https://doi.org/10.1108/MMMS-02-2019-0043

[15] S. Hosseini, R. Bagheri, and M. Monfared, "Transient Response of Several Cracks in a Nonhomogeneous Half-Layer Bonded to a Magneto-Electro-Elastic Coating," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* Vol. 110, p. 102821, 2020. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102821

[16] R. Bagheri and V. Enjilela, "Time-Harmonic Analysis of Multiple Interface Cracks in Two Dissimilar FGM Half-Planes: In-Plane Problem," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* Vol. 116, p. 103094, 2021. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2021.103094

[17] A. Korsunsky and D. Hills, "The Solution of Crack Problems by Using Distributed Strain Nuclei," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science,* Vol . 210 ,pp. 23-31, 1996. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1996_210_166_02

[18] F. Erdogan, G. D. Gupta, amp, and T. Cook, "Numerical Solution of Singular Integral Equations," in *Methods of analysis and solutions of crack problems: Recent developments in fracture mechanics Theory and methods of solving crack problems*, ed: Springer, 1973, pp. 368-425. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2260-5_7

[19] R. Faal, A. Fotuhi, S. Fariborz, and H. Daghyani, "Antiplane Stress Analysis of an Isotropic Wedge with Multiple Cracks," *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 41, pp. 4535-4550, 2004. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.03.005